

ТЕОРИЯ РЯДОВ ЭЙЗЕНШТЕЙНА ДЛЯ ГРУППЫ  $SL(3, \mathbb{R})$  И ЕЕ  
ПРИЛОЖЕНИЕ К ОДНОЙ БИНАРНОЙ ЗАДАЧЕ

ЧАСТЬ I. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУРЬЕ СТАРШЕГО РЯДА ЭЙЗЕНШТЕЙНА

Введение

В середине XIX века Л. Дирихле ввел в теорию чисел принцип, согласно которому изучение многих свойств теоретико-числовых функций может быть сведено к изучению аналитической структуры рядов Дирихле с рассматриваемыми функциями в качестве коэффициентов. Этот принцип, как известно, обладает большими возможностями. В настоящей работе мы, исследуя аналитические свойства рядов Эйзенштейна для главного однородного пространства группы  $SL(3, \mathbb{R})$ , автоморфных относительно дискретной подгруппы  $SL(3, \mathbb{Z})$ , и изучая арифметическую структуру их коэффициентов Фурье, получаем асимптотическую формулу

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{F}_3(n) \mathcal{F}_3(n+k) \sim \mathcal{G}_3(k) N \ln^4 N, \quad (0.1)$$

где

$$\mathcal{F}_3(n) = \sum_{\substack{n=d_1 d_2 d_3 \\ d_1, d_2, d_3 > 0}} 1,$$

а  $\mathcal{G}_3(k)$  - особый ряд.

Предлагаемая работа возникла в результате обсуждения работы Н. В. Кузнецова, публикуемой в настоящем сборнике, в которой по-новому получена известная асимптотическая формула

$$\sum_{n=1}^N \mathcal{F}_2(n) \mathcal{F}_2(n+k) \sim \mathcal{G}_2(k) N \ln^2 N, \quad (0.2)$$

где  $\mathcal{F}_2(n)$  - число положительных делителей  $n$ , а  $\mathcal{G}_2(k)$  - особый ряд.

Основная идея Н. В. Кузнецова состоит в рассмотрении разложения Фурье ряда Эйзенштейна  $E(x, s)$  для главного однородного пространства группы  $SL(2, \mathbb{R})$ , автоморфного относительно  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Ряд Эйзенштейна  $E(x, s)$  задается при  $\operatorname{Re} s > 1$  равенством

$$E(x, s) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{cd=-\infty \\ (c,d)=1}}^{\infty} \frac{y^s}{cx + d|k^s}, \quad (0.3)$$

мероморфно продолжается на всю плоскость комплексной переменной  $\delta$  и при всех  $\delta$  разлагается в ряд Фурье

$$E(z, \delta) = y^\delta + c(\delta) y^{1-\delta} + \frac{2\sqrt{y}}{\xi(2\delta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{\delta-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta}(|n|) \times \quad (0.4)$$

$$\times K_{\delta-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) e^{2\pi i n x},$$

где  $z = x + iy$ ,  $y > 0$ , штрих над знаком суммы означает, что  $n \neq 0$ ,

$$c(\delta) = \frac{\xi(2\delta-1)}{\xi(2\delta)}, \quad \xi(\delta) = \pi^{-\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) \zeta(\delta), \quad (0.5)$$

$$\sigma_\delta(n) = \sum_{d|n, d>0} d^\delta$$

Здесь  $\zeta(\delta)$  - дзета-функция Римана,  $\Gamma(\delta)$  - гамма-функция Эйлера, а  $K_\delta(y)$  - функция Макдональда, т.е. функция Бесселя третьего рода чисто мнимого аргумента, имеющая интегральное представление

$$K_\delta(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y}{2}(t+\frac{1}{t})} t^\delta \frac{dt}{t}, \quad y > 0. \quad (0.6)$$

Введем функцию  $Z_2(\delta)$ , определяемую при  $\text{Re } \delta > 1$  рядом Дирихле

$$Z_2(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_2(n) \mathcal{F}_2(n+k)}{n^\delta}$$

С помощью формулы (0.4) и теоремы разложения по собственным функциям оператора Бельтрами-Лапласа на фундаментальной области дискретной группы  $SL(2, \mathbb{Z})$  на плоскости Лобачевского можно исследовать свойства функции  $Z_2(\delta)$  в критической полосе и получить формулу (0.2).

Мероморфность рядов Эйзенштейна для групп ранга 1 над  $\mathbb{R}$  была доказана А.Сельбергом в классических работах [1-2]. В работе [2] А.Сельберг также ввел ряды Эйзенштейна для главных однородных пространств групп  $SL(n, \mathbb{R})$ , автоморфные относительно  $SL(n, \mathbb{Z})$  и мероморфно продолжил их как функции от  $n-1$  комплексных переменных. В работе [3] Р.П.Ленглендс, развивая идеи Сельберга, доказал мероморфность рядов Эйзенштейна в общем слу-

чае, основываясь на индукции по рангу группы.

Для наших целей нам необходимо иметь явное выражение, подобное формуле (0.4), для аналитически продолженного старшего ряда Эйзенштейна для главного однородного пространства группы  $SL(3, \mathbb{R})$ , автоморфного относительно  $SL(3, \mathbb{Z})$ . Ввиду того, что общая теория рядов Эйзенштейна не позволяет получать разложения типа (0.4), а также по причине весьма длинных вычислений, мы решили отвести выводу такого разложения первую часть работы. Поскольку наш арифметический метод нахождения разложения Фурье принципиально обобщается на группы  $SL(n, \mathbb{R})$  и, ввиду того, что, насколько нам известно, случай специальной линейной группы над полем ранга больше 1 в литературе не рассматривался, мы решили вести наше изложение как можно подробнее. Отметим, в частности, что мы даем независимое от работы [3] доказательство аналитического продолжения и функциональных уравнений для ряда Эйзенштейна.

Вторая часть работы будет посвящена изучению аналитических свойств функции, заданной при  $\text{Re } s > 1$  рядом Дирихле

$$Z_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{F}_3(n) \mathcal{F}_3(n+k)}{n^s},$$

и доказательству формулы (0.1).

Основные результаты первой части работы содержатся в теоремах 1 и 2, в которых приведены разложение Фурье и функциональные уравнения для ряда Эйзенштейна. Следует указать, что аналогом коэффициентов  $\sigma_3(n)$  для  $SL(2, \mathbb{R})$  в нашем случае является теоретико-числовая функция  $\sigma_{3,1,2}(n, m)$

$$\sigma_{3,1,2}(n, m) = \sum_{\substack{m = d_1 d_2 d_3 \\ d_1, d_2, d_3 > 0, (d_3, n) = 1}} d_1^{3_1} d_2^{3_2}, \quad (0.7)$$

которая связывает бинарную задачу (0.1) с группой  $SL(3, \mathbb{R})$ . Отметим, что аналогичная задача для  $\mathcal{F}_l(n)$  связана с группой  $SL(l, \mathbb{R})$

Скажем теперь несколько слов о построении работы. В первом параграфе мы, следуя работе [4], привели для удобства читателя основные сведения о главном однородном пространстве  $S$ ,  $S = SL(3, \mathbb{R}) / SO(3)$ . В него же мы включили все необходимые нам теоретико-групповые леммы, а также вычисления и оценки некоторых интегралов. Во втором, основном параграфе мы, основываясь на формуле суммирования Пуассона и используя результаты предыдущего

параграфа, получаем разложение Фурье ряда Эйзенштейна. Нетривиальным здесь является то обстоятельство, что минимальная параболическая подгруппа группы  $SL(3, \mathbb{Z})$  некоммукативна. Третий параграф посвящен выводу функциональных уравнений для ряда Эйзенштейна. Там же мы выясняем происхождение специальных функций в теореме I и их место в случае произвольных дискретных подгрупп  $SL(3, \mathbb{R})$  с конечным объемом фундаментальной области. Здесь же укажем, что мы придерживаемся двойной нумерации формул: первое число указывает номер параграфа, а второе - номер внутри параграфа.

Пользуясь случаем, мы хотим выразить благодарность А.Б.Венкову и М.М.Скриганову за обсуждение работы [3] и полезные замечания. Нам также очень приятно выразить нашу благодарность Н.В.Кузнецову, который любезно ознакомил нас со своей работой до ее опубликования, за стимулирующие беседы и ценные замечания.

### § I. Необходимые сведения и вспомогательные леммы

Рассмотрим группу  $G = SL(3, \mathbb{R})$  и ее максимальную компактную подгруппу  $K = SO(3)$ . Известно, что однородное пространство  $S = G/K$  реализуется как пространство унимодулярных симметрических положительно определенных матриц порядка 3. Транзитивное действие группы  $G$  на  $S$  имеет вид

$$Y \longrightarrow g(Y) = gYg^t, \quad (I.1)$$

где  $Y \in S$ ,  $g \in G$ , а  $g^t$  - матрица, транспонированная с  $g$ .  $G$  - инвариантная риманова метрика на  $S$  выглядит следующим образом

$$ds^2 = \text{tr}(Y^{-1} dY \cdot Y^{-1} dY), \quad (I.2)$$

где  $\text{tr}$  - след матрицы.

С параболической подгруппой  $P$  группы  $G$ , состоящей из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},$$

связано разложение Лэнглендса (см. [3])

$$P = NAM$$

Здесь  $N$  - унипотентная подгруппа,  $A$  - расщепимая, а  $M$  - простая. Подгруппа  $N$  состоит из элементов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

подгруппа  $A$  - из элементов

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0,$$

а каждый элемент подгруппы  $M$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} m_0.$$

Здесь  $\tilde{m} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , а элементы  $m_0$  образуют подгруппу порядка 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Каноническим способом на  $S$  вводятся координаты, связанные с транзитивным действием подгруппы  $P$ . Базисной точкой является единичная матрица, а параметризация  $P$  задается разложением Ланглендса, причем удобно положить

$$y = \alpha^6, \quad \tilde{m} = \begin{pmatrix} u^{\frac{1}{2}} & vu^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & u^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, пространство  $S$  состоит из матриц вида  $gg^t$ , где

$$g = \begin{pmatrix} \alpha u^{\frac{1}{2}} & \alpha v u^{-\frac{1}{2}} & \alpha^2 x_1 \\ 0 & \alpha u^{-\frac{1}{2}} & \alpha^2 x_2 \\ 0 & 0 & \alpha^{-2} \end{pmatrix}, \quad (I.3)$$

или, в координатах,  $S = \{y, \alpha, x_1, x_2; y > 0, \alpha = v + iu, u > 0\}$ .

Следуя А.Сельбергу ([2]), определим старший ряд Эйзенштейна  $E(Y, s, t)$  относительно дискретной подгруппы  $\Gamma = \text{SL}(3, \mathbb{Z})$  группы  $G$  равенством

$$E(Y, s, t) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} y^s (\gamma(Y)) u^t (\gamma(Y)), \quad (I.4)$$

где  $\Gamma_\infty = \Gamma \cap P_0$ ,  $\tilde{N} = \Gamma \cap N$ ,  $Y \in S$ ,

а  $P_0$  - минимальная параболическая подгруппа группы  $G$ , состоящая из элементов вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из общей теории рядов Эйзенштейна (см. [3]) хорошо известно, что ряд (I.4) абсолютно и равномерно сходится при  $\text{Re } t > 1$ ,  $3\text{Re } s - 2\text{Re } t > 2$  и, следовательно, является в этой области аналитической функцией двух комплексных переменных  $s$  и  $t$ .

Из формул (I.1) и (I.3) легко получить следующие выражения для  $y(\gamma(Y))$ ,  $u(\gamma(Y))$ :

$$\begin{aligned} y(\gamma(Y)) &= y^{-\frac{1}{3}} \left( u c_1^2 + \frac{1}{u} (c_1 v + c_2)^2 + \frac{1}{y} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}, \\ u(\gamma(Y)) &= y^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{1}{3}} (\gamma(Y)) \left( \frac{1}{u} (\mathcal{D}_1 - v \mathcal{D}_2 - (x_1 - v x_2) \mathcal{D}_3)^2 + \right. \\ &\quad \left. + u (\mathcal{D}_2 - x_2 \mathcal{D}_3)^2 + y \mathcal{D}_3^2 \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

где

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \Gamma,$$

а

$\mathcal{D}_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2$ ,  $\mathcal{D}_2 = b_3 c_1 - b_1 c_3$ ,  $\mathcal{D}_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1$  - алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы  $\gamma$ .  
Формулу (I.4) можно переписать в виде

$$E(Y, s, t) = y^{\frac{s_2 - s_1}{3}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty} f(\gamma, Y, s_1, s_2), \quad (\text{I.6})$$

где

$$\begin{aligned} f(\gamma, Y, s_1, s_2) &= \left( u c_1^2 + \frac{1}{u} (c_1 v + c_2)^2 + \frac{1}{y} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3)^2 \right)^{-s_1} \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{u} (\mathcal{D}_1 - v \mathcal{D}_2 - (x_1 - v x_2) \mathcal{D}_3)^2 + u (\mathcal{D}_2 - x_2 \mathcal{D}_3)^2 + y \mathcal{D}_3^2 \right)^{-s_2}, \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \frac{3s-t}{2} \quad \delta_2 = t. \quad (I.7)$$

В дальнейшем мы, не опасаясь путаницы, будем обозначать выражение (I.6) через  $E(Y; \delta_1, \delta_2)$ . Таким образом,  $E(Y; \delta_1, \delta_2)$  равно  $E(Y, s, t)$ , а не значению ряда Эйзенштейна при  $s = \delta_1$ ,  $t = \delta_2$ ; следует обращать внимание на точку с запятой после аргумента  $Y$ . Для упрощения возникающих формул также полезно ввести переменную  $\delta_3 = \delta_1 + \delta_2 - \frac{1}{2}$ .

В случае группы  $SL(2, \mathbb{R})$  соответствующие ей классы смежности  $\Gamma$  параметризуются нижними строками элементов из  $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ , т.е. парами взаимно простых целых чисел. В случае группы  $SL(3, \mathbb{R})$  имеет место следующая лемма.

**ЛЕММА I.** Классы смежности  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$  находятся во взаимно-однозначном соответствии со всеми наборами целых рациональных чисел  $\{c_j, \mathcal{D}_j\}_{j=1,2,3}$  со следующими свойствами:

$$(c_1, c_2, c_3) = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3) = 1, \quad (I.8)$$

$$c_1 \mathcal{D}_1 + c_2 \mathcal{D}_2 + c_3 \mathcal{D}_3 = 0, \quad (I.9)$$

$$c_j, \mathcal{D}_j \geq 0, \quad (I.10)$$

где  $(a, b, c)$  - наибольший общий делитель чисел  $a, b, c$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Элементы последней строки и миноры первой строки матрицы из  $\Gamma$  очевидным образом удовлетворяют условиям (I.8)-(I.9). Поскольку у матриц из одного и того же класса эти числа могут отличаться лишь знаками, то каждому классу однозначно соответствует набор чисел со свойствами (I.8)-(I.10). Для доказательства утверждения леммы осталось показать, что каждому набору чисел с указанными свойствами можно поставить в соответствие матрицу из  $\Gamma$ , у которой последняя строка и миноры совпадают с этими числами, и что две такие матрицы отличаются слева на элемент из  $\Gamma_\infty$ . Отбрасывая условие (I.10), достаточно показать, что такие матрицы отличаются на элемент из  $\Gamma_\infty$ , где  $\Gamma_\infty$  - подгруппа  $\Gamma_\infty$ , состоящая из элементов вида

$$\begin{pmatrix} 1 & n_1 & n_2 \\ 0 & 1 & n_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$$

Докажем сначала, что система

$$\begin{aligned} b_2 c_3 - b_3 c_2 &= \mathcal{D}_1, \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 &= \mathcal{D}_2, \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 &= \mathcal{D}_3 \end{aligned} \quad (I.II)$$

при заданных  $c_j, \mathcal{D}_j$  со свойствами (I.8)-(I.10) разрешима над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Так как определитель этой системы равен нулю, то условие (I.9) обеспечивает разрешимость над полем  $\mathbb{Q}$ . Положим

$$d_1 = (c_2, c_3), \quad d_2 = (c_1, c_3), \quad d_3 = (c_1, c_2).$$

Из условий леммы следует, что  $d_j \mid \mathcal{D}_j, j=1, 2, 3$ . Более того,

$$(d_1, d_2) = (d_1, d_3) = (d_2, d_3) = 1$$

и, следовательно,

$$c_1 = c'_1 d_2 d_3, \quad c_2 = c'_2 d_1 d_3, \quad c_3 = c'_3 d_1 d_2,$$

где

$$(c'_j, d_j) = 1, \quad (c'_j, c'_l) = 1$$

при  $j \neq l, j, l = 1, 2, 3$ . Для разрешимости системы (I.II) достаточно показать, что система сравнений

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 + c_2 x &\equiv 0 \pmod{c_3}, \\ \mathcal{D}_2 - c_1 x &\equiv 0 \pmod{c_3} \end{aligned} \quad (\text{I.I2})$$

имеет решение. В этом случае

$$b_1 = \frac{c_1 x - \mathcal{D}_2}{c_3}, \quad b_2 = \frac{\mathcal{D}_1 + c_2 x}{c_3}, \quad b_3 = x,$$

а третье уравнение в (I.II) выполняется благодаря условию (I.9). Положим

$$\mathcal{D}_j = \mathcal{D}'_j d_j, \quad j=1, 2, 3$$

и пусть  $x_0$  - решение сравнения

$$\mathcal{D}'_1 + c'_2 d_3 x_0 \equiv 0 \pmod{c'_3 d_2}, \quad (\text{I.I3})$$

где  $(c'_2 d_3, c'_3 d_2) = 1$ . Тогда  $x_0 + m c'_3 d_2, m=0, \dots, d_1-1$  - все решения первого сравнения в (I.I2). Далее, поскольку

$$c_1 \mathcal{D}_1 + c_1 c_2 x \equiv -c_2 (\mathcal{D}_2 - c_1 x) \pmod{c_3},$$

то для любого решения первого сравнения в (I.I2) выполняется соотношение

$$\mathcal{D}_2 - c_1 x \equiv 0 \pmod{c'_3 d_2}. \quad (\text{I.I4})$$

Покажем, что выбором  $m$  по модулю  $d_1$  можно добиться выполнения второго сравнения в (I.I2). Пусть сначала простое  $p \mid c_3, p \nmid d_1$ , тогда

$$\mathcal{D}_2 - c_1 x \equiv 0 \pmod{p^{\nu_p(c_3)}}, \quad (\text{I.I5})$$

где  $\nu_p(n)$  -  $p$ -адический показатель числа  $n$ . Если  $p \mid c_3, p \nmid d_1$  и  $\nu_p(c_3) = \nu_p(d_1)$ , то

$$(c'_3 d_2, p) = 1, \quad (c_1, p) = 1,$$

и выбором  $p$  по модулю  $p^{\nu_p(c_3)}$  можно обеспечить выполнение

сравнения (I.15). И наконец, если  $\nu_p(c_3) = \nu_1$ ,  $\nu_p(d_1) = \nu_2$ ,  $\nu_1 > \nu_2$ , то из (I.14) имеем

$$D_2 - c_1 x \equiv 0 \pmod{p^{\nu_1 - \nu_2}}.$$

Поскольку  $x = x_0 + m c_3' d_2$ , то выбором  $m$  по модулю  $p^{\nu_2}$  подымаем  $x$  до решения по модулю  $p^{\nu_1}$ . Тем самым мы доказали разрешимость системы (I.11) над кольцом  $\mathbb{Z}$ . Далее, нетрудно видеть, что если  $b_j^{(0)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , - решение (I.11), то общее решение системы (I.11) имеет вид

$$b_j = b_j^{(0)} + \alpha c_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Строка  $a_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , находится, с точностью до линейной комбинации строк  $b_j$  и  $c_j$ , из условия

$$a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 = 1.$$

Таким образом, по последней строке и минорам мы восстановили класс смежности  $\Gamma$  по  $\Gamma_\infty$ . Лемма доказана.

Максимальной коммутативной подгруппой группы  $\tilde{\Gamma}_\infty$  является унипотентная подгруппа  $\tilde{N}$ . Двойные классы смежности  $\tilde{\Gamma}_\infty \backslash \tilde{\Gamma} / \tilde{N}$  описываются следующей леммой.

ЛЕММА 2. Двойные классы смежности  $\tilde{\Gamma}_\infty \backslash \tilde{\Gamma} / \tilde{N}$  находятся во взаимно-однозначном соответствии со всеми наборами чисел  $\{c_j, D_j\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , удовлетворяющими соотношениям (I.8)-(I.9) и условию

$$D_1, D_2 \pmod{D_3} \quad (\text{I.16})$$

при  $D_3 \neq 0$ . В случае  $D_3 = 0$  условие (I.16) не требуется.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2 тривиально.

Во Введении мы привели формулу (0.4) - разложение Фурье ряда Эйзенштейна на плоскости Лобачевского, автоморфного относительно  $SL(2, \mathbb{Z})$ . Эта классическая формула по-существу восходит еще к Кронекеру; она также была известна Дойрингу, Морделлу и Эшштейну. В литературе она иногда фигурирует как "формула Сельберга-Човлы". Пусть  $a, b, c$  - вещественные числа,  $a > 0$ ,  $\Delta = -4ac - b^2 > 0$ . Определим при  $\text{Re } s > 1$  дзета-функцию Эшштейна на квадратичной форме  $ax^2 + bxy + cy^2$  равенством

$$Z(s) = \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(an^2 + bmn + cm^2)^s} \quad (\text{I.17})$$

Заметим, что при суммировании по решетке штрих над знаком суммы означает, что мы не учитываем начало координат. Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 3. (разложение Фурье дзета-функции Эшштейна). Функция

$Z(s)$  допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексной переменной  $s$  и регулярна всюду, за исключением точки  $s=1$ , где она имеет простой полюс. При всех  $s$  справедлива формула

$$Z(s) = 2\zeta(2s)a^{-s} + \frac{2^{2s} a^{s-1} \sqrt{\pi} \Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Delta^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \zeta(2s-1) + \frac{4\pi^s 2^{s-\frac{1}{2}}}{\Delta^{\frac{s-1}{2}} \sqrt{a} \Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(n) K_{s-\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi |n| \sqrt{\Delta}}{a}\right) e^{i\pi n \frac{b}{a}} \quad (I.18)$$

Классическое доказательство леммы 3, основанное на применении формулы суммирования Пуассона, содержится, например, в работе [5]. В дальнейшем нам будут встречаться суммы вида

$$\Phi(s_1, s_2) = \sum_{c_j, d_j \in \mathcal{M}} f(c_j, d_j, s_1, s_2),$$

где  $f$  - однородная функция степени однородности  $-2s_1$  по переменным  $c_j$  и степени  $-2s_2$  по переменным  $d_j$ , а область суммирования  $\mathcal{M}$  состоит из точек решетки  $\mathbb{Z}^6$ , удовлетворяющих условиям

$$(c_1, c_2, c_3) = 1, \quad (d_1, d_2, d_3) = 1, \quad c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0$$

Освободиться от условий взаимной простоты можно с помощью следующего хорошо известного приема.

ЛЕММА 4. Пусть ряд  $\Phi(s_1, s_2)$  абсолютно сходится при  $\operatorname{Re} s_1 > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} s_2 > \frac{1}{2}$ . Тогда

$$\Phi(s_1, s_2) = \frac{1}{\zeta(2s_1) \zeta(2s_2)} \sum_{c_j, d_j \in \tilde{\mathcal{M}}} f(c_j, d_j, s_1, s_2), \quad (I.19)$$

где множество  $\tilde{\mathcal{M}}$  состоит из точек решетки  $\mathbb{Z}^6$ , удовлетворяющих условиям

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 > 0, \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 > 0, \quad c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\mu(n)$  - функция Мёбиуса. Поскольку

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 0, & n > 1 \\ 1, & n = 1 \end{cases}$$

то

$$\Phi(s_1, s_2) = \sum_{c_j, d_j \in \tilde{\mathcal{M}}} \sum_{n|(c_1, c_2, c_3)} \sum_{m|(d_1, d_2, d_3)} \mu(n) \mu(m) f(c_j, d_j, s_1, s_2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c_j, d_j \in \overline{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{2s_1}} \frac{\mu(m)}{m^{2s_2}} f(c_j, d_j; s_1, s_2) = \\
&= \frac{1}{\zeta(2s_1)\zeta(2s_2)} \sum_{c_j, d_j \in \overline{m}} f(c_j, d_j; s_1, s_2),
\end{aligned}$$

так как при  $\operatorname{Re} s > 1$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Лемма доказана.

Отметим, что в лемме 4 мы рассмотрели только типичный случай. В каждом конкретном примере совершенно ясно, как надо видоизменить лемму 4.

Во втором параграфе при нахождении коэффициентов Фурье ряда Эйзенштейна нам потребуются значения некоторых интегралов. Напомним сначала одну известную формулу из теории функций Бесселя, простое доказательство которой мы приводим для полноты изложения.

ЛЕММА 5. При  $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ ,  $x > 0$  имеет место формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{(u^2+1)^s} du = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \left(\frac{x}{2}\right)^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(x). \quad (I.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из интегрального представления гамма-функции имеем

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux}}{(u^2+1)^s} du &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{t+iux}}{(u^2+1)^s} t^s du \frac{dt}{t} = \\
&= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tu^2+iux} e^{-t} t^s du \frac{dt}{t} = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(t+\frac{x^2}{4t})} t^{s-\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} =
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\delta-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}(t+\frac{1}{t})} t^{\delta-\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = 2\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\delta-\frac{1}{2}} K_{\delta-\frac{1}{2}}(x).$$

Столь же просто доказывается следующая формула.

ЛЕММА 6. При  $\operatorname{Re} \delta > \frac{1}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(u^2+1)^{\delta}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\delta-\frac{1}{2})}{\Gamma(\delta)} \quad (I.21)$$

Известно (см., например, [5]), что леммы 5 и 6 используются в одном из вариантов вывода разложения (0.4). Следующая лемма играет ту же роль для однородного пространства группы  $SL(3, \mathbb{R})$ , что и лемма 5 для плоскости Лобачевского.

ЛЕММА 7. При  $\operatorname{Re} \delta_1, \operatorname{Re} \delta_2 > \frac{1}{2}$ ,  $n_1, n_2 > 0$  имеет место формула

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{\delta_1-\frac{1}{2}} \left( \frac{2n_1 \sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{1+x_2^2} \right) (1+x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{4}-\frac{\delta_1}{2}-\delta_2} (1+x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{2in_1 x_1 x_2}{1+x_2^2} + 2in_2 x_2 \right\} dx_1 dx_2 = \end{aligned} \quad (I.22)$$

$$= \frac{2\pi n_1^{\delta_2-\frac{1}{2}} n_2^{\delta_3-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} \int_0^{\infty} K_{\delta_3-\frac{1}{2}}(2n_1 \sqrt{1+\alpha}) K_{\delta_3-\frac{1}{2}}\left(2n_2 \sqrt{1+\frac{1}{\alpha}}\right) \alpha^{\frac{\delta_2-\delta_1}{2}} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции Макдональда- формулы (0.6) непосредственно следует, что

$$K_{\nu}(ax) = \frac{a^{\nu}}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}(t+\frac{a^2}{t})} t^{-\nu} \frac{dt}{t} \quad (I.23)$$

Обозначим левую часть равенства (I.22) через  $I(n_1, n_2)$ . С помощью формулы (I.23) получим, что

$$\begin{aligned}
I(n_1, n_2) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (1+x_1^2+x_2^2)^{-s_2} (1+x_2^2)^{-\frac{1}{2}} x \\
&\times \exp \left\{ \frac{-n_1}{1+x_2^2} (\mathcal{F}_1 + \frac{1+x_1^2+x_2^2}{\mathcal{F}_1} - 2ix_1x_2) + 2in_2x_2 \right\} \mathcal{F}_1^{\frac{1}{2}-s_1} dx_1 dx_2 \frac{d\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_1} = \\
&= \frac{n_1^{s_2}}{2\Gamma(s_2)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (1+x_2^2)^{-\frac{1}{2}-s_2} \exp \left\{ \frac{-n_1}{1+x_2^2} (\mathcal{F}_1 + \frac{1+x_1^2+x_2^2}{\mathcal{F}_1} - \right. \\
&\left. - 2ix_1x_2 + (1+x_1^2+x_2^2)\mathcal{F}_2) + 2in_2x_2 \right\} \mathcal{F}_1^{\frac{1}{2}-s_1} \mathcal{F}_2^{s_2} dx_1 dx_2 \frac{d\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_1} \frac{d\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_2},
\end{aligned}$$

в последнем равенстве мы воспользовались формулой

$$a^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-at} t^{s-1} \frac{dt}{t}; \quad \operatorname{Re} s, \operatorname{Re} a > 0.$$

Выделим в показателе экспоненты полный квадрат по  $x_1$ . После интегрирования по  $x_1$   $I(n_1, n_2)$  примет вид

$$\begin{aligned}
I(n_1, n_2) &= \frac{\sqrt{\pi} n_1^{s_2-\frac{1}{2}}}{2\Gamma(s_2)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty (1+x_2^2)^{-s_2} \left( \frac{1}{\mathcal{F}_1} + \mathcal{F}_2 \right)^{-\frac{1}{2}} x \\
&\times \exp \left\{ -n_1 \left[ \frac{1}{\mathcal{F}_1} + \mathcal{F}_2 + \frac{1}{\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2} + \frac{\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2}{\left( \frac{1}{\mathcal{F}_1} + \mathcal{F}_2 \right) (1+x_2^2)} \right] + \right. \\
&\left. + 2in_2x_2 \right\} \mathcal{F}_1^{\frac{1}{2}-s_1} \mathcal{F}_2^{s_2} dx_2 \frac{d\mathcal{F}_1}{\mathcal{F}_1} \frac{d\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_2}
\end{aligned}$$

Положим  $a = 1+x_2^2$  и совершим замену переменных

$$v_1 = \frac{1}{\mathcal{F}_1} + \mathcal{F}_2, \quad v_2 = \frac{\mathcal{F}_1 \mathcal{F}_2}{a},$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1 + av_2}{v_1}, \quad \mathcal{T}_2 = \frac{av_1 v_2}{1 + av_2}$$

Якобиан этой замены  $J$  равен

$$J = \frac{\partial \mathcal{T}_1}{\partial v_1} \frac{\partial \mathcal{T}_2}{\partial v_2} - \frac{\partial \mathcal{T}_2}{\partial v_1} \frac{\partial \mathcal{T}_1}{\partial v_2} = -\frac{a}{v_1}$$

и для  $I(n_1, n_2)$  получим выражение

$$I(n_1, n_2) = \frac{\sqrt{\pi} n_1^{s_2 - \frac{1}{2}}}{2\Gamma(s_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty (1 + av_2)^{\frac{1}{2} - s_1 - s_2} v_1^{s_1 + s_2 - 1} v_2^{s_2} x$$

$$\times \exp\left\{-n_1\left(v_1 + \frac{1}{v_1} + \frac{v_2}{v_1}\right) + 2in_2 x_2\right\} \frac{dv_1}{v_1} \frac{dv_2}{v_2} dx_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} n_1^{s_2 - \frac{1}{2}}}{\Gamma(s_2)} \int_0^\infty K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2n_1 \sqrt{1 + v_2}) (1 + v_2)^{\frac{s_3 - \frac{1}{2}}{2}} x$$

$$\times (1 + v_2 + v_2 x_2^2)^{-s_3} v_2^{s_2} e^{2in_2 x_2} \frac{dv_2}{v_2} dx_2 =$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi} n_1^{s_2 - \frac{1}{2}} n_2^{s_3 - \frac{1}{2}}}{\Gamma(s_2) \Gamma(s_3)} \int_0^\infty K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2n_1 \sqrt{1 + v_2}) K_{s_3 - \frac{1}{2}}\left(2n_2 \sqrt{1 + \frac{1}{v_2}}\right) v_2^{\frac{s_2 - s_1}{2}} \frac{dv_2}{v_2}$$

Напомним, что на протяжении всей работы  $s_3 = s_1 + s_2 - \frac{1}{2}$ . При выводе этой формулы мы сначала воспользовались формулой (I.23), а затем применили лемму 5. Лемма доказана.

Аналогом леммы 6 для случая группы  $SL(3, \mathbb{R})$  является следующее утверждение.

ЛЕММА 8. При  $\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Re} s_2 > \frac{1}{2}$ ,  $u > 0$  имеет место формула

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K_{s_1 - \frac{1}{2}}\left(\frac{u\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}}{1+x_2^2}\right) (1+x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{4} - \frac{s_1}{2} - s_2} x$$

$$\times (1+x_2^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{2iu x_1 x_2}{1+x_2^2}\right\} dx_1 dx_2 = \quad (\text{I.24})$$

$$= \frac{\pi \Gamma(\delta_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} K_{\delta_1 - \frac{1}{2}}(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершая те же преобразования, что и при доказательстве леммы 7, получим для рассматриваемого интеграла следующее выражение

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi} u^{\delta_2 - \frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2} - \delta_2}}{\Gamma(\delta_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{u}{2} (v_1 + \frac{1}{v_1} + \frac{v_2}{v_1})} \times \\ & \times (1 + v_2 + v_2 x_2^2)^{-\delta_3} v_1^{\delta_3 - \frac{1}{2}} v_2^{\delta_2} \frac{dv_1}{v_1} \frac{dv_2}{v_2} dx_2 = \\ & = \frac{\pi u^{\delta_2 - \frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2} - \delta_2} \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u}{2} (v_1 + \frac{1+v_2}{v_1})} \times \\ & \times (1 + v_2)^{\frac{1}{2} - \delta_3} v_1^{\delta_3 - \frac{1}{2}} v_2^{\delta_2 - \frac{1}{2}} \frac{dv_1}{v_1} \frac{dv_2}{v_2} = \\ & = \frac{\pi u^{\delta_2 - \frac{1}{2}} 2^{-\frac{1}{2} - \delta_2} \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u}{2} (t + v_2 t + \frac{1}{t})} t^{\delta_3 - \frac{1}{2}} \times \\ & \times v_2^{\delta_2 - \frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \frac{dv_2}{v_2} = \frac{\pi \Gamma(\delta_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{2} (t + \frac{1}{t})} t^{\delta_3 - \frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = \\ & = \frac{\pi \Gamma(\delta_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} K_{\delta_1 - \frac{1}{2}}(u). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следует отметить, что здесь и в дальнейшем при доказательствах мы никогда не обосновываем законность перестановки интегралов и перемены порядков интегрирования и суммирования. Это тривиально ввиду абсолютной сходимости рассматриваемых рядов и интегралов.

В заключение этого параграфа приведем некоторые оценки, необходимые для мероморфного продолжения ряда Эйзенштейна на все пространство  $\mathbb{C}^2$ . Как и леммы 5-6, следующее утверждение хорошо известно.

ЛЕММА 9. Равномерно по  $s$ ,  $s = \sigma + it$ ,  $\alpha \leq \sigma, t \leq \beta$ , справедлива асимптотическая формула

$$K_s(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (I.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [6], стр. 32.

Обозначим через  $I(n_1, n_2, u, y, s_1, s_2)$  возникающий в лемме 7 интеграл

$$I(n_1, n_2, u, y, s_1, s_2) = \int_0^\infty K_{s_1}(n_1 u \sqrt{1+x}) K_{s_2}\left(n_2 \sqrt{\frac{y}{u}} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) x^{s_2} \frac{dx}{x}$$

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 10. При  $n_1 u \geq 1$ ,  $n_2 \sqrt{\frac{y}{u}} \geq 1$  равномерно по  $s_1 = \sigma_1 + it_1$ ,  $s_2 = \sigma_2 + it_2$ ,  $\alpha_1 \leq \sigma_1 \leq \beta_1$ ,  $\alpha_2 \leq \sigma_2 \leq \beta_2$  справедлива оценка

$$I(n_1, n_2, u, y, s_1, s_2) \ll n_1^{c_1} n_2^{c_2} u^{c_3} y^{c_4} e^{-n_1 u - n_2 \sqrt{\frac{y}{u}}} \quad (I.26)$$

Здесь  $\ll$  - символ И.М.Виноградова, а константы  $c_1, c_2, c_3, c_4$  зависят лишь от  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ . Аналогичная оценка, но с другими константами, справедлива в случаях  $n_1 u \leq 1$ ,  $n_2 \sqrt{\frac{y}{u}} \geq 1$ ;

$$n_1 u \geq 1, \quad n_2 \sqrt{\frac{y}{u}} \leq 1; \quad n_1 u \leq 1, \quad n_2 \sqrt{\frac{y}{u}} \leq 1$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции Макдональда - формулы (0.6) следует, что при вещественных  $s$  она является монотонно убывающей функцией  $x$ . Имеет место оценка

$$|I(n_1, n_2, u, y, s_1, s_2)| \leq K_{\sigma_1}(n_1 u) \int_0^\infty K_{\sigma_2}\left(n_2 \sqrt{\frac{y}{u}} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) x^{\sigma_2} \frac{dx}{x} +$$

$$+ K_{\sigma_1}\left(n_2 \sqrt{\frac{y}{u}}\right) \int_1^\infty K_{\sigma_1}(n_1 u \sqrt{1+x}) x^{\sigma_2} \frac{dx}{x} \ll$$

$$\leq 2K_{\sigma_1}(n_1 u) \int_1^{\infty} K_{\sigma_1}(n_2 \sqrt{\frac{y}{u}} x) x^{-2\sigma_2} \frac{dx}{x} + \quad (I.27)$$

$$+ 2K_{\sigma_1}(n_2 \sqrt{\frac{y}{u}}) \int_1^{\infty} K_{\sigma_1}(n_1 u x) x^{2\sigma_2} \frac{dx}{x}$$

Из леммы 9 получаем оценку

$$K_{\sigma}(x) \ll \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \quad (I.28)$$

и с ее помощью заключаем, что при  $t \geq 1$

$$\int_1^{\infty} K_{\sigma_1}(tx) x^{\sigma_2} \frac{dx}{x} \ll t^c e^{-t}, \quad (I.29)$$

где  $c$  зависит от  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Аналогичная оценка, но с другой константой  $c$ , справедлива и в случае  $t \leq 1$ . Объединение оценок (I.27)–(I.29) доказывает лемму.

Следует отметить, что оценка (I.25) далека от наилучшей, но она вполне пригодна для наших целей.

На этом мы закончим изложение необходимых нам результатов и непосредственно переходим к выводу разложения Фурье ряда Эйзенштейна.

## § 2. Разложение Фурье ряда Эйзенштейна

Представим ряд Эйзенштейна в виде

$$E(Y; \delta_1, \delta_2) = E_1(Y; \delta_1, \delta_2) + E_2(Y; \delta_1, \delta_2), \quad (2.1)$$

где  $E_1(Y; \delta_1, \delta_2)$  – сумма тех слагаемых в формуле (I.6), у которых  $\mathcal{D}_3 = 0$ , а  $E_2(Y; \delta_1, \delta_2)$  – сумма слагаемых с  $\mathcal{D}_3 \neq 0$ . Мы начнем наши вычисления с рассмотрения наиболее простого слагаемого в (2.1) – ряда  $E_1(Y; \delta_1, \delta_2)$ . Из формулы (I.6) имеем

$$E_1(Y; \delta_1, \delta_2) = \frac{y^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{4}}}{4} \sum_{\substack{c_1, c_2, c_3, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 = -\infty \\ (c_1, c_2, c_3) = (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 1 \\ c_1 \mathcal{D}_1 + c_2 \mathcal{D}_2 = 0}}^{\infty} \quad (2.2)$$

$$\left( u c_1^2 + \frac{1}{u} (c_1 v + c_2)^2 + \frac{1}{y} (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{u} (\mathcal{D}_1 - v \mathcal{D}_2)^2 + u \mathcal{D}_2^2 \right)^{-\frac{\delta_2}{2}}$$

С помощью леммы 4 освободимся от условия  $(c_1, c_2, c_3) = 1$ ; условия  $c_1 \mathcal{D}_1 + c_2 \mathcal{D}_2 = 0$  и  $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 1$  означают, что

$$c_1 = m \mathcal{D}_2, \quad c_2 = -m \mathcal{D}_1, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Выражение (2.2) принимает вид

$$E_1(Y; \delta_1, \delta_2) = \frac{y^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{3}}}{4\zeta(2, \delta_1)} \sum_{\substack{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, m, c_3 = -\infty \\ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 1, m^2 + c_3^2 > 0}}^{\infty} \left( a + \frac{1}{y} (b + c_3)^2 \right)^{-\delta_1} \times \left( \frac{1}{u} (\mathcal{D}_1 - v \mathcal{D}_2)^2 + u \mathcal{D}_2^2 \right)^{-\delta_2}, \quad (2.3)$$

где  $a = m^2 (u \mathcal{D}_2^2 + \frac{1}{u} (\mathcal{D}_1 - v \mathcal{D}_2)^2),$

$$b = m (\mathcal{D}_2 x_1 - \mathcal{D}_1 x_2).$$

Введем следующее обозначение: если  $(m_1, m_2) = 1$ ,  $z = v + iu$ ,  $u > 0$ , то положим

$$z_{m_1, m_2} = \frac{\alpha z + \beta}{m_1 z + m_2} = v_{m_1, m_2} + i u_{m_1, m_2}, \quad (2.4)$$

где  $\alpha m_2 - \beta m_1 = 1$ . Отметим, что  $u_{m_1, m_2}$  не зависит от выбора чисел  $\alpha, \beta$  и, таким образом, однозначно определяется целыми числами  $m_1$  и  $m_2$ . Что касается  $v_{m_1, m_2}$ , то оно определено по  $\text{mod } 1$ . Величина  $a$  в новых обозначениях принимает вид

$$a = \frac{m^2}{u_{\mathcal{D}_2, -\mathcal{D}_1}}.$$

Рассмотрим сначала часть суммы в (2.3) с  $m=0$ . Она равна

$$\frac{1}{2} y^{\frac{2\delta_1 + \delta_2}{3}} \sum_{\substack{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 = -\infty \\ (\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = 1}}^{\infty} \frac{u^{\delta_2}}{(u^2 \mathcal{D}_2^2 + (\mathcal{D}_1 - v \mathcal{D}_2)^2)^{\delta_2}} = y^{\frac{2\delta_1 + \delta_2}{3}} E(z, \delta_2). \quad (2.5)$$

Здесь  $E(z, \delta)$  - ряд Эйзенштейна для группы  $SL(2, \mathbb{R})$ , автоморфный относительно  $SL(2, \mathbb{Z})$ ; его разложение Фурье дается формулой (0.4).

Рассмотрим теперь случай  $m \neq 0$ . Напомним, что на протяжении этого параграфа мы считаем, что  $\text{Re } \delta_1, \text{Re } \delta_2 > 1$ . Мы можем, таким образом, применить к сумме по  $c_3$  формулу суммирования Пуассона:

$$\sum_{c_3=-\infty}^{\infty} \left( a + \frac{1}{y} (b + c_3)^2 \right)^{-s_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} f(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n t}}{\left( a + \frac{1}{y} (b+t)^2 \right)^{s_1}} dt = \\ &= \sqrt{y} a^{\frac{1}{2}-s_1} e^{2\pi i n b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n \sqrt{y} t}}{(t^2+1)^{s_1}} dt \end{aligned}$$

Если  $n=0$ , то по формуле (I.2I) имеем

$$f(0) = \sqrt{\pi y} a^{\frac{1}{2}-s_1} \frac{\Gamma(s_1 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_1)}$$

и слагаемые с  $n \neq 0$  дают следующий вклад в сумму (2.3)

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi} y^{\frac{1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{3}} \Gamma(s_1 - \frac{1}{2})}{2\zeta(2s_1) \Gamma(s_1)} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 = -\infty \\ (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 1}}^{\infty} \frac{m^{1-2s_1} u^{s_3}}{(u^2 \mathfrak{D}_2^2 + (\mathfrak{D}_1 - \nu \mathfrak{D}_2)^2)^{s_3}} = \\ &= y^{\frac{1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{3}} c(s_1) E(\alpha, s_3). \end{aligned} \quad (2.7)$$

В случае  $n \neq 0$  лемма 5 дает

$$f(n) = \frac{2\pi^{s_1}}{\Gamma(s_1)} |n|^{s_1 - \frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4} + \frac{s_2}{2}} a^{\frac{1}{4} - \frac{s_1}{2}} K_{s_1 - \frac{1}{2}}(2\pi n \sqrt{ay}) e^{2\pi i n b},$$

и часть суммы в (2.3), распространенная на слагаемые с  $n \neq 0$ , равна

$$\begin{aligned} & \frac{y^{\frac{1}{4} + \frac{s_1 + 2s_2}{6}}}{2\zeta(2s_1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 = -\infty \\ (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) = 1}}^{\infty} |n|^{s_1 - \frac{1}{2}} |m|^{\frac{1}{2} - s_1} u^{\frac{s_1 + s_2 - 1}{4}} \times \\ & \times K_{s_1 - \frac{1}{2}}(2\pi |mn| \sqrt{\frac{y}{u_{\mathfrak{D}_2, -\mathfrak{D}_1}}}) e^{2\pi i n m (\mathfrak{D}_2 \alpha_1 - \mathfrak{D}_1 \alpha_2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y^{\frac{1}{4} + \frac{s_1 + 2s_2}{6}}}{\xi(2s_1)} \sum_{d=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{m_1, m_2 = -\infty \\ (m_1, m_2) = 1}}^{\infty} |d|^{\frac{s_1 - 1}{2}} \sigma_{1-2s_1}(|d|) u_{m_1, m_2}^{\frac{s_1 + 2s_2}{2} - \frac{1}{4}} x \\
&\times K_{\frac{s_1 - 1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} \right) e^{2\pi i d (m_1 x_1 + m_2 x_2)} = \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2y^{\frac{1}{4} + \frac{s_1 + 2s_2}{6}}}{\xi(2s_1)} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} d^{\frac{s_1 - 1}{2}} \sigma_{1-2s_1}(d) u_{m_1, m_2}^{\frac{s_1 + 2s_2}{2} - \frac{1}{4}} x \\
&\times K_{\frac{s_1 - 1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} \right) e^{2\pi i d (m_1 x_1 + m_2 x_2)},
\end{aligned}$$

где  $d = (m_1, m_2) > 0$ ,  $u_{m_1, m_2} = \frac{u_{m_1}}{d} \frac{m_2}{d}$  по определению. Таким образом,  $E_1(Y; s_1, s_2)$  представляется в виде суммы трех слагаемых, которые задаются формулами (2.5), (2.7) и (2.8):

$$\begin{aligned}
E_1(Y; s_1, s_2) &= y^{\frac{2s_1 + s_2}{3}} E(z, s_2) + y^{\frac{1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{3}} c(s_1) E(z, s_3) + \\
&+ \frac{2y^{\frac{s_1 + 2s_2}{6} + \frac{1}{4}}}{\xi(2s_1)} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} u_{m_1, m_2}^{\frac{s_1 + 2s_2}{2} - \frac{1}{4}} d^{\frac{s_1 - 1}{2}} \sigma_{1-2s_1}(d) x \tag{2.9} \\
&\times K_{\frac{s_1 - 1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} \right) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}
\end{aligned}$$

Формула (2.9) показывает, что с аналитической и арифметической точек зрения ряд  $E_1(Y; \delta_1, \delta_2)$  индуцируется с группы  $SL(2, \mathbb{R})$ . Характерные свойства группы  $SL(3, \mathbb{R})$  проявляются в слагаемом  $E_2(Y; \delta_1, \delta_2)$ , к рассмотрению которого мы и переходим. Из формулы (1.6) получаем, что

$$\begin{aligned}
 E_2(Y; \delta_1, \delta_2) &= y^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{3}} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_{\infty}^{\backslash} \Gamma \\ \mathfrak{D}_3 \neq 0}} f(\gamma, Y, \delta_1, \delta_2) = \\
 &= \frac{1}{4} y^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{3}} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_{\infty}^{\backslash} \Gamma \\ \mathfrak{D}_3 \neq 0}} \sum_{\sigma \in \mathbb{N}} f(\gamma \sigma, Y, \delta_1, \delta_2) = \quad (2.10) \\
 &= \frac{1}{4} y^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{3}} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_{\infty}^{\backslash} \Gamma \\ \mathfrak{D}_3 \neq 0}} \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} f(\gamma, y, u, v, x_1 + n_1, x_2 + n_2, \delta_1, \delta_2).
 \end{aligned}$$

Применим к внутренней сумме в выражении (2.10) формулу суммирования Пуассона; мы получим, что

$$\begin{aligned}
 E_2(Y, \delta_1, \delta_2) &= \frac{y^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{3}}}{4} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_{\infty}^{\backslash} \Gamma \\ \mathfrak{D}_3 \neq 0}} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} g(\gamma, Y, m_1, m_2, \delta_1, \delta_2) \times \\
 &\quad \times e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 g(\gamma, Y, m_1, m_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u c_1^2 + \frac{1}{u} (c_1 v + c_2)^2 + \frac{1}{y} (c_1 t_1 + c_2 t_2 + c_3)^2)^{-\delta_1} \times \\
 &\quad \times \left( \frac{1}{u} (\mathfrak{D}_1 - v \mathfrak{D}_2 - (t_1 - v t_2) \mathfrak{D}_3)^2 + u (\mathfrak{D}_2 - t_2 \mathfrak{D}_3)^2 + y \mathfrak{D}_3^2 \right)^{-\delta_2} \times \\
 &\quad \times e^{-2\pi i(m_1 t_1 + m_2 t_2)} dt_1 dt_2 = e^{-\frac{2\pi i}{\mathfrak{D}_3}(m_1 \mathfrak{D}_1 + m_2 \mathfrak{D}_2)} | \mathfrak{D}_3 |^{-2\delta_2} \times
 \end{aligned}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (uc_1^2 + \frac{1}{u}(c_1v + c_2)^2 + \frac{1}{y}(c_1t_1 + c_2t_2)^2)^{-s_1} \times \\ \times (y + ut_2^2 + \frac{1}{u}(t_1 - vt_2)^2)^{-s_2} e^{-2\pi i(m_1t_1 + m_2t_2)} dt_1 dt_2. \quad (2.12)$$

При преобразовании формулы (2.12) мы совершили замену переменных  $t_1 \rightarrow t_1 + \frac{D_1}{D_3}$ ,  $t_2 \rightarrow t_2 + \frac{D_2}{D_3}$  и использовали условие (I.9).

Параметризация двойных классов дается леммой 2: к условиям леммы I добавляются ограничения  $D_1, D_2 \pmod{D_3}$ .

Избавляясь с помощью леммы 4 от условий  $(c_1, c_2, c_3) = 1$ ,  $(D_1, D_2, D_3) = 1$ , получим, что

$$E_2(Y; s_1, s_2) = \frac{y^{\frac{s_2 - s_1}{3}}}{4\zeta(2s_1)\zeta(2s_2)} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \sum'_{c_1, c_2, c_3 = -\infty}^{\infty}$$

$$\sum_{\substack{c_1 D_1 + c_2 D_2 + c_3 D_3 = 0 \\ D_3 \neq 0, D_1, D_2 \pmod{D_3}}} |D_3|^{-2s_2} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{D_3}(m_1 D_1 + m_2 D_2)\right\} \times$$

$$\times g(y, Y, m_1, m_2, s_1, s_2) e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \quad (2.13)$$

Зафиксируем числа  $m_1, m_2, c_1, c_2$  и  $D_3$ . Условия

$c_1 D_1 + c_2 D_2 + c_3 D_3 = 0$ ,  $D_1, D_2 \pmod{D_3}$  означают, что числа  $D_1, D_2$  находятся из сравнения

$$c_1 D_1 + c_2 D_2 \equiv 0 \pmod{D_3}, \quad (2.14)$$

а

$$c_3 = -\frac{c_1 D_1 + c_2 D_2}{D_3}$$

Найдем теперь все решения сравнения (2.14). Пусть

$$d = (c_1, c_2, D_3), \quad c_1 = c'_1 d, \quad c_2 = c'_2 d, \quad D_3 = D'_3 d,$$

$$d_1 = (c'_1, D'_3), \quad d_2 = (c'_2, D'_3).$$

Имеем  $(d_1, d_2) = 1$  и  $c'_1 D_1 + c'_2 D_2 \equiv 0 \pmod{D'_3}$ ,

откуда следует, что  $d_1 | D_2$  и  $d_2 | D_1$ . Положим

$$c'_1 = \tilde{c}_1 d_1, c'_2 = \tilde{c}_2 d_2, D_1 = \tilde{D}_1 d_2, D_2 = \tilde{D}_2 d_1, D_3 = \tilde{D}_3 d_1 d_2.$$

Сравнение (2.14) примет вид

$$\tilde{c}'_1 \tilde{D}_1 + \tilde{c}'_2 \tilde{D}_2 \equiv 0 \pmod{\tilde{D}_3}, \quad (2.15)$$

где  $(\tilde{c}'_1, \tilde{D}_3) = 1$ , а числа  $\tilde{D}_1$  и  $\tilde{D}_2$  пробегает полные системы вычетов по модулям  $\tilde{D}_3 d d_1$  и  $\tilde{D}_3 d d_2$  соответственно (мы считаем, что  $D_3 > 0$ ). Решения сравнения (2.15) имеют вид

$$\tilde{D}_1 = -\tilde{c}'_1 \tilde{c}'_2 D \pmod{\tilde{D}_3}, \quad \tilde{D}_2 \equiv D \pmod{\tilde{D}_3},$$

где  $D$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $\tilde{D}_3$ , а

$$\tilde{c}'_1 \tilde{c}'_2 \equiv 1 \pmod{\tilde{D}_3}.$$

Таким образом, все решения сравнения (2.14) даются следующими выражениями:

$$D_1 = -\tilde{c}'_1 \tilde{c}'_2 d_2 D + \kappa d_2 \tilde{D}_3, \quad D_2 = d_1 D + \ell d_1 \tilde{D}_3,$$

где  $\kappa \pmod{d d_1}$ ,  $\ell \pmod{d d_2}$ . Теперь мы можем в формуле (2.13) произвести суммирование по  $D_1$  и  $D_2$ . Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{\substack{D_1, D_2 \pmod{D_3} \\ c'_1 D_1 + c'_2 D_2 \equiv 0 \pmod{D_3}}} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{D_3} (m_1 D_1 + m_2 D_2)\right\} = \sum_{D \pmod{\tilde{D}_3}}$$

$$\sum_{\kappa \pmod{d d_1}} \sum_{\ell \pmod{d d_2}} \exp\left\{-\frac{2\pi i}{d d_1 d_2 \tilde{D}_3} (m_1 \kappa d_2 \tilde{D}_3 - m_1 \tilde{c}'_1 \tilde{c}'_2 d_2 D + m_2 d_1 D + m_2 \ell d_1 \tilde{D}_3)\right\}.$$

Внутренняя сумма по  $\kappa$  и  $\ell$  отлична от нуля, только если  $d d_1 | m_1$ ,  $d d_2 | m_2$ ; в этом случае она равна  $d_1 d_2 d^2$ . Положим

$$m_1 = \tilde{m}_1 d d_1, \quad m_2 = \tilde{m}_2 d d_2, \quad m'_1 = \tilde{m}'_1 d_1, \quad m'_2 = \tilde{m}'_2 d_2.$$

Сумма по  $D$  будет отлична от нуля только в случае

$$\tilde{m}_2 - \tilde{c}'_1 \tilde{c}'_2 \tilde{m}_1 \equiv 0 \pmod{\tilde{D}_3},$$

т.е. когда

$$\tilde{c}'_1 \tilde{m}_2 - \tilde{c}'_2 \tilde{m}_1 \equiv 0 \pmod{\tilde{D}_3}.$$

Таким образом, получаем, что сумма  $S$  не равна нулю только при условии  $d | m_1$ ,  $d | m_2$  и

$$c'_1 \frac{m_2}{d} - c'_2 \frac{m_1}{d} \equiv 0 \pmod{D_3};$$

в этом случае она равна  $d\mathcal{D}_3$ .

Формула (2.13) теперь приобретает вид

$$E_2(Y; s_1, s_2) = \frac{y^{\frac{s_2-s_1}{3}}}{2\zeta(2s_1)\zeta(2s_2)} \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{D}_3=1}^{\infty} \sum_{\substack{c_1, c_2=-\infty \\ (c_1, c_2, \mathcal{D}_3)=1 \\ c_1 m_2 - c_2 m_1 = 0 \pmod{\mathcal{D}_3}}}^{\infty} d^{1-2s_3} \mathcal{D}_3^{1-2s_2} g(y, Y, dm_1, dm_2, s_1, s_2) e^{2\pi i d(m_1 x_1 + m_2 x_2)} = \quad (2.16)$$

$$= \frac{y^{\frac{s_2-s_1}{3}}}{2\zeta(2s_1)\zeta(2s_2)\zeta(2s_3)} \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\mathcal{D}_3=1}^{\infty}$$

$$\sum_{\substack{c_1, c_2=-\infty \\ c_1 m_2 - c_2 m_1 = 0 \pmod{\mathcal{D}_3}}}^{\infty} d^{1-2s_3} \mathcal{D}_3^{1-2s_2} g(y, Y, dm_1, dm_2, s_1, s_2) e^{2\pi i d(m_1 x_1 + m_2 x_2)}$$

Рассмотрим сначала слагаемые в формуле (2.16) с  $m_1 = m_2 = 0$ .  
Внутренняя сумма в (2.16) есть

$$\sum_{c_1, c_2=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( u c_1^2 + \frac{1}{u} (c_1 v + c_2)^2 + \frac{1}{y} (c_1 t_1 + c_2 t_2)^2 \right)^{-s_1} \times \quad (2.17)$$

$$x \left( y + u t_2^2 + \frac{1}{u} (t_1 - v t_2)^2 \right)^{-s_2} dt_1 dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty}$$

$$(a n_1^2 + b n_1 n_2 + c n_2^2)^{-s_1} \left( y + u t_2^2 + \frac{1}{u} (t_1 - v t_2)^2 \right)^{-s_2} dt_1 dt_2,$$

где коэффициенты  $a, b, c$  имеют вид

$$a = \frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}, \quad b = 2\left(\frac{v}{u} + \frac{t_1 t_2}{y}\right), \quad c = u + \frac{v^2}{u} + \frac{t_1^2}{y},$$

$$\Delta = 4ac - b^2 = 4\left(1 + \frac{u}{y}t_2^2 + \frac{1}{uy}(t_1 - vt_2)^2\right).$$

Сумма в формуле (2.17) представляет собой дзета-функцию Эшштейна квадратичной формы  $ax^2 + bxy + cy^2$ . Используя лемму 3, получим, что

$$\sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(an_1^2 + bn_1n_2 + cn_2^2)^{s_1}} = 2\zeta(2s_1)\left(\frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}\right)^{-s_1} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{\pi}\zeta(2s_1-1)\Gamma(s_1-\frac{1}{2})}{\Gamma(s_1)}\left(\frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}\right)^{s_1-1}\left(1 + \frac{u}{y}t_2^2 + \frac{1}{uy}(t_1 - vt_2)^2\right)^{\frac{1}{2}-s_1} +$$

$$+ \frac{4\pi^{s_1}}{\Gamma(s_1)}\left(\frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{u}{y}t_2^2 + \frac{1}{uy}(t_1 - vt_2)^2\right)^{\frac{1}{4}-\frac{s_1}{2}} \quad (2.18)$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{s_1-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s_1}(|n|) K_{s_1-\frac{1}{2}}(2\pi|n| \frac{\sqrt{1 + \frac{u}{y}t_2^2 + \frac{1}{uy}(t_1 - vt_2)^2}}{\frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}}) \times$$

$$\times \exp\left\{2\pi i n \frac{\frac{v}{u} + \frac{t_1 t_2}{y}}{\frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}}\right\}$$

Подставим выражение (2.18) в формулу (2.17). Для нахождения вклада первого слагаемого формулы (2.18) в (2.17), вычислим интеграл

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}\right)^{-s_1} (y + ut_2^2 + \frac{1}{u}(t_1 - vt_2)^2)^{-s_2} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{(uy)^{s_1} \sqrt{\pi u} \Gamma(s_2 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_2)} \int_{-\infty}^{\infty} (y + ut_2^2)^{-s_3} dt_2 =$$

$$= u^{s_1} y^{1-s_2} \pi \cdot \frac{\Gamma(s_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(s_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_2) \Gamma(s_3)}$$

Здесь мы дважды использовали лемму 6. Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y} \right)^{\delta_1 - 1} \left( y + ut_2^2 + \frac{1}{u} (t_1 - vt_2)^2 \right)^{-\delta_3} dt_1 dt_2 =$$

$$= \pi u^{1-\delta_1} y^{1-\delta_3} \frac{\Gamma(\delta_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)}$$

Таким образом, вклад первых двух слагаемых выражения (2.18) в формулу (2.17) равен

$$2u^{\delta_1} y^{1-\delta_2} \pi \zeta(2\delta_1) \frac{\Gamma(\delta_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} +$$

$$+ 2u^{1-\delta_1} y^{1-\delta_2} \pi^{\frac{3}{2}} \zeta(2\delta_1 - 1) \frac{\Gamma(\delta_1 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_1) \Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.16), получим

$$u^{\delta_1} y^{1-\frac{\delta_1+2\delta_2}{3}} c(\delta_2) c(\delta_3) + u^{1-\delta_1} y^{1-\frac{\delta_1+2\delta_2}{3}} c(\delta_1) c(\delta_2) c(\delta_3). \quad (2.19)$$

Рассмотрим теперь вклад от третьего слагаемого формулы (2.18).

Нам нужно вычислить интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( y + \frac{1}{u} (t_1 - vt_2)^2 + ut_2^2 \right)^{\frac{1}{4} - \frac{\delta_1}{2} - \delta_2} \left( \frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y} \right)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times K_{\delta_1 - \frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi |n| \sqrt{1 + \frac{(t_1 - vt_2)^2}{uy} + \frac{u}{y} t_2^2}}{\frac{1}{u} + \frac{1}{y} t_2^2}} \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ 2\pi i n \frac{\frac{v}{u} + \frac{t_1 t_2}{y}}{\frac{1}{u} + \frac{1}{y} t_2^2} \right\} dt_1 dt_2,$$

который по лемме 8 равен

$$\pi \sqrt{u} y^{\frac{5}{4} - \frac{\delta_1}{2} - \delta_2} \frac{\Gamma(\delta_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} K_{\delta_1 - \frac{1}{2}}(2\pi |n| u) e^{2\pi i n v}$$

Таким образом, вклад от последнего слагаемого формулы (2.18) в (2.16) есть

$$\frac{2\sqrt{u} y^{1-\frac{\delta_1+2\delta_2}{3}}}{\xi(2\delta_1)} c(\delta_2) c(\delta_3) \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m|^{\delta_1 - \frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_1}(|m|) \times \quad (2.20)$$

$$x K_{\frac{3}{2}}(2\pi|u|e^{2\pi i m v})$$

Собирая вместе формулы (2.19) и (2.20), заключаем, что сумма слагаемых в (2.16) с  $m_1 = m_2 = 0$  равна:

$$y^{1 - \frac{2+2s_2}{3}} c(s_2) c(s_3) E(z, s_1). \quad (2.21)$$

Перейдем к вычислению оставшейся части в (2.16) - сумме, распространенной на слагаемые с  $m_1^2 + m_2^2 > 0$ . Зафиксируем  $m_1, m_2, \mathcal{D}_3$  и найдем все решения сравнения

$$c_1 m_2 - c_2 m_1 \equiv 0 \pmod{\mathcal{D}_3}. \quad (2.22)$$

Пусть  $d' = (m_1, m_2, \mathcal{D}_3)$ . Положим

$$m_1 = m'_1 d', \quad m_2 = m'_2 d', \quad \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}'_3 d', \quad m' = (m'_1, m'_2), \quad m = (m_1, m_2).$$

Записав сравнение (2.22) в виде

$$c_1 m'_2 - c_2 m'_1 = c \mathcal{D}'_3,$$

заключаем, что  $m' | c$ , т.е.  $c = n_2 m'$ . Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  таковы, что  $\alpha m'_2 - \beta m'_1 = m'$ ; тогда

$$n_2 \alpha \mathcal{D}'_3 m'_2 - n_2 \beta \mathcal{D}'_3 m'_1 = c \mathcal{D}'_3.$$

Следовательно, общее решение сравнения (2.22) есть

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{m'_1}{m'} n_1 + \alpha \mathcal{D}'_3 n_2, \\ c_2 &= \frac{m'_2}{m'} n_1 + \beta \mathcal{D}'_3 n_2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ .

Внутренняя сумма в выражении (2.16) имеет вид

$$\sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (c_1^2 u + \frac{1}{u} (c_1 v + c_2)^2 + \frac{1}{y} (c_1 t_1 + c_2 t_2)^2)^{-s_1} x$$

$$x (y + \frac{1}{u} (t_1 - v t_2)^2 + u t_2^2)^{-s_2} e^{-2\pi i d(m_1 t_1 + m_2 t_2)} dt_1 dt_2 =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{Q(n_1, n_2)} \exp\left\{i\pi \left(y + \frac{1}{u}(t_1 - vt_2)^2 + ut_2^2\right)^2 x\right. \\ \left. \times e^{-2\pi i d(m_1 t_1 + m_2 t_2)}\right\} dt_1 dt_2, \quad (2.24)$$

где в переменных  $c_1, c_2$  квадратичная форма  $Q$  есть

$$C c_1^2 + B c_1 c_2 + A c_2^2, \\ C = u + \frac{v^2}{u} + \frac{t_1^2}{y}, \quad B = 2\left(\frac{v}{u} + \frac{t_1 t_2}{y}\right), \quad A = \frac{1}{u} + \frac{t_2^2}{y}, \\ \Delta = 4AC - B^2 = 4\left(1 + \frac{u}{y} t_2^2 + \frac{1}{uy}(t_1 - vt_2)^2\right),$$

а  $c_1$  и  $c_2$  связаны с  $n_1$  и  $n_2$  формулами (2.23). Далее, в переменных  $n_1, n_2$

$$Q(n_1, n_2) = A_1 n_1^2 + B n_1 n_2 + C n_2^2,$$

$$A_1 = \frac{u^2 l_1^2 + (l_1 v + l_2)^2}{u} + \frac{1}{y} (l_1 t_1 + l_2 t_2)^2,$$

$$B_1 = 2\mathcal{D}'_3 \left( \frac{l_1 \alpha (u^2 + v^2) + (\beta l_1 + \alpha l_2) v + \beta l_2 +}{u} + \right. \\ \left. + \frac{1}{y} (l_1 \alpha t_1^2 + (\alpha l_2 + \beta l_1) t_1 t_2 + \beta l_2 t_2^2) \right),$$

$$\Delta_1 = \mathcal{D}'_3{}^2 \Delta.$$

Здесь  $m'_1 = l_1 m'$ ,  $m'_2 = l_2 m'$ ,  $(l_1, l_2) = 1$ . Положим  $x' = x_{m'_1, m'_2}$ . Тогда первые слагаемые в  $A_1$  и  $B_1$  равны соответственно  $\frac{1}{u}$  и  $\frac{v}{u}$ . Далее, применив к сумме по  $n_1, n_2$  лемму 3, представим ее в виде суммы трех слагаемых и подставим их выражения в формулу (2.24). Для вычисления возникающих интегралов удобно совершить в них замену переменных

$$t_1 = l_2 x_1 - \beta x_2, \\ t_2 = -l_1 x_1 + \alpha x_2. \quad (2.25)$$

При этой замене  $\exp\{-2\pi i d(m_1 t_1 + m_2 t_2)\}$  перейдет в  $\exp\{-2\pi i d m x_2\}$ ,  $A_1$  перейдет в  $\frac{1}{u} + \frac{x_2^2}{y}$ , а  $B_1$  перейдет в  $2\mathcal{D}'_3\left(\frac{v}{u} + \frac{x_1 x_2}{y}\right)$ . Дискриминант  $\Delta_1$  примет вид

$$4\mathcal{D}_3^2 \left(1 + \frac{u'}{y} x_2^2 + \frac{1}{u'y} (x_1 - v'x_2)^2\right).$$

Вычислим вклад в формулу (2.24) от первого слагаемого внутренней суммы, которое равно

$$2\zeta(2s_1) A_1^{-s_1}.$$

Соответствующий интеграл есть

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{u'} + \frac{x_2^2}{y}\right)^{-s_1} \left(y + \frac{1}{u'}(x_1 - v'x_2)^2 + u'x_2^2\right)^{-s_2} e^{-2\pi i d m x_2} dx_1 dx_2 = \\ & = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s_2 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_2)} u'^{s_1 + \frac{1}{2}} y^{s_1} \int_{-\infty}^{\infty} (y + u'x_2^2)^{-s_3} e^{-2\pi i d m x_2} dx_2 = \\ & = \frac{2\pi^{s_1 + s_2} u'^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{2}} y^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{2}} (dm)^{s_3 - \frac{1}{2}} \Gamma(s_2 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_2) \Gamma(s_3)} K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d m) \sqrt{\frac{y}{u'}}. \end{aligned}$$

Подставив найденное выражение для первого слагаемого в формулу (2.16), получим

$$\begin{aligned} & \frac{2y^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(s_2 - \frac{1}{2})}{\zeta(2s_2) \xi(2s_2) \Gamma(s_2)} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{d'_3=1}^{\infty} \sum_{\substack{m'=1 \\ (m', d'_3)=1}}^{\infty} \sum_{d'=1}^{\infty} \\ & \sum_{\substack{l_1, l_2 = -\infty \\ (l_1, l_2)=1}}^{\infty} d^{1-2s_3} d'^{1-2s_2} \mathcal{D}_3^{1-2s_2} (d d' m')^{s_3 - \frac{1}{2}} \times \\ & \times u_{l_1, l_2}^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{2}} \Phi(Y, l_1, l_2, d d' m'), \end{aligned}$$

где

$$\Phi(Y, l_1, l_2, dd'm') = K_{\delta_3 - \frac{1}{2}} (2\pi dd'm' \sqrt{\frac{y}{u_{l_1, l_2}}}) \times \\ \times e^{2\pi i dd'm' (l_1 x_1 + l_2 x_2)}$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{d'_3=1}^{\infty} \sum_{\substack{m'=1 \\ (m', d'_3)=1}}^{\infty} \sum_{d'=1}^{\infty} d^{1-2\delta_3} d'^{1-2\delta_2} D_3^{1-2\delta_2} \times \\ \times (dd'm')^{\delta_3 - \frac{1}{2}} \Phi(dd'm') = \zeta(2\delta_1 - 1) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \\ \sum_{d'=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d^{1-2\delta_3} (d'n)^{\frac{1}{2} - 2\delta_2 + \delta_3} (dm')^{\delta_3 - \frac{1}{2}} \mu(n) \Phi(dm'd'n) = \\ = \zeta(2\delta_2 - 1) \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} d^{1-2\delta_3} (dm')^{\delta_3 - \frac{1}{2}} \Phi(dm')$$

Таким образом, получаем, что первое слагаемое вносит в (2.16) вклад

$$\frac{2c(\delta_2) y^{\frac{1}{2} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{6}}}{\xi(2\delta_3)} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} d^{\delta_3 - \frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_3}(d) u_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{2}} \times \\ \times K_{\delta_3 - \frac{1}{2}} (2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}}) e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2)}, \quad (2.26)$$

где теперь  $d = (m_1, m_2) > 0$ . Второе слагаемое в разложении Фурье дзета-функции Эшштейна квадратичной формы  $Q(n_1, n_2)$  имеет вид

$$\frac{\sqrt{\pi} 2^{2\delta_1} A^{\delta_1 - 1} \zeta(2\delta_1 - 1) \Gamma(\delta_1 - \frac{1}{2})}{\Delta_1^{\delta_1 - \frac{1}{2}} \Gamma(\delta_1)}$$

Возникающий в этом случае интеграл равен

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{u'} + \frac{x_2^2}{y} \right)^{\delta_1 - 1} \left( y + \frac{1}{u'} (x_1 - v' x_2)^2 + u' x_2^2 \right)^{-\delta_3} \times$$

$$\times \exp\{-2\pi i d m x_2\} dx_1 dx_2 = \frac{2\pi^{\frac{1}{2} + \delta_2} \Gamma(\delta_3 - \frac{1}{2})}{\Gamma(\delta_2) \Gamma(\delta_3)} u'^{\frac{5}{4} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{2}} \times$$

$$\times y^{\frac{5}{4} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{2}} (dm)^{\delta_2 - \frac{1}{2}} K_{\delta_2 - \frac{1}{2}} \left( 2\pi dm \sqrt{\frac{y}{u'}} \right).$$

Соответствующие арифметические коэффициенты имеют вид

$$\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{\substack{d'=1 \\ (m', d_3)=1}}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{1-2\delta_3} d'^{1-2\delta_2} \mathfrak{D}_3^{2-2\delta_1-2\delta_2} \times$$

$$\times (d d' m')^{\delta_2 - \frac{1}{2}} \Phi(d d' m') = \zeta(2\delta_3 - 1) \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{d'=1}^{\infty}$$

$$\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) (dn)^{\frac{1}{2} + \delta_2 - 2\delta_3} d'^{1-2\delta_2} (d' m')^{\delta_2 - \frac{1}{2}} \times$$

$$\times \Phi(d n d' m') = \zeta(2\delta_3 - 1) \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{d'=1}^{\infty} d'^{1-2\delta_2} \times$$

$$\times (d' m')^{\delta_2 - \frac{1}{2}} \Phi(d' m').$$

Окончательно получаем, что вклад от этого слагаемого в формулу (2.16) выглядит следующим образом

$$\frac{2c(\delta_1) c(\delta_3)}{\xi(2\delta_2)} y^{\frac{5}{4} - \frac{2\delta_1 + \delta_2}{6}} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} d^{\delta_2 - \frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_2}(d) \times \quad (2.27)$$

$$\times u^{\frac{\sqrt{y}}{4} - \frac{2s_1 + s_2}{2}} K_{s_2 - \frac{1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u}} \right) e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}$$

Теперь нам осталось рассмотреть вклад от последнего слагаемого разложения леммы 3 в формулу (2.16). Это слагаемое выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^2 2^{s_1 - \frac{1}{2}}}{\sqrt{A_1} \Delta_1^{\frac{s_1}{2} - \frac{1}{4}} \Gamma(s_1)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{s_1 - \frac{1}{2}} \sigma_{1-2s_1}(n) K_{s_1 - \frac{1}{2}} \left( \frac{\pi |n| \sqrt{\Delta_1}}{A_1} \right) e^{\pi i n \frac{B_1}{A_1}} = \\ & = \frac{4\pi^2 2^{s_1 - \frac{1}{2}}}{\sqrt{A_1} \Delta_1^{\frac{s_1}{2} - \frac{1}{4}} \Gamma(s_1)} \sum_{d_1=1}^{\infty} \sum_{d_2=-\infty}^{\infty} d_1^{\frac{1}{2} - s_1} |d_2|^{s_1 - \frac{1}{2}} \times \\ & \times K_{s_1 - \frac{1}{2}} \left( \frac{\pi d_1 |d_2| \sqrt{\Delta_1}}{A_1} \right) e^{\pi i d_1 d_2 \frac{B_1}{A_1}} \end{aligned}$$

Для вычисления возникающего здесь интеграла нами была ранее доказана лемма 7. Этот интеграл после замены  $x_1 \rightarrow x_2 + v' x_2$ , которая позволяет сразу выделить множитель  $\exp\{2\pi i d_1 d_2 \mathcal{D}'_3 v'\}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{s_1 - \frac{1}{2}} \left( \frac{2\pi d_1 |d_2| \mathcal{D}'_3 \sqrt{1 + w y x_1^2 + \frac{w'}{y} x_2^2}}{\frac{1}{w} + \frac{1}{y} x_2^2} \right) \left( y + \frac{x_1^2}{w'} + \right. \\ & \left. + w' x_2^2 \right)^{\frac{1}{4} - \frac{s_1}{2} - s_2} \left( \frac{1}{w'} + \frac{x_2^2}{y} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{2\pi i d_1 d_2 \mathcal{D}'_3 x_1 x_2}{\frac{y}{w'} + x_2^2} - \right. \\ & \left. - 2\pi i d m x_2 \right\} dx_1 dx_2 = \\ & = \frac{2w^{\frac{1}{2} - \frac{s_1 - s_2}{2}} y^{\frac{3}{4} - \frac{s_2}{2}} \pi^{s_3 + s_2}}{\Gamma(s_2) \Gamma(s_3)} d_1^{s_2 - \frac{1}{2}} |d_2|^{s_2 - \frac{1}{2}} \mathcal{D}'_3{}^{s_2 - \frac{1}{2}} (dm)^{s_3 - \frac{1}{2}} \times \end{aligned}$$

$$x \int_0^{\infty} K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d_1 |d_2| \mathcal{D}'_3 u' \sqrt{1+x}) K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d m' \sqrt{\frac{y}{u'}(1+\frac{1}{x})}) x^{\frac{s_2 - s_1}{2}} \frac{dx}{x}$$

Здесь мы использовали лемму 7. Таким образом, оставшаяся часть суммы в формуле (2.16) принимает вид

$$\frac{4y^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{6}}}{\xi(2s_1)\xi(2s_2)\xi(2s_3)} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{d'=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \sum_{\substack{m'_1, m'_2 = -\infty \\ (m'_1, m'_2) = m'}}^{\infty} \sum_{d_1=1}^{\infty}$$

$$\sum_{d_2=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\mathcal{D}'_3 = 1 \\ (\mathcal{D}'_3, m') = 1}}^{\infty} d_1^{\frac{1}{2} - s_3} d_2^{s_1 - s_2} m_1^{s_3 - \frac{1}{2}} d_1^{s_2 - s_1} |d_2|^{\frac{1}{2} - s_2} \mathcal{D}'_3{}^{\frac{1}{2} - s_3} x$$

$$x u_{m'_1, m'_2}^{\frac{1}{2} + \frac{s_2 - s_1}{2}} \int_0^{\infty} K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d_1 |d_2| \mathcal{D}'_3 u_{m'_1, m'_2} \sqrt{1+x}) K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d x$$

$$x d' m' \sqrt{\frac{y}{u_{m'_1, m'_2}}(1+\frac{1}{x})}) x^{\frac{s_2 - s_1}{2}} \frac{dx}{x} \exp\{2\pi i d d' (m'_1 x_1 + m'_2 x_2) +$$

$$+ 2\pi i d_1 d_2 \mathcal{D}'_3 u_{m'_1, m'_2}\} = \frac{4y^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{6}}}{\xi(2s_1)\xi(2s_2)\xi(2s_3)} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty}$$

$$\sum_{m_3 = -\infty}^{\infty} d_3^{\frac{1}{2} - s_3} \sum_{d_2 | \frac{d}{d_1}} \sum_{d_1 | d} d_1^{1 - 2s_3} d_2^{1 - 2s_2} |m_3|^{\frac{1}{2} - s_3} \sigma_{1 - 2s_1, 1 - 2s_3}(\frac{d}{d_1 d_2}, |m_3|) x$$

$$\begin{aligned}
& \times u_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2} - \frac{s_1 - s_2}{2}} \int_0^{\infty} K_{s_3 - \frac{1}{2}} (2\pi |m_3| u_{m_1, m_2} \sqrt{1+x}) \times \\
& \times K_{s_3 - \frac{1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} (1 + \frac{1}{x}) \right) \mathfrak{F}^{\frac{s_2 - s_1}{2}} \frac{dx}{x} \times \\
& \times e^{2\pi i (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 v_{m_1, m_2})},
\end{aligned} \tag{2.28}$$

где  $d = (m_1, m_2)$ . При выводе формулы (2.28) мы обозначили  $d'dm'_1$  через  $m_1$ ,  $d'dm'_2$  через  $m_2$ ,  $d_1 d_2 D'_3$  через  $m_3$ . Таким образом,  $d$  в новых обозначениях соответствует  $d'dm'$  в предыдущем равенстве формулы (2.28).

Напомним, что если  $z = v + iw$ ,  $d = (m_1, m_2)$ , то

$$\mathcal{T}_{m_1, m_2} = \begin{pmatrix} d & \beta \\ m_1 & m_2 \\ d & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

и

$$z_{m_1, m_2} = v_{m_1, m_2} + iw_{m_1, m_2} = \mathcal{T}_{m_1, m_2}(z),$$

где  $\mathcal{T}(z)$  - обычное действие  $SL(2, \mathbb{R})$  на верхней полуплоскости. Теоретико-числовая функция  $\sigma_{d, \beta}(n, m)$  определяется формулой (0.7), т.е.

$$\sigma_{d, \beta}(n, m) = \sum_{\substack{d_1 | m, \\ d_1 > 0}} \sum_{\substack{d_2 | \frac{m}{d_1}, \\ d_2 > 0, \\ (d_2, n) = 1}} d_1^\alpha d_2^\beta.$$

Отметим, что в разложении (2.28) отражена специфика группы  $SL(3, \mathbb{R})$  - сумма по  $m_1, m_2$  представляет собой ряд Фурье, возникающий из-за инвариантности ряда Эйзенштейна относительно унипотентной подгруппы  $N$ , то есть из-за периодичности по  $x_1$  и  $x_2$ . Внутренняя сумма по  $m_3$  характеризует некоммутативность параболической подгруппы  $\Gamma_\infty$ : коэффициенты Фурье с индексами  $m_1$  и  $m_2$  внешнего ряда Фурье по  $x_1, x_2$  являются периодическими функциями от  $v_{m_1, m_2}$ .

Также укажем, что индукционный процесс Сельберга-Ленглендса находит в нашем случае свое аналитическое выражение в усреднении по классам  $\Gamma_{2\infty} / \Gamma_2$ , т.е. в суммировании по  $m_1$  и  $m_2$  и в действии элементов из  $\Gamma_{2\infty} / \Gamma_2$  на  $\mathfrak{z}$  и  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ . Здесь  $\Gamma_2 = SL(2, \mathbb{Z})$ , а  $\Gamma_{2\infty}$  — ее параболическая подгруппа. С арифметической стороны, как отмечалось во Введении, рассматриваемый нами случай характеризуется наличием коэффициентов  $\sigma_{\alpha, \beta}(n, m)$ .

Итак, наши вычисления подошли к концу. Объединяя формулы (2.21), (2.26)–(2.28), мы получим разложение Фурье ряда  $E_2(Y; \delta_1, \delta_2)$ , что вместе с выражением (2.9) для  $E_1(Y; \delta_1, \delta_2)$  и дает искомое разложение Фурье ряда Эйзенштейна. Как уже отмечалось выше, это разложение доказано нами пока лишь при  $\text{Re } \delta_1, \text{Re } \delta_2 > 1$ . Но с его помощью мы докажем, что  $E(Y; \delta_1, \delta_2)$  допускает мероморфное продолжение на все пространство  $\mathbb{C}^2$ . Сформулируем теперь теорему, в которой мы, для удобства читателя, приведем в одном месте разложение Фурье ряда  $E(Y; \delta_1, \delta_2)$ .

**ТЕОРЕМА I.** Функция  $\tilde{E}(Y; \delta_1, \delta_2)$ , заданная при  $\text{Re } \delta_1, \text{Re } \delta_2 > 1$  равенством

$$\tilde{E}(Y; \delta_1, \delta_2) = \prod_{j=1}^3 (\delta_j - 1) \zeta(2\delta_j) E(Y; \delta_1, \delta_2),$$

является целой функцией двух комплексных переменных  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . При всех  $\delta_1$  и  $\delta_2$  имеет место формула (разложение Фурье ряда Эйзенштейна)

$$E(Y; \delta_1, \delta_2) = E_0(Y; \delta_1, \delta_2) + E_1(Y; \delta_1, \delta_2), \quad (2.29)$$

где  $E_0(Y; \delta_1, \delta_2)$  — "постоянный" член ряда Эйзенштейна относительно параболической подгруппы  $P_0$ :

$$\begin{aligned} E_0(Y; \delta_1, \delta_2) = & y^{\frac{2\delta_1 + \delta_2}{3}} u^{\delta_2} + c(\delta_1) y^{\frac{1}{2} + \frac{\delta_2 - \delta_1}{3}} u^{\delta_3} + \\ & + c(\delta_2) y^{\frac{2\delta_1 + \delta_2}{3}} u^{1 - \delta_2} + c(\delta_1) c(\delta_3) y^{\frac{1}{2} + \frac{\delta_2 - \delta_1}{3}} u^{1 - \delta_3} + \\ & + c(\delta_2) c(\delta_3) y^{1 - \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{3}} u^{\delta_1} + \\ & + c(\delta_1) c(\delta_2) c(\delta_3) y^{1 - \frac{\delta_1 + 2\delta_2}{3}} u^{1 - \delta_1}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

а  $E_1(Y; \delta_1, \delta_2)$  имеет вид

$$E_1(Y; \delta_1, \delta_2) = E_{11}(Y; \delta_1, \delta_2) + E_{12}(Y; \delta_1, \delta_2) + E_{13}(Y; \delta_1, \delta_2), \quad (2.31)$$

$$E_{11}(Y; \delta_1, \delta_2) = \frac{2y \frac{1-\delta_1+2\delta_2}{3} \sqrt{u}}{\xi(2\delta_1)} c(\delta_2) c(\delta_3) \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} '$$

$$|m_3|^{\delta_1-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_1}(|m_3|) K_{\delta_1-\frac{1}{2}}(2\pi|m_3|u) e^{2\pi i m_3 v} +$$

(2.32)

$$+ \frac{2y \frac{2\delta_1+\delta_2}{3} \sqrt{u}}{\xi(2\delta_2)} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} ' |m_3|^{\delta_2-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_2}(|m_3|) K_{\delta_2-\frac{1}{2}}(2\pi|m_3|u) \times$$

$$\times e^{2\pi i m_3 v} + \frac{2y^{\frac{1}{2}+\frac{\delta_2-\delta_1}{2}} \sqrt{u}}{\xi(2\delta_3)} c(\delta_1) \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} ' |m_3|^{\delta_3-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_3}(|m_3|) \times$$

$$\times K_{\delta_3-\frac{1}{2}}(2\pi|m_3|u) e^{2\pi i m_3 v};$$

$$E_{12}(Y; \delta_1, \delta_2) = \frac{2y^{\frac{1}{4}+\frac{\delta_1+2\delta_2}{6}}}{\xi(2\delta_1)} \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} d^{\delta_1-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_1}(d) \times$$

$$\times u^{\frac{\delta_1+2\delta_2}{2}-\frac{1}{4}} K_{\delta_1-\frac{1}{2}}(2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}}) e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} +$$

$$+ \frac{2y^{\frac{3}{4}-\frac{2\delta_1+\delta_2}{6}}}{\xi(2\delta_2)} c(\delta_1) c(\delta_3) \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} ' d^{\delta_2-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2\delta_2}(d) u^{\frac{5}{4}-\frac{2\delta_1+\delta_2}{2}} \times$$

(2.33)

$$\times K_{\delta_2-\frac{1}{2}}(2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}}) e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} +$$

$$+ \frac{2y^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{6}}}{\xi(2s_3)} c(s_2) \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} d^{s_3 - \frac{1}{2}} \sigma_{1-2s_3}(d) u_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{2}} \times$$

$$\times K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}}) e^{2\pi i(m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2)}$$

И, наконец,

$$E_{13}(Y; s_1, s_2) = \frac{4y^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{6}}}{\xi(2s_1)\xi(2s_2)\xi(2s_3)} \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty}$$

$$\sum_{m_3 = -\infty}^{\infty} \sum_{d_1 | d} \sum_{d_2 | \frac{d}{d_1}} u_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2} + \frac{s_1 - s_2}{2}} d^{s_3 - \frac{1}{2}} d_1^{1-2s_1} d_2^{1-2s_2} \times$$

$$\times |m_3|^{s_3 - \frac{1}{2}} \sigma_{1-2s_1, 1-2s_3}\left(\frac{d}{d_1 d_2}, |m_3|\right) \times$$

(2.34)

$$\times \int_0^{\infty} K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi |m_3| u_{m_1, m_2} \sqrt{1+x}) K_{s_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}} (1 + \frac{1}{x})}) \times$$

$$\times x^{\frac{s_2 - s_1}{2}} \frac{dx}{x} e^{2\pi i(m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + m_3 \theta_{m_1, m_2})}$$

Напомним, что

$$s_3 = s_1 + s_2 - \frac{1}{2}, \quad d = (m_1, m_2), \quad \xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s).$$

Здесь слагаемое  $E_{11}(Y; \delta_1, \delta_2)$  является постоянным членом ряда Фурье по  $X_1, X_2$  и непостоянным членом ряда Фурье по переменной  $\nu$ . Слагаемое  $E_{12}(Y; \delta_1, \delta_2)$  является постоянным членом ряда Фурье по  $\nu$  и рядом Фурье по переменным  $X_1, X_2$  без постоянного члена. В выражении  $E_{13}(Y; \delta_1, \delta_2)$  отсутствуют постоянный член ряда Фурье по  $X_1, X_2$  и постоянный член ряда Фурье по  $\nu_{m_1, m_2}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (2.29)–(2.34) были нами доказаны при  $\text{Re } \delta_1, \text{Re } \delta_2 > 1$ . С помощью оценок, приведенных в леммах 9 и 10, мы без труда получаем, что все ряды в формулах (2.29)–(2.34) абсолютно сходятся при всех  $\delta_1, \delta_2$ ; сходимость равномерная, когда  $\sigma_1 = \text{Re } \delta_1$  и  $\sigma_2 = \text{Re } \delta_2$  меняются на компактах. Действительно, из лемм 9 и 10 следует, что абсолютная величина ряда (2.34) по своему порядку не превосходит суммы из четырех кратных рядов вида

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{(m_1, m_2)=d} c_{1,k} u_{m_1, m_2} c_{2,k} |m_3| c_{3,k} e^{-2\pi(m_3 u_{m_1, m_2} + d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}})} \quad (2.35)$$

где  $k=1, 2, 3, 4$ , и четыре набора констант

$$(c_{1,k}, c_{2,k}, c_{3,k})$$

определяются четырьмя парами ограничений на переменные суммирования:

$$(2\pi |m_3| u_{m_1, m_2} \geq 1, 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} \geq 1),$$

как об этом говорилось в лемме 10.

Теперь остается только заметить, что любой из кратных рядов (2.35) абсолютно сходится по всем переменным ввиду экспоненциального убывания его членов по переменным суммирования. Константы  $c_{1,k}, c_{2,k}, c_{3,k}, k=1, 2, 3, 4$  зависят только от  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Еще проще доказывается сходимость остальных рядов в формулах (2.29)–(2.33). Таким образом, мы заключаем, что функция  $\tilde{E}(Y; \delta_1, \delta_2)$  является целой функцией  $\delta_1$  и  $\delta_2$  и справедливость формул (2.29)–(2.34) на всем пространстве  $\mathbb{C}^2$  вытекает из принципа аналитического продолжения. Отметим, что мы также указали расположение особенностей мероморфной функции  $\tilde{E}(Y; \delta_1, \delta_2)$  — они лежат на комплексных прямых в пространстве  $\mathbb{C}^2$

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \delta_3 = 1,$$

а также на прямых

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \rho_1, \delta_2 = \frac{1}{2} \rho_2, \delta_3 = \frac{1}{2} \rho_3,$$

где  $\rho_j, j=1,2,3$ , пробегает все нетривиальные нули дзета-функции Римана. Причем в силу равенства

$$\delta_3 = \delta_1 + \delta_2 - \frac{1}{2}$$

эти три нуля линейно зависимы. Теорема доказана.

Заметим, что формула (2.30) для постоянного члена ряда Эйзенштейна следует из общей формулы, полученной Р. Ленглендсом в [3] (см. также [7]). Как уже указывалось, существенной особенностью группы  $SL(3, \mathbb{R})$  является наличие членов (2.33) и (2.34). Следует также отметить, что формулы (2.29)–(2.34) удобны для получения нетривиальных оценок для  $E(Y; \delta_1, \delta_2)$  в различных областях изменения переменных  $u, y, \delta_1, \delta_2$ . Для этого оценки лемм 9 и 10 необходимо заменить на равномерные асимптотические формулы.

Хорошо известно, что ряд Эйзенштейна  $E(Y, \delta_1, \delta_2)$  при  $\text{Re } \delta_1 = \text{Re } \delta_2 = \frac{1}{2}$  связан со старшим непрерывным спектром оператора Бельтрами-Лапласа. Кроме старшей ветви непрерывный спектр состоит из бесконечного числа младших ветвей. С ними связаны младшие ряды Эйзенштейна. Они являются функциями одной комплексной переменной и строятся по параболическим формам для  $SL(2, \mathbb{R})$ , т.е. по автоморфным относительно  $SL(2, \mathbb{Z})$  функциям на верхней полуплоскости, обращающимися в нуль на бесконечности и являющимися собственными функциями дискретного спектра оператора Бельтрами-Лапласа для верхней полуплоскости (см. [2]). Что касается полного спектрального разложения пространства  $L^2(\Gamma \backslash S)$ , то изложение теории Ленглендса в случае  $G=SL(3, \mathbb{R})$  и  $\Gamma=SL(3, \mathbb{Z})$  приведено в [4]. Отметим, что нашим способом мы также можем получить разложение Фурье и доказать мероморфность младших рядов Эйзенштейна. Но их коэффициенты Фурье будут выражаться через коэффициенты Фурье параболических форм, а точный арифметический смысл их в настоящее время неясен.

### § 3. Функциональные уравнения для ряда Эйзенштейна

Хорошо известно, что аналитически продолженный ряд Эйзенштейна  $E(z, s)$  для группы  $SL(2, \mathbb{R})$  удовлетворяет функциональному уравнению

$$E(z, s) = c(s) E(z, 1-s). \quad (3.1)$$

Оно эквивалентно инвариантности функции  $\xi(2s) E(z, s)$  при замене  $s \rightarrow 1-s$ . Последнее утверждение сразу следует из формулы (0.4), если воспользоваться функциональным уравнением для дзета-функции Римана.

Известно, что в общем случае число функциональных уравнений

для старшего ряда Эйзенштейна равно порядку группы Вейля, который в случае  $SL(n, \mathbb{R})$  равен  $n!$ . Пусть  $T_j, j=1, \dots, 5$  - линейные операторы в пространстве  $\mathbb{C}^2$ :

$$\begin{aligned} T_1(\delta_1, \delta_2) &= (1-\delta_2, 1-\delta_1), \\ T_2(\delta_1, \delta_2) &= (1-\delta_1, \delta_2), \\ T_3(\delta_1, \delta_2) &= (\delta_2, 1-\delta_2), \\ T_4(\delta_1, \delta_2) &= (1-\delta_2, \delta_1), \\ T_5(\delta_1, \delta_2) &= (\delta_2, 1-\delta_1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тождественное преобразование  $I$  и  $T_1, \dots, T_5$ , реализуют представление группы Вейля из  $SL(3, \mathbb{R})$  в пространстве  $\mathbb{C}^2$ . Имеем

$$\begin{aligned} T_1^2 = T_2^2 = T_3^2 = I, \\ T_4^3 = T_5^3 = I, \quad T_4 = T_3 T_1, \quad T_5 = T_2 T_1. \end{aligned}$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Функция  $\Phi(Y; \delta_1, \delta_2)$ , определяемая равенством

$$\Phi(Y; \delta_1, \delta_2) = \xi(2\delta_1) \xi(2\delta_2) \xi(2\delta_3) E(Y; \delta_1, \delta_2), \quad (3.3)$$

инвариантна относительно преобразований  $T_j, j=1, 2, 3, 4, 5$ , т.е.

$$\Phi(Y; \delta_1, \delta_2) = \Phi(Y; T_j(\delta_1, \delta_2)). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду упомянутых выше соотношений между преобразованиями  $T_j$ , достаточно доказать равенство (3.4) для  $T_1, T_2$  и  $T_3$  - преобразований порядка 2.

Сначала разберем случай  $T_1$ . Это преобразование оставляет на месте величину  $\delta_2 - \delta_1$  и поскольку  $K_{-3}(x) = K_3(x)$ , то интеграл и показатели степеней  $y, u_{m_1, m_2}$  в равенстве (2.34) для функции  $\Phi(Y; \delta_1, \delta_2)$  (здесь и в дальнейшем мы умножаем формулы (2.30)-(2.34) на  $\xi(2\delta_1) \xi(2\delta_2) \xi(2\delta_3)$ ) инвариантны относительно  $T_1$ . Далее, арифметический множитель в (2.34) имеет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{d=d_1 d_2 d_3 \\ d_1, d_2, d_3 > 0}} d_1^{\frac{1}{2}-\delta_3} d_2^{\delta_1-\delta_2} d_3^{\delta_3-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{|m_3|=l_1 l_2 l_3 \\ l_1, l_2, l_3 > 0 \\ (l_3, d_3)=1}} l_1^{\delta_3-\frac{1}{2}} l_2^{\delta_2-\delta_1} l_3^{\frac{1}{2}-\delta_3} = \\ & = \sum_{d=d_1 d_2 d_3 n} \sum_{|m_3|=l_1 l_2 l_3 n} \mu(n) (d_1 l_3)^{\frac{1}{2}-\delta_3} \left(\frac{d_2}{l_2}\right)^{\delta_1-\delta_2} (d_3 l_1)^{\delta_3-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

и не меняется от преобразования  $\Gamma_1$ . С помощью функционального уравнения для  $\zeta$ -функции Римана получаем, что третье слагаемое в формуле (2.33) для  $\Phi(Y; \delta_1, \delta_2)$  инвариантно относительно  $\Gamma_1$ , а второе и первое слагаемые меняются местами. Аналогично получаем, что под действием  $\Gamma_1$  третье слагаемое  $\Phi(Y; \delta_1, \delta_2)$  в формуле (2.32) остается на месте, а первое и второе меняются местами. Что касается постоянного члена функции  $\Phi$ , то его инвариантность относительно всех преобразований  $\Gamma_j$  является следствием функционального уравнения  $\zeta$ -функции Римана.

Рассмотрим теперь преобразование  $\Gamma_2$ . Оно оставляет на месте величину  $\delta_1 + 2\delta_2$ . Первое слагаемое в формуле (2.32) для  $\Phi(Y; \delta_1, \delta_2)$  инвариантно относительно  $\Gamma_2$ , второе и третье слагаемые меняются местами. В формуле (2.33) первое слагаемое также инвариантно относительно  $\Gamma_2$ , а второе и третье тоже меняются местами. Чтобы доказать инвариантность выражения (2.34) для  $\Phi(Y; \delta_1, \delta_2)$  заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_{\delta_3 - \frac{1}{2}}(2\pi |m_3| u' \sqrt{1+x}) K_{\delta_3 - \frac{1}{2}}(2\pi d \sqrt{\frac{y}{u}} (1 + \frac{1}{x})) x^{\frac{\delta_2 - \delta_1}{2}} \frac{dx}{x} = \\ & = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\pi |m_3| u' \left(t_1 + \frac{1+x}{t_1}\right) - \pi d \sqrt{\frac{y}{u}} \left(t_2 + \frac{1+\frac{1}{x}}{t_2}\right)\right\} \times \\ & \times x^{\frac{1}{2} - \delta_1} t_1^{\delta_3 - \frac{1}{2}} t_2^{\frac{1}{2} - \delta_3} \frac{dx}{x} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} = \frac{1}{2} d^{\frac{1}{4} - \frac{\delta_2}{2}} |m_3|^{\frac{\delta_2}{2} - \frac{1}{4}} y^{\frac{1}{8} - \frac{\delta_1}{4}} \times \\ & \times u'^{\frac{3\delta_1}{4} - \frac{3}{8}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\pi |m_3| u' \left(t_1 t_2 + \frac{1}{t_1 t_2}\right) - \pi d \sqrt{\frac{y}{u}} \left(t_2 + \frac{1}{t_2}\right)\right\} \times \\ & \times K_{\frac{1}{2} - \delta_1} \left(\frac{2\pi}{t_2} \sqrt{\frac{|m_3| d}{t_1}} \cdot \sqrt{u' y}\right) t_1^{\frac{4\delta_2 + 2\delta_1 - 3}{4}} \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

где  $u' = u_{m_1, m_2}$ .

Теперь из формулы (3.6) ясно, что интеграл в ней инвариантен относительно  $\Gamma_2$ ; показатели степеней для  $u_{m_1, m_2}$  и  $y$  станут соответственно  $\frac{1}{8} + \frac{2\delta_2 + \delta_1}{4}$  и  $\frac{5}{8} - \frac{2\delta_2 + \delta_1}{12}$ , то есть тоже останутся на месте.

Наконец, арифметический множитель приобретает вид:

$$\sum_{d=d_1 d_2 d_3} d_1^{\frac{5}{4} - \frac{3s_1 + 2s_2}{2}} d_2^{\frac{s_1}{2} - s_2 + \frac{1}{4}} d_3^{\frac{s_1 + 2s_2}{2} - \frac{3}{4}} \sum_{\substack{lm_3 = l_1 l_2 l_3 \\ (l_3, d_3) = 1}} l_1^{\frac{3s_1 + 2s_2}{2} - \frac{5}{4}} l_2^{\frac{s_1}{2} - s_2 - \frac{1}{4}} l_3^{\frac{3}{4} - \frac{s_1 + 2s_2}{2}}$$

и явно инвариантен относительно  $\Gamma_2$ . Что касается преобразования  $\Gamma_3$ , то инвариантность выражений (2.32) и (2.33) для функции  $\Phi(Y; s_1, s_2)$  доказывается также просто. Для исследования выражения (2.34) достаточно в первом равенстве формулы (3.6) заменить  $x$  на  $\frac{1}{x}$  и, применяя формулу (I.23),  $s_3 - \frac{1}{2}$  на  $\frac{1}{2} - s_3$ ; тогда во второе равенство войдет  $x^{\frac{1}{2} - s_2}$  и возникающий интеграл будет инвариантен относительно  $\Gamma_3$ . Теорема доказана.

Следует отметить, что полный набор  $\xi$ -функций:  $\xi(2s_1) \times \xi(2s_2) \xi(2s_3)$  в равенстве (3.4) нужен лишь для случая  $\Gamma_1$ . В случае  $\Gamma_4$  "лишним" является множитель  $\xi(2s_1)$ , в случае  $\Gamma_5$  - "лишний"  $\xi(2s_2)$ , в случаях  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  "лишними" являются уже произведения по два множителя:  $\xi(2s_2) \xi(2s_3)$  для  $\Gamma_2$ ,  $\xi(2s_1) \xi(2s_3)$  для  $\Gamma_3$ . Это сказывается эффект "стационарных точек и подпространств" (см. [4], стр.19).

Теорема 2 для  $SL(3, \mathbb{R})$  впервые была доказана А.Сельбергом [1], а для случая  $SL(n, \mathbb{R})$  и  $SL(n, \mathbb{Z})$  им же в [2]. При нашем подходе, как мы убедились, она непосредственно следует из теоремы I.

В заключение этого параграфа остановимся на природе специальных функций, возникающих в теореме I. Как известно, функция Макдональда  $K_{s-\frac{1}{2}}(y)$ , участвующая в разложении Фурье ряда Эйзенштейна (0.4), автоморфного относительно  $SL(2, \mathbb{Z})$  фигурирует в разложении Фурье ряда Эйзенштейна на плоскости Лобачевского для любой дискретной подгруппы  $\Gamma$  группы  $SL(2, \mathbb{R})$ , содержащей параболическую подгруппу элементов

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z}.$$

Это следует из того, что ряд Эйзенштейна является собственной функцией оператора Бельтрами-Лапласа, т.е.

$$-y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E(\Gamma; x, y) = s(1-s) E(\Gamma; x, y), \quad (3.7)$$

и, с другой стороны,

$$E(\Gamma; x, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{\Gamma}(n, y) e^{2\pi i n x} \quad (3.8)$$

Подставляя разложение (3.8) в уравнение (3.7), получаем, что

$$-y^2 \frac{d^2}{dy^2} a_{\Gamma}(n, y) + 4\pi^2 n^2 a_{\Gamma}(n, y) = s(1-s) a_{\Gamma}(n, y),$$

откуда при  $n \neq 0$  имеем:

$$a_{\Gamma}(n, y) = a_{\Gamma}(n) \sqrt{y} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |n| y).$$

Мы использовали дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции Бесселя мнимого аргумента  $I_{\nu}(x)$  :

$$x^2 \frac{d^2 I_{\nu}}{dx^2} + x \frac{d I_{\nu}}{dx} - (x^2 + \nu^2) I_{\nu} = 0, \quad (3.9)$$

и выбрали решение, убывающее при  $x \rightarrow +\infty$ , т.е. функцию  $K_{\nu}(x)$ .

Хорошо известно, что дискретную подгруппу  $\Gamma$  группы  $SL(2, \mathbb{R})$  с конечным объемом фундаментальной области можно с помощью преобразования  $\Gamma \rightarrow \sigma \Gamma \sigma^{-1}$  привести к виду, в котором заданная вершина группы  $\Gamma$  переходит в  $\infty$ , а ее параболическая подгруппа - в подгруппу указанного выше вида. Таким образом, функция Макдональда  $K_s(y)$  естественным образом связана с главным однородным пространством группы  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Вернемся теперь к случаю  $SL(3, \mathbb{R})$ . Из выражения (1.2) для римановой метрики на пространстве  $S$  легко получить, что соответствующий оператор Бельтрами-Лапласа имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2} y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} u^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) +$$

$$+ \frac{y}{2u} \left( (v^2 + u^2) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2v \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Поскольку  $\mathcal{L} y^s u^t = \left( \frac{3}{2} s(s-1) + \frac{1}{2} t(t-1) \right) y^s u^t$  и  $\mathcal{L}$  коммутирует с действием группы  $G$ , то

$$-\mathcal{L} E(Y, s, t) = \lambda E(Y, s, t), \quad (3.10)$$

где  $\lambda = \frac{3}{2} s(1-s) + \frac{1}{2} t(1-t)$ , а  $s$  и  $t$  - величины, участвующие в определении (1.4).

Рассмотрим теперь слагаемое  $E_{11}(Y, s, t)$ ,

$$E_{11}(Y, s, t) = \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} f(y, u, m_3) e^{2\pi i m_3 v}, \quad (3.11)$$

где

$$-\frac{3}{2} y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\pi^2 m_3^2 u^2 f = \lambda f.$$

Мы получаем, используя (3.9), что

$$\begin{aligned} \text{а) } f &= y^{\frac{1}{2}} \sqrt{u} K_{t-\frac{1}{2}}(2\pi |m_3| u) \cdot a(m_3), \\ \text{в) } f &= y^{\frac{1}{2} + \frac{t-1}{2}} \sqrt{u} K_{\frac{3t-1}{2}}(2\pi |m_3| u) \cdot a(m_3), \\ \text{с) } f &= y^{1 - \frac{t+1}{2}} \sqrt{u} K_{\frac{3t-1}{2}}(2\pi |m_3| u) \cdot a(m_3), \end{aligned} \quad (3.12)$$

что, разумеется, согласуется с формулой (2.32). Этот случай, конечно, тривиален. Слагаемое  $E_{12}(Y, s, t)$  имеет разложение Фурье

$$E_{12}(Y, s, t) = \sum_{m_1, m_2=-\infty}^{\infty} F(m_1, m_2, u, y, v) e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)} \quad (3.13)$$

Функция  $F(m_1, m_2, y, u, v)$  удовлетворяет уравнению

$$\left[ \frac{3}{2} y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} u^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) - 2\pi^2 \frac{y}{u} ((m_1 v + m_2)^2 + m_1^2 u^2) + \lambda \right] F = 0.$$

Делая уже привычную замену переменных

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{m_1' z + m_2'}, \quad d = (m_1, m_2), \quad m_1 = m_1' d, \quad m_2 = m_2' d,$$

$$\alpha m_2' - \beta m_1' = 1, \quad z = v + iu$$

и считая, что  $F$  не зависит от  $v'$ , получаем уравнение

$$\frac{3}{2} y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} - \frac{y}{2u_1} F + \lambda F = 0,$$

где  $\frac{u'}{4\pi^2 d^2} = u_1$ . Положив  $F = y^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} u_1^{\frac{1}{4} - \frac{3}{2}} G$ , получим,

$$\frac{3}{2}y^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{1}{2}u_1^2 \frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} + 3\left(\frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right)y \frac{\partial G}{\partial y} +$$

$$+ \left(\frac{5}{4} - \frac{3s}{2}\right)u_1 \frac{\partial G}{\partial u_1} - \frac{y}{2u_1} G - \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2})^2 G = 0. \quad (3.14)$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что функция

$$G = K_{t-\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\frac{y}{u_1}} \right)$$

есть решение уравнения (3.14).

Остальные решения получаются из  $F$  с помощью преобразований  $T_1$  и  $T_2$ . Итак, имеем

$$a) F = y^{\frac{3}{4}-\frac{s}{2}} u_{m_1, m_2}^{\frac{5}{4}-\frac{3s}{2}} K_{t-\frac{1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} \right) a(m_1, m_2),$$

$$b) F = y^{\frac{1}{4} + \frac{s+t}{4}} u_{m_1, m_2}^{\frac{3(s+t)}{4} - \frac{1}{4}} K_{\frac{3s-t-1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} \right) a(m_1, m_2), \quad (3.15)$$

$$c) F = y^{\frac{1}{2} + \frac{s-t}{4}} u_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2} + \frac{3(s-t)}{4}} K_{\frac{3s+t-1}{2}} \left( 2\pi d \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}}} \right) a(m_1, m_2),$$

что согласуется с формулой (2.33).

Рассмотрим теперь наиболее интересное слагаемое

$$E_{13}(Y, s, t) = \sum_{m_1, m_2 = -\infty}^{\infty} \sum_{m_3 = -\infty}^{\infty} F(y, u_{m_1, m_2}, m_1, m_2) e^{2\pi(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 u_{m_1, m_2})}. \quad (3.16)$$

Как и в предыдущем случае, получаем уравнение

$$\frac{3}{2}y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{2}u'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} - 2\pi^2 (m_3^2 u'^2 + d^2 \frac{y}{u'}) F + \lambda F = 0,$$

или, полагая

$$y_1 = 6\pi^3 d^2 |m_3| y, \quad u_1 = 2\pi |m_3| u',$$

имеем

$$\frac{3}{2} y_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2} - \frac{1}{2} (u_1^2 + \frac{y_1}{u_1}) F + \lambda F = 0. \quad (3.17)$$

Сделав подстановку  $F = y_1^{\frac{1}{2} + \frac{s-t}{4}} u_1^{\frac{1}{2} + \frac{3(t-s)}{4}} G$ , получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} y_1^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y_1^2} + \frac{1}{2} u_1^2 \frac{\partial^2 G}{\partial u_1^2} + \frac{3}{2} y_1 \frac{\partial G}{\partial y_1} + \frac{1}{2} u_1 \frac{\partial G}{\partial u_1} - \\ & - \rho y_1 \frac{\partial G}{\partial y_1} + \rho u_1 \frac{\partial G}{\partial u_1} - \frac{1}{2} (u_1^2 + \frac{y_1}{u_1} + \mu^2) G = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $\rho = \frac{3(t-s)}{4}$ ,  $\mu = \frac{3s+t}{2} - 1$ .

Мы утверждаем, что функция

$$G(u_1, y_1) = \int_0^{\infty} K_{\mu}(u_1 \sqrt{1+x}) K_{\mu}(\sqrt{\frac{y_1}{u_1}} (1+\frac{1}{x})) x^{\rho} \frac{dx}{x}$$

является решением уравнения (3.18). В этом можно убедиться прямой подстановкой, совершив предварительно преобразование Лапласа по переменной  $\rho$ . Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} F(y, u_{m_1, m_2}; m_1, m_2) &= y^{\frac{1}{2} + \frac{s-t}{4}} u_{m_1, m_2}^{\frac{1}{2} + \frac{3(t-s)}{4}} \times \\ & \times \int_0^{\infty} K_{\frac{3s+t}{2}-1}(2\pi |m_3| u_{m_1, m_2} \sqrt{1+x}) K_{\frac{3s+t}{2}-1}(2\pi d \times \\ & \times \sqrt{\frac{y}{u_{m_1, m_2}} (1+\frac{1}{x})}) x^{\frac{3(t-s)}{4}} \frac{dx}{x} a(m_1, m_2, m_3). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отметим, что если в случае уравнения (3.14) решение

$K_{t-\frac{1}{2}}(\sqrt{\frac{y}{u_1}})$  можно найти непосредственно, то для уравне-

ния (3.17) это уже затруднительно. Но, с другой стороны, наш арифметический способ вывода разложения Фурье ряда Эйзенштейна позволяет найти решение уравнения (3.17), которое и указано выше. Более того, уравнение (3.17) с помощью замены переменных

$$y_1 = e^{\frac{\sqrt{3}}{2} x_1}, \quad u_1 = e^{\frac{1}{\sqrt{2}} x_2}, \quad F = e^{\frac{1}{2\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} x_2} \Psi$$

сводится к двумерному уравнению Шредингера

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}(e^{\sqrt{2}x_2} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2}) \right] \Psi = (\lambda - \frac{1}{2})\Psi. \quad (3.20)$$

Наши арифметические соображения, таким образом, позволяют найти все убывающие при  $x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \rightarrow \infty$  решения уравнения (3.20).

Соответствующий оператор Шредингера имеет только старший непрерывный спектр: его собственные функции есть

$$\begin{aligned} \Psi_1(x_1, x_2, \lambda) = & \exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(s-t)}{4} x_1 + \frac{3}{4\sqrt{2}} (t-s)x_2\right) \times \\ & \times \int_0^\infty K_{\frac{3s+t}{2}-1}\left(e^{\frac{x_2}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+x}\right) K_{\frac{3s+t}{2}-1}\left(e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2\right)} \sqrt{1+\frac{1}{x}}\right) \times \\ & \times x^{\frac{3(t-s)}{4}} \frac{dx}{x}, \quad \text{Res} = \text{Ret} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Классическими средствами теории дифференциальных операторов можно доказать теорему разложения по собственным функциям  $\Psi(x_1, x_2, \lambda)$ , которая обобщает известную теорему Конторовича-Лебедева о разложении по функциям  $\chi_y K_{it}(y)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (см. [6], стр.87).

Вернемся теперь от оператора Шредингера (3.20) к дискретным подгруппам группы  $SL(3, \mathbb{R})$  с конечным объемом фундаментальной области. Если такая подгруппа содержит параболическую подгруппу  $\Gamma_\infty$ , то формулы (3.11)-(3.12); (3.13)-(3.15), (3.16)-(3.19) полностью описывают аналитическую структуру коэффициентов Фурье соответствующего старшего ряда Эйзенштейна. Постоянный член и арифметическая природа коэффициентов Фурье зависят, разумеется, от арифметики соответствующей дискретной группы. Таким образом, мы показали, в указанном выше смысле, универсальность специальных функций (3.12), (3.15) и (3.19) для главного однородного пространства группы  $SL(3, \mathbb{R})$ .

На этом мы закончим изложение первой части работы.

#### Литература

1. Selberg A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. - J. Indian Math. Soc., 1956, vol.20, N 1-3, p.47-87 (Русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, т. I, № 4, с.3-28).

2. Selberg A. Discontinuous groups and harmonic analysis, - Proc. Internat. Congr. Math. Aug. 1962, Djursholm, Uppsala, 1963, p.177-189. (Вольный русский пересказ: В сб. "Арифметические группы и автоморфные функции", М., Мир, 1969, с.71-79).
3. Langlands R.P. On functional equations satisfied by Eisenstein series. - Lect. Notes Math., 1976, vol.544, 337p.
4. Венков А.Б. О формуле следа Сельберга для  $SL(3, \mathbb{Z})$ . - Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 1976, т.63, с.8-66.
5. Selberg A., Chowla S. On Epstein's zeta-function. - J. reine und angew. Math., 1967, Bd.227, s.86-110.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2. М., Наука, 1974, 295 с.
7. Langlands R.P. The volume of the fundamental domain for some arithmetical subgroups of Chevalley groups. - Proc. Sympos. Pure Math., vol.9, Providence, R.I., Amer. Math. Soc., 1966, p.143-148. (Русский перевод: В сб. "Арифметические группы и автоморфные функции", М., Мир, 1969, с.80-89).