ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 194 (2021). С. 144–154
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-194-144-154

УДК 517.927.25, 517.984.62

О ДВУХТОЧЕЧНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ И ДИРАКА

© 2021 г. **А. С. МАКИН**

Аннотация. Проблемы полноты и базисности системы собственных и присоединенных функций являются основными вопросами спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов с дискретным спектром. В настоящей работе дан краткий обзор результатов в этой области для операторов Штурма—Лиувилля и Дирака с произвольными двухточечными краевыми условиями и произвольным комплекснозначным суммируемым потенциалом.

***Ключевые слова*:** оператор Штурма—Лиувилля, оператор Дирака, краевая задача, полнота, базисность.

ON TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE STURM–LIOUVILLE AND DIRAC OPERATORS

© 2021 **A. S. MAKIN**

Abstract. The problems of completeness and basic property of systems of eigenfunctions and root functions are important questions of the spectral theory of non-self-adjoint differential operators with discrete spectra. In this paper, we give a brief survey of results on this topic for the Sturm–Liouville and Dirac operators with arbitrary two-point boundary conditions and arbitrary complex-valued summable potentials.

***Keywords and phrases*:** Sturm–Liouville operator, Dirac operator, boundary-value problem, completeness, basis property.

***AMS Subject Classification*:** 34L10, 34B24

1. Введение. Изучение спектральной теории несамосопряженных краевых задач на конечном интервале для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = \lambda y$$

было начато Г. Биркгофом в его двух работах [28,29] 1908 года, где он впервые ввел понятие регулярных краевых условий. Его исследования были продолжены Я. Тамаркиным [54,55] и М. Стоуном [52, 53]. Первой работой по краевым задачам для систем первого порядка обыкновенных дифференциальных уравнений в форме

$$\frac{1}{i}B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \quad y = \operatorname{col}(y_1, \ldots, y_n),$$

где B — невырожденная $(n \times n)$-матрица,

$$B = \operatorname{diag}(b_1^{-1}I_{n_1}, \ldots, b_r^{-1}I_{n_r}) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n = n_1 + \ldots n_r,$$

с комплексными элементами $b_j \neq b_k$, а $Q(x)$ — потенциальная матрица, является работа Г. Биркгофа и Р. Лангера [30]. В дальнейшем их исследования развивались во многих направлениях. По спектральной теории опубликовано огромное число работ, среди которых можно указать [6, 22, 25, 31, 32, 40–46], содержащие также обширные списки литературы в этой области.

Настоящая статья состоит из двух частей. В первой части изучаются вопросы полноты и базисности системы корневых функций оператора Штурма—Лиувилля, а во второй рассматриваются аналогичные вопросы для оператора Дирака.

2. Оператор Штурма—Лиувилля. В этой части работы содержится краткий обзор результатов по задачам на собственные значения для уравнения

$$u'' - q(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

с двухточечными краевыми условиями

$$B_i(u) = a_{i1}u'(0) + a_{i2}u'(\pi) + a_{i3}u(0) + a_{i4}u(\pi) = 0, \tag{2}$$

где $B_i(u)$, $i = 1, 2$, — линейно независимые формы с произвольными комплексными коэффициентами, а $q(x)$ — произвольная комплекснозначная функция из класса $L_1(0, \pi)$.

Рассмотрим оператор $Lu = u'' - q(x)u$ как линейный оператор в пространстве $L_2(0, \pi)$ с областью определения $D(L) = \Big\{u \in L_2(0, \pi) \mid u(x), u'(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0, \pi],\ u'' - q(u)u \in L_2(0, \pi),\ B_i(u) = 0\ (i = 1, 2)\Big\}$.

Собственной функцией оператора L, соответствующей собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, будем называть любую функцию $\overset{0}{u}(x) \in D(L)$ ($\overset{0}{u}(x) \not\equiv 0$), которая удовлетворяет уравнению

$$L\overset{0}{u} + \lambda\overset{0}{u} = 0$$

почти всюду на $[0, \pi]$.

Присоединенной функцией оператора L порядка p ($p = 1, 2, \ldots$), соответствующей тому же собственному значению λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем называть любую функцию $\overset{p}{u}(x) \in D(L)$, которая удовлетворяет уравнению

$$L\overset{p}{u} + \lambda\overset{p}{u} = \overset{p-1}{u}$$

почти всюду на отрезке $[0, \pi]$. Таким образом, собственная функция $\overset{0}{u}(x)$ является присоединенной функцией нулевого порядка. Множество всех собственных и присоединенных функций (или корневых функций), соответствующих одному и тому же собственному значению λ, вместе с функцией $u(x) \equiv 0$ является корневым линейным многообразием. Это многообразие называется корневым подпространством, если его размерность конечна.

Пусть множество собственных значений оператора L счетно и все корневые линейные многообразия являются корневыми подпространствами. В каждом корневом подпространстве выберем базис. Любую систему функций $\{u_n(x)\}$, полученную как объединение указанных базисов во всех корневых подпространствах, будем называть *системой собственных и присоединенных функций* (или корневых функций) оператора L.

Очевидно, базис в корневом подпространстве может быть выбран разными способами. Хорошо известно, что в случае, когда общее число присоединенных функций является бесконечным, система корневых функций может обладать свойством базисности при одном выборе присоединенных функций и терять его при другом, оставаясь при этом полной и минимальной. Поэтому, говоря о наличии или отсутствии свойства базисности, следует иметь в виду какую-либо конкретную систему собственных и присоединенных функций. Заметим однако, что если существует хотя бы одна система корневых функций какой-либо краевой задачи, которая образует базис, т.е. присоединенные функции выбраны «правильно», то обычно говорят, что система собственных и присоединенных этой краевой задачи обладает свойством базисности.

Для удобства запишем условия (2) в матричной форме,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

и обозначим матрицу, составленную из i-го и j-го столбцов матрицы A $(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ через $A(ij)$; положим $A_{ij} = \det A(ij)$.

Обозначим через $c(x,\mu), s(x,\mu)$ $(\lambda = \mu^2)$ фундаментальную систему решений уравнения (1) с начальными условиями $c(0,\mu) = s'(0,\mu) = 1$, $c'(0,\mu) = s(0,\mu) = 0$. Собственные значения задачи (1), (2) являются корнями характеристического определителя

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} B_1(c(x,\mu)) & B_1(s(x,\mu)) \\ B_2(c(x,\mu)) & B_2(s(x,\mu)) \end{vmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\Delta(\mu) = -A_{13} - A_{24} + A_{34}s(\pi,\mu) - A_{23}s'(\pi,\mu) - A_{14}c(\pi,\mu) - A_{12}c'(\pi,\mu).$$

Легко видеть, что если $q(x) \equiv 0$, то характеристический определитель $\Delta_0(\mu)$ соответствующей задачи (1), (2) принимает вид

$$\Delta_0(\mu) = -A_{13} - A_{24} + A_{34}\frac{\sin\pi\mu}{\mu} - (A_{23} + A_{14})\cos\pi\mu + A_{12}\mu\sin\pi\mu.$$

Краевые условия (2) называются *невырожденными*, если они удовлетворяют одному из следующих соотношений:

(i) $A_{12} \neq 0$,
(ii) $A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} \neq 0$,
(iii) $A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} = 0$, $A_{34} \neq 0$.

Очевидно, краевые условия (2) являются невырожденными тогда и только тогда, когда $\Delta_0(\mu) \neq \mathrm{const}$. Будем говорить, что краевая задача имеет классическую асимптотику спектра, если множество собственных значений счетно и их кратности ограничены одной константой. Заметим, что для любых невырожденных краевых условий асимптотическое представление характеристического определителя $\Delta(\mu)$ при $|\mu| \to \infty$ получено в [22].

2.1. Полнота. В [22] установлен следующий факт.

Теорема 1. *Для любых невырожденных краевых условий спектр задачи* (1), (2) *является счетным множеством* $\{\lambda_n\}$ *собственных значений с единственной предельной точкой* ∞*, размерности соответствующих корневых подпространств ограничены одной постоянной. Система* $\{u_n(x)\}$ *собственных и присоединенных функций полна и минимальна в* $L_2(0,\pi)$*, следовательно, существует биортогонально сопряженная система* $\{v_n(x)\}$.

Для вырожденных краевых условий вопрос о полноте является значительно более сложным. Пусть краевые условия (2) вырождены. Согласно [22, 41], это эквивалентно выполнению следующих условий:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} = 0, \quad A_{34} = 0.$$

В [41] показано, что любые краевые условия из рассматриваемого класса эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если в первом случае $d = 0$, то для любого потенциала $q(x)$ мы получаем начально-краевую задачу (задачу Коши), у которой нет собственных значений. Такая же ситуация имеет место во втором случае.

Далее будем рассматривать первый случай, если $d \neq 0$. Тогда краевые условия могут быть записаны в более обозримой форме

$$u'(0) + du'(\pi) = 0, \quad u(0) - du(\pi) = 0, \tag{3}$$

где $d \neq 0$. Полнота системы корневых функций существенно зависит от свойств функции $\tilde{q}(x) = q(x) - q(\pi - x)$. Из [2, 12, 21] вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 2. *Если $d^2 \neq 1$, то система корневых функций задачи* (1), (3) *полна в пространстве $L_2(0, \pi)$ тогда и только тогда, когда точка $\pi \in \operatorname{supp} \tilde{q}(x)$.*

(Точка π принадлежит носителю $\tilde{q}(x)$, если для любой окрестности этой точки на множестве ненулевой меры выполняется неравенство $\tilde{q}(x) \neq 0$.)

Теорема 3. *Если для некоторого $\rho > 0$ существует предел*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h^\rho} \int_{\pi - h}^{\pi} \tilde{q}(x) dx = \nu,$$

где $\nu \neq 0$, то система корневых функций задачи (1), (3) *полна в пространстве $L_2(0, \pi)$.*

Таким образом, в случае $d^2 \neq 1$ получено окончательное решение проблемы полноты. Легко видеть, что в случае $d^2 = 1$ некоторые вопросы остаются отрытыми. В частности [10], вопрос о существовании потенциала $q(x) \in C^\infty[0, \pi]$, такого, что $\tilde{q}^{(j)}(\pi) = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots$, а соответствующая система корневых функций полна.

2.2. Базисность. Для удобства введем в рассмотрение числа μ_n, где $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, $\operatorname{Re} \mu_n \geqslant 0$. Известно, что краевые условия могут быть разделены на четыре класса:

I: усиленно регулярные;
II: регулярные, но не усиленно регулярные;
III: нерегулярные;
IV: вырожденные;

классы I–class:3 являются невырожденными. Все определения даны в [25]. Эти три класса следует рассмотреть отдельно.

I. *Усиленно регулярные краевые условия.* Пусть краевые условия (2) принадлежат классу (I). Согласно [25], это эквивалентно выполнению следующих условий:

$$A_{12} \neq 0; \quad A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq \mp(A_{13} + A_{24});$$
$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} = 0, \quad A_{13} + A_{24} = 0, \quad A_{13} = A_{24}, \quad A_{34} \neq 0.$$

Хорошо известно, что все (за исключением, может быть, конечного числа) собственные значения λ_n простые (другими словами, асимптотически простые), а число присоединенных функций конечно. Кроме того, числа λ_n разделены в том смысле, что существует такая постоянная $c_0 > 0$, что для всех достаточно больших по модулю различных λ_k и λ_m справедливо неравенство

$$|\mu_k - \mu_m| \geqslant c_0. \tag{4}$$

Теорема 4. *Система корневых функций $\{u_n(x)\}$ образует базис Рисса в $L_2(0, \pi)$.*

Это утверждение было доказано в [8, 24] и [32, гл. XIX]. К классу (I) относятся многие типы краевых условий, например, условия Дирихле $u(0) = u(\pi) = 0$, условия Неймана $u'(0) = u'(\pi) = 0$, условия Дирихле—Неймана $u(0) = u'(\pi) = 0$ и др.

II. *Регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия.* Пусть краевые условия принадлежат классу (II). Согласно [25], это эквивалентно выполнению следующих условий:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0, \quad A_{14} + A_{23} = (-1)^{\theta+1}(A_{13} + A_{24}),$$

где $\theta = 0, 1$. В зависимости от конкретного вида краевых условий и потенциала $q(x)$ система корневых функций может обладать или не обладать свойством базисности (см. [6, 8, 56]) и даже при фиксированных краевых условиях указанное свойство может иметь место или исчезать при сколь угодно малых изменениях коэффициента $q(x)$ в соответствующей метрике (см. [7]). Таким образом, рассматриваемый класс краевых условий значительно сложнее предыдущего.

Для любой задачи (1), (2) обозначим через Q множество таких потенциалов $q(x)$ из класса $L_1(0,\pi)$, что система корневых функций образует базис Рисса в $L_2(0,\pi)$, $\bar{Q} = L_1(0,\pi) \setminus Q$.

Для исследования этого класса задач целесообразно разделить рассматриваемые краевые условия на два типа:

(a) $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} \neq 0$;
(b) $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$; $A_{14} \neq A_{23}$.

Вначале рассмотрим задачи типа (a). В [41] было установлено, что любые краевые условия данного типа эквивалентны условиям, задаваемым матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a_{14} \neq 0$ в обоих случаях. Если a_{14} вещественно и $q(x)$ — вещественнозначная функция, то соответствующая краевая задача является самосопряженной.

Теорема 5 (см. [13]). *Если задача* (1), (2) *принадлежит типу* (a), *то система* $\{u_n(x)\}$ *является базисом Рисса в* $L_2(0,\pi)$.

Рассмотрим задачи типа (b). Тип (b) содержит, например, периодические, антипериодические краевые условия, условия Самарского—Ионкина и многие другие.

Теорема 6 (см. [14–16]). *Если задача* (1), (2) *принадлежит типу* (b), *то множества* Q *и* $\bar{Q}$ *всюду плотны в* $L_1(0,\pi)$.

III. *Нерегулярные условия.* Пусть краевые условия (2) принадлежат классу (III). Согласно [25,41], это эквивалентно выполнению одного из следующих условий:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} = 0, \quad A_{13} + A_{24} = 0, \quad A_{13} \neq A_{24}, \quad A_{34} \neq 0;$$
$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} = 0, \quad A_{13} + A_{24} \neq 0, \quad A_{34} \neq 0.$$

В соответствии с [41], любые краевые условия рассматриваемого класса эквивалентны условиям, задаваемым матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 & \mp 1 \end{pmatrix}, \text{ где } b_0 \neq 0,$$

или

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 & b_0 \\ 0 & 0 & 1 & -b_1 \end{pmatrix}, \text{ где } b_1 \neq \pm 1,\ b_0 \neq 0, \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } a_0 \neq 0.$$

В случае (III), так же как и в случае (I), все, за исключением, может быть, конечного числа, собственные значения λ_n являются простыми, число присоединенных функций конечно и выполняется условие разделимости (4). Однако система $\{u_n(x)\}$ никогда не образует даже обычного базиса в $L_2(0,\pi)$, поскольку $\|u_n\|_{L_2(0,\pi)}\|v_n\|_{L_2(0,\pi)} \to \infty$ при $n \to \infty$. Здесь $\{v_n(x)\}$ — биортогонально сопряженная система. Этот случай был исследован в [39, 52, 53].

IV. *Вырожденные условия.* Для этого случая построено множество примеров краевых задач с неклассической асимптотикой спектра. В частности, хорошо известно, что при условии $d = \pm 1$, $q(x) \equiv 0$ любое комплексное число является собственным значением рассматриваемой задачи. Если $d \neq \pm 1$, $q(x) \equiv 0$, то спектр отсутствует. Примеры потенциалов $q(x)$, обеспечивающих неограниченный рост кратностей собственных значений, были построены в [17, 18].

Теорема 7 (см. [19, 20]). *Система собственных и присоединенных функций задачи* (1), (3) *никогда не образует базис в пространстве* $L_2(0,\pi)$.

Выводы. В таблице 1 суммированы результаты о полноте и базисности для оператора (1), (2). Второй столбец определяет класс краевых условий (УР — усиленно регулярные, РНУР — регулярные, но не усиленно регулярные, НЕР — нерегулярные, ВЫР — вырожденные). ДА/НЕТ означает что указанное свойство может появляться или исчезать в зависимости от коэффициента $q(x)$.

Таблица 1

Случай	Класс	Условия на A_{ij}	Полнота	Базисность
I	УР	$A_{12} \neq 0$; $A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} \neq 0$, $A_{14} + A_{23} \neq \mp(A_{13} + A_{24})$; $A_{12} = 0$, $A_{14}+A_{23} = 0$, $A_{13}+A_{24} = 0$, $A_{13} = A_{24}$, $A_{34} \neq 0$	ДА	ДА
II(a)	РНУР	$A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} \neq 0$, $A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24})$, $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} \neq 0$	ДА	ДА
II(b)	РНУР	$A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} \neq 0$, $A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24})$, $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$; $A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} \neq 0$, $A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24})$, $A_{14} \neq A_{23}$	ДА	ДА/НЕТ
III	НЕР	$A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} = 0$, $A_{13} + A_{24} = 0$, $A_{13} \neq A_{24}$, $A_{34} \neq 0$; $A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} = 0$, $A_{13} + A_{24} \neq 0$, $A_{34} \neq 0$	ДА	НЕТ
III	ВЫР	$A_{12} = 0$, $A_{14} + A_{23} = 0$, $A_{34} = 0$	ДА/НЕТ	НЕТ

3. Оператор Дирака. В этой части работы содержится краткий обзор результатов по задачам на собственные значения для системы Дирака

$$B\mathbf{y}' + V\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \tag{5}$$

где $\mathbf{y} = \operatorname{col}(y_1(x), y_2(x))$,

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ Q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

функции $P(x), Q(x) \in L_1(0,\pi)$, с двухточечными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0, \tag{6}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

коэффициенты a_{ij} произвольные комплексные числа, а строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы.

Рассмотрим оператор $\mathbb{L}\mathbf{y} = B\mathbf{y}' + V\mathbf{y}$ как линейный оператор в пространстве $\mathbb{H} = L_2(0,\pi) \oplus L_2(0,\pi)$ с областью определения $D(\mathbb{L}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \mathbb{L}\mathbf{y} \in \mathbb{H}, U_j(\mathbf{y}) = 0 (j = 1,2)\}$. Обозначим через

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda) \\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения (5) с начальными условиями $E(0,\lambda) = I$, где I — единичная матрица. Хорошо известно, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (5), (6) может быть записан в виде

$$\Delta(\lambda) = A_{12} + A_{34} + A_{32}e_{11}(\pi,\lambda) + A_{14}e_{22}(\pi,\lambda) + A_{13}e_{12}(\pi,\lambda) + A_{42}e_{21}(\pi,\lambda).$$

Если $V(x) \equiv 0$, то $e_{12}(x,\lambda) = e_{21}(x,\lambda) = 0$ и характеристический определитель $\Delta_0(\lambda)$ невозмущенной задачи

$$\mathbb{L}_0\mathbf{y} = B\mathbf{y}' = \lambda\mathbf{y}, \quad U(\mathbf{y}) = 0 \tag{7}$$

принимает вид

$$\Delta_0(\lambda) = (A_{12} + A_{34}) - A_{23}e^{i\pi\lambda} + A_{14}e^{-i\pi\lambda}. \tag{8}$$

Известно, что краевые условия (6) могут быть разделены на четыре класса:

I: усиленно регулярные;
II: регулярные, но не усиленно регулярные;
III: нерегулярные;
IV: вырожденные.

Краевые условия (6) называются регулярными, если

$$A_{14}A_{23} \neq 0, \tag{9}$$

и усиленно регулярными, если кроме (9) они удовлетворяют условию

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} \neq 0.$$

Регулярные краевые условия называются регулярными, но не усиленно регулярными, если они дополнительно удовлетворяют условию

$$(A_{12} + A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} = 0.$$

Краевые условия (6) называются нерегулярными, если

$$A_{14}A_{23} = 0, \quad (A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) \neq 0,$$

и вырожденными, если

$$A_{14}A_{23} = 0, \quad (A_{12} + A_{34})(|A_{23}| + |A_{14}|) = 0.$$

Легко видеть, что в случае вырожденных краевых условий характеристическое уравнение $\Delta_0(\lambda) = 0$ либо не имеет корней, либо $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$.

3.1. Полнота. В [22] установлено, что система корневых функций задачи (5), (6) с регулярными краевыми условиями полна в пространстве $\mathbb{H}$. Если условия (6) не являются регулярными, полнота существенно зависит от потенциала $V(x)$. В этом случае система корневых функций невозмущенного оператора (7) ($P(x) = Q(x) = 0$) неполна в $\mathbb{H}$ (см. [22]), однако она может быть полной, если $V(x) \not\equiv 0$. Недавно А. А. Лунев и М. М. Маламуд доказали (см. [47]) следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть функции $P(x)$, $Q(x)$ непрерывны в точках 0 и π. Тогда система корневых функций задачи* (5), (6) *полна и минимальна в $\mathbb{H}$, если*

$$|A_{32}| + |-A_{13}P(0) + A_{42}Q(\pi)| \neq 0 \quad \textit{и} \quad |A_{14}| + |-A_{13}P(\pi) + A_{42}Q(0)| \neq 0.$$

Если функции $P(x)$, $Q(x)$ дифференцируемы, достаточные условия полноты и минимальности были получены в [11]. Необходимые условия полноты были установлены в [49].

Теорема 9. *Если*

$$A_{14} = A_{32} = 0, \quad A_{13}A_{42} \neq 0, \quad 0 \notin \operatorname{supp} R_1(x) \cup R_2(x),$$

где

$$R_1(x) = A_{13}P(x) - A_{42}Q(x - \pi), \quad R_2(x) = A_{13}P(\pi - x) - A_{42}Q(x),$$

то система корневых функций неполна в $\mathbb{H}$.

Заметим, что М. М. Маламуд и его соавторы А. А. Лунев, Л. Л. Оридорога, А. В. Агибалова получили множество результатов о полноте (неполноте) системы корневых функций для гораздо более общих дифференциальных систем первого порядка.

3.2. Базисность. Регулярные краевые задачи исследовались А. П. Хромовым, А. Г. Баскаковым, Р. Джаковым, Б. С. Митягиным и другими авторами. А. М. Савчук, И. В. Садовничая, А. А. Шкаликов (см. [26, 51]) и А. А. Лунев, М. М. Маламуд (см. [10, 48]) установили, что система корневых задачи (5), (6) с усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса в $\mathbb{H}$ и базис Рисса со скобками в $\mathbb{H}$ в случае регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий. Также в указанных работах было показано, что собственные значения λ_k задачи (5), (6) с регулярными краевыми условиями удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lambda_k = \lambda_k^0 + o(1),$$

где λ_k^0 — собственные значения задачи соответствующей задачи (7). Заметим, что в [10, 26, 48, 51] на потенциал наложено условие $V(x) \in L_1(0, \pi)$.

Однако в случае регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий, упомянутые работы оставляют открытым вопрос, когда система корневых функций образует обычный базис Рисса, а не базис Рисса со скобками. Именно его мы будем рассматривать далее.

Хорошо известно, что в этом случае спектр состоит из попарно сближающихся собственных значений

$$\lambda_{n,j} = z_0 + 2n + \varepsilon_{n,j}, \quad \text{где} \quad z_0 = \frac{A_{12} + A_{34}}{2A_{23}},$$

$n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{n,j} \to 0$ при $|n| \to \infty$, $j = 1, 2$. Если для всех n, удовлетворяющих условию $|n| > n_0$, имеем $\lambda_{n,1} = \lambda_{n,2}$, то спектр называется *асимптотически кратным.*

Регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия, определенные матрицей A, называются условиями *периодического типа* (см. [33]), если $A_{13} = A_{24} = 0$, $A_{12} = A_{34}$. Условия периодического типа эквивалентны условиям, задаваемым матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $a \neq 0$. Если $a = -1$, то краевые условия (10) являются периодическими, а если $a = 1$, то антипериодическими. Известно (см. [33]), что для задачи (7) с условиями периодического типа все корневые подпространства состоят из двух собственных функций, а для всех оставшихся условий они состоят из одной собственной функции и одной присоединенной функции. Во всех случаях система корневых функций рассматриваемой задачи образует базис Рисса в $\mathbb{H}$.

Случай периодических и антипериодических краевых условий исследовался в [1, 3, 5, 9, 23, 33–38, 50], если функции $P(x), Q(x) \in L_2(0, \pi)$. В частности, в [5, теорема 71] построен пример такой потенциальной матрицы $V(x)$, что соответствующее спектральное разложение расходится в $\mathbb{H}$. В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что корневые функции, соответствующие кратному собственному значению, образуют ортонормированный базис в соответствующем корневом подпространстве.

(a) Рассмотрим задачу (5), (6) с условиями периодического типа. Она имеет вид

$$\begin{gathered} -iy_1' + P(x)y_2 = \lambda y_1, \quad iy_2' + Q(x)y_1 = \lambda y_2, \\ y_1(0) + ay_1(\pi) = 0, \quad ay_2(0) + y_2(\pi) = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $a = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Обозначим $\tau_0 = (\varphi + \pi)/\pi + (i \ln r)/\pi$. Тогда задача (11) имеет две серии собственных значений

$$\lambda_{n,j} = \tau_0 + 2n + \varepsilon_{n,j},$$

где $n \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_{n,j} \to 0$ при $|n| \to \infty$, $j = 1, 2$. Отсюда, в частности, следует, что если $|n| > n_0$, то числа $\lambda_{n,j}$ расположены внутри окружностей радиуса $1/2$ с центрами в точках $\tau_0 + 2n$. Сопряженная задача имеет вид

$$\begin{gathered} -iz_1' + \bar{Q}(x)z_2 = \lambda z_1, \quad iz_2' + \bar{P}(x)z_1 = \lambda z_2, \\ \bar{a}z_1(0) + z_1(\pi) = 0, \quad z_2(0) + \bar{a}z_2(\pi) = 0. \end{gathered}$$

Обозначим через T множество тех номеров n, для которых $\lambda_{n,1} \neq \lambda_{n,2}$. Если T конечно, то из [4, с. 414] и базисности двумерных корневых подпространств, отвечающих сближающимся

Таблица 2

Случай	Класс	Условия на A_{ij}	Полнота	Базисность
I	УР	$A_{14}A_{23} \neq 0$, $(A_{12}+A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} \neq 0$	ДА	ДА
II(a)	РНУР	$A_{14}A_{23} \neq 0$, $(A_{12}+A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} = 0$, $A_{13} = A_{24} = 0$, $A_{12} = A_{34}$	ДА	ДА/НЕТ
II(b)	РНУР	$A_{14}A_{23} \neq 0$, $(A_{12}+A_{34})^2 + 4A_{14}A_{23} = 0$, $\lvert A_{13}\rvert + \lvert A_{24}\rvert + \lvert A_{12}-A_{34}\rvert > 0$	ДА	ДА/НЕТ
III	НЕР	$A_{14}A_{23} = 0$, $(A_{12}+A_{34})(\lvert A_{23}\rvert + \lvert A_{14}\rvert) \neq 0$	ДА/НЕТ	?/НЕТ
IV	ВЫР	$A_{14}A_{23} = 0$, $(A_{12}+A_{34})(\lvert A_{23}\rvert + \lvert A_{14}\rvert) = 0$	ДА/НЕТ	?/НЕТ

собственным значениям, установленной в [10,26,48,51], вытекает, что система корневых функций образует базис Рисса в $\mathbb{H}$. Предположим, что T бесконечно.

Теорема 10. *Система корневых функций задачи* (11) *является базисом Рисса тогда и только тогда, когда существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, такие, что для всех достаточно больших $|n|$ ($n \in T$) выполняются неравенства*

$$C_1 < \frac{|e_{12}(\pi, \lambda_{n,1})|}{|e_{21}(\pi, \lambda_{n,1})|} < C_2.$$

Обозначим через Ψ множество таких пар функций $(P(x), Q(x)) \in L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)$, что система корневых функций задачи (11) образует базис Рисса в $\mathbb{H}$, $\overline{\Psi} = (L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)) \setminus \Psi$,

Теорема 11. *Множества Ψ и $\overline{\Psi}$ всюду плотны в $L_1(0,\pi) \oplus L_1(0,\pi)$.*

(b) Рассмотрим случай условий, не являющихся периодическими. Класс (b) (см. с. 148) содержит множество различных краевых условий, например, условия, задаваемые матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & b & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & c & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Теорема 12. *Если регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия не являются условиями периодического типа, то система собственных и присоединенных функций задачи* (5), (6) *является базисом Рисса в $\mathbb{H}$ тогда и только тогда, когда спектр является асимптотически кратным.*

Выводы. В таблице 2 суммированы результаты о полноте и базисности для оператора (5), (6). Второй столбец определяет класс краевых условий (УР — усиленно регулярные, РНУР — регулярные, но не усиленно регулярные, НЕР — нерегулярные, ВЫР — вырожденные). ДА/НЕТ означает что указанное свойство может появляться или исчезать в зависимости от коэффициента $V(x)$; ?/НЕТ означает, что отсутствие данного свойства установлено для некоторого подмножества потенциалов $V(x) \in L_1(0,\pi)$, примеры, когда это свойство имеет место, неизвестны, стало быть, окончательное решение еще не получено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баскаков А. Г., Дербышев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом.// Изв. РАН. Сер. мат. — 2011. — *75*, № 3. — С. 3–28.
2. *Бияров Б. Н.* О спектральных свойствах корректных сужений и расширений оператора Штурма—Лиувилля// Диффер. уравн. — 1994. — *30*, № 12. — С. 2027–2032.
3. *Бурлуцкая М. Ш., Корнев В. В., Хромов А. П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями// Ж. вычисл. мат. мат. физ. — 2012. — *52*, № 8. — С. 1621–1632.

4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1967.
5. *Джаков П., Митягин Б. С.* Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера// Усп. мат. наук. — 2006. — *61*, № 4. — С. 77–182.
6. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. Темат. обз. — 2006. — *96*. — С. 1–105.
7. *Ильин В. А.* О связи между видом краевх условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора// Диффер. уравн. — 1994. — *30*, № 9. — С. 1516–1529.
8. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям конкретных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Сер. мат. — 1964. — № 2. — С. 82–93.
9. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и антипериодическими краевыми условиями// Изв. Саратов. гос. ун-та. Сер. мат. мех. информ. — 2013. — *13*, № 3. — С. 28–35.
10. *Лунев А. А., Маламуд М. М.* О базисности Рисса системы корневых векторов для 2×2 системы типа Дирака// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 3. — С. 1–6.
11. *Лунев А. А., Маламуд М. М.* О полноте системы корневых векторов для систем первого порядка. Применение к задаче Редже// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 3. — С. 256–261.
12. *Макин А. С.* О полноте системы корневых функций оператора Штурма-Лиувилля с выррожденными краевыми условиями// Диффер. уравн. — 2014. — *50*, № 6. — С. 835–839.
13. *Макин А. С.* О базисности систем корневых функций регулярных краевых задач для оператора Штурма—Лиувилля// Диффер. уравн. — 2006. — *42*, № 12. — С. 1646–1656.
14. *Макин А. С.* О сходимости разложений по корневым функциям периодической краевой задачи// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 4. — С. 452–457.
15. *Макин А. С.* Обратные задачи спектрального анализа для оператора Штурма—Лиувилля с регулярными краевыми условиями. I// Диффер. уравн. — 2007. — *43*, № 10. — С. 1334–1345.
16. *Макин А. С.* Обратные задачи спектрального анализа для оператора Штурма—Лиувилля с регулярными краевыми условиями. II// Диффер. уравн. — 2007. — *43*, № 12. — С. 1626–1636.
17. *Макин А. С.* О новом классе краевых задач для оператора Штурма—Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра// Диффер. уравн. — 2013. — *49*, № 2. — С. 260–264.
18. *Макин А. С.* О двухточечной краевой задаче для оператора Штурма—Лиувилля с неклассической асимптотикой спектра// Диффер. уравн. — 2013. — *49*, № 5. — С. 564–572.
19. *Макин А. С.* О базисных свойствах системы корневых функций оператора Штурма—Лиувилля с вырожденными краевыми условиями. I// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 10. — С. 1367–1382.
20. *Макин А. С.* О базисных свойствах системы корневых функций оператора Штурма—Лиувилля с вырожденными краевыми условиями. II// Диффер. уравн. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1610–1625.
21. *Маламуд М. М.* О полноте системы корневых векторов оператора Штурма—Лиувилля с общими краевыми условиями// Функц. анал. прилож. — 2008. — *42*, № 3. — С. 198–204.
22. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Диувилля и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1977.
23. *Митягин Б. С.* Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака// Докл. РАН. — 2003. — *393*, № 4. — С. 456–459.
24. *Михайлов В. П.* О базисности Рисса в $L^2(0,1)$// Докл. АН СССР. — 1962. — *144*, № 5. — С. 981–984.
25. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
26. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом// Совр. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 128–152.
27. *Lunyov A. A., Malamud M. M., Oridoroga L. L.* Completeness property of one-dimensional perturbations of normal and spectral operators generated by first-order systems/ `arXiv: 1807.05345v1 [math.SP]`.
28. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*. — P. 219–231.
29. *Birkhoff G. D.* Boundary-value and expansion problems of ordinary linear differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*. — P. 373–395.
30. *Birkhoff G. D., Langer R. E.* The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order// Proc. Am. Acad. Arts Sci. — 1923. — *58*. — P. 49–128.

31. *Coddington E. A. and Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. — New York: McGraw-Hill, 1955.
32. *Danford N. and Schwartz J. T.* Linear Operators. III. Spectral Operators. — New York: Wiley, 1971.
33. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — *61*, № 1. — P. 359–398.
34. *Djakov P., Mityagin B.* Bari—Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators// Math. Nachr. — 2010. — *283*, № 3. — P. 43–462.
35. *Djakov P., Mityagin B.* 1D Dirac operators with special periodic potentials// Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 2012. — *60*, № 1. — P. 59–75.
36. *Djakov P., Mityagin B.* Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// J. Approx. Theory. — 2012. — *164*, № 7. — P. 879–927.
37. *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators// J. Funct. Anal. — 2012. — *263*, № 8. — P. 2300–2332.
38. *Djakov P., Mityagin B.* Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators// Proc. Am. Math. Soc. — 2013. — *141*, № 4. — P. 1361–1375.
39. *Hoffman S.* Second-Order Linear Differential Operators Defined by Irregular Boundary Conditions/ Thesis. — Yale University, 1957.
40. *Lang P. and Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. I. Spectral properties// J. Math. Anal. Appl. — 1989. — *141*. — P. 538–558.
41. *Lang P. and Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. II. Analysis of cases// J. Math. Anal. Appl. — 1990. — *146*. — P. 148–191.
42. *Locker J.* Spectral Theory of Non-self-adjoint Two-point Differential Operators. — Amsterdam: North-Holland, 2003.
43. *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators: I. A priori estimates for the eigenvalues and completeness// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sec. A. — 1992. — *121*. — P. 279–301.
44. *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators: II. Asymptotic expansions and the characteristic determinant// J. Differ. Equations. — 1994. — *114*. — P. 72–287.
45. *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators: III. The eigenvalues and their asymptotic formulas// Rocky Mountain J. Math. — 1996. — *26*. — P. 679–706.
46. *Locker J.* The spectral theory of second-order two-point differential operators: IV. The associated projections and the subspace $S_\infty(L)$// Rocky Mountain J. Math. — 1996. — *26*. — P. 1473–1498.
47. *Lunyov A., Malamud M.* On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary-value problems for first-order systems and applications// J. Spectr. Theory — 2015. — *5*. — P. 17–70.
48. *Lunyov A., Malamud M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *441*, № 1. — P. 57–103.
49. *Malamud M., Oridoroga L.* On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first-order systems of ordinary differential equations// J. Funct. Anal. — 2012. — *263*. — P. 1939–1980.
50. *Mityagin B.* Spectral expansions of one-dimensional periodic Dirac operators// Dynam. PDE. — 2004. — *1*, № 2. — P. 125–191.
51. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — P. 777–810.
52. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — *29*. — P. 695–761.
53. *Stone M. H.* Irregular differential systems of order two and the related expansions problems// Trans. Am. Soc. — 1927. — *29*. — P. 23–53.
54. *Tamarkin J.* Sur quelques points de la theorie des equations differentielles lineaires ordinaires et sur la generalisation de la serie de Fourier// Rend. Circ. Matem. Palermo. — 1912. — *34*. — P. 345–382.
55. *Tamarkin J.* Some general problem of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in series of fundamental functions// Math. Z. — 1927. — P. 1–54.
56. *Walker P. W.* A nonspectral Birkhoff-regilar differential operator// Proc. Am. Math. Soc. — 1977. — *66*. — P. 187–188.

Макин Александр Сергеевич
МИРЭА — Российский технологический университет, Москва