ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 340, № 6, с. 736 - 738

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПРИ БОЛЬШОМ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 1995 г. В. Н. Денисов

Представлено академиком В.А. Ильиным 25.11.93 г.

Поступило 14.12.93 г.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотического поведения при большом времени t решения задачи Коши для уравнения теплопроводности.

В полупространстве $\{t \geq 0\} \equiv \{x, t: x \in E^N, t \geq 0\}$ рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \Delta u(x, t) \text{ в } \{t > 0\}, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in E^N, \tag{2}$$

где $\Delta \equiv \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ – оператор Лапласа.

Предполагается, что начальная функция $u_0(x)$ принадлежит классу А.Н. Тихонова [1] существования и единственности решения задачи Коши (1), (2), т.е. $u_0(x)$ непрерывна в E^N и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C(\varepsilon) > 0$ такая, что при всех $x \in E^N$ имеет место неравенство

$$|u_0(x)| < C(\varepsilon) e^{\varepsilon |x|^2}. \tag{3}$$

Символом $S_R^\alpha u_0(x)$ обозначим шаровые средние Рисса порядка $\alpha > -1$ от начальной функции $u_0(x)$:

$$S_R^\alpha u_0(x) = \frac{2}{B(\alpha + 1, N/2)\omega_N R^N} \times$$

$$\times \int\limits_{|x-y| \leq R} \left(1 - \frac{|x-y|^2}{R^2}\right)^\alpha u_0(y) dy =$$

$$= \frac{2}{B(\alpha + 1, N/2) R^N} \int_0^R \rho^{N-1} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^\alpha M(x, \rho; u_0) d\rho, \tag{4}$$

где

$$|x - y| = \left[\sum_{k=1}^{N} (x_k - y_k)^2\right]^{1/2},$$

$$\omega_N = 2\pi^{N/2} [\Gamma(N/2)]^{-1},$$

$M(x, \rho; u_0)$ – сферическое среднее функции $u_0(x)$ по поверхности сферы с центром в точке x радиуса ρ,

$$M(x, \rho; u_0) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int\limits_{|x-y| = \rho} u_0(y) dS_y.$$

Мы изучим вопрос о необходимых условиях существования при некотором $\nu > 0$ следующей степенной асимптотики решения задачи Коши (1), (2):

$$u(x, t) = A_0(x) + \frac{A_1(x)}{t^\nu} + \frac{Q(x, t)}{t^\nu}, \tag{5}$$

где

$$\lim_{t \to \infty} Q(x, t) = 0 \text{ равномерно по } x \text{ во всем } E^N, \tag{6}$$

и покажем, что эти необходимые условия выражаются в терминах существования у шаровых средних Рисса (4) порядка $\alpha \geq 2[\nu] + 1$ от начальной функции $u_0(x)$ согласованной степенной асимптотики при $R \to \infty$. Из асимптотической формулы (5) следует, что решение задачи Коши (1), (2) равномерно по $x \in E^N$ стабилизируются к $A_0(x)$ функции $A_0(x)$ со скоростью $t^{-\nu}$ при $t \to +\infty$. Известно (см. [2]), что предельные функции $A_0(x)$, $A_1(x)$

$$A_0(x) = \lim_{t \to \infty} u(x, t) \text{ равномерно по } x \in E^N, \tag{7}$$

$$A_1(x) = \lim_{t \to \infty} t^\nu [u(x, t) - A_0(x)] \text{ равномерно по } x \in E^N, \tag{8}$$

являются гармоническими в E^N функциями.

Если начальная функция $u_0(x)$ ограничена и существуют пределы (7), (8), то в силу известной

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

теоремы Лиувилля [3], функции $A_0(x)$ и $A_1(x)$ являются постоянными в E^N.

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть начальная функция* (2) *является непрерывной и ограниченной в* E^N:

$$|u_0(x)| < C, \tag{9}$$

и пусть существуют постоянные $\nu > 0$, A_0, A_1 *такие, что решение задачи Коши* (1), (2) *имеет при* $t \to +\infty$ *асимптотику*

$$u(x, t) = A_0 + \frac{A_1}{t^\nu} + \frac{Q(x, t)}{t^\nu}, \tag{10}$$

где

$$\lim_{t \to +\infty} Q(x, t) = 0 \text{ равномерно по } x \text{ во всем } E^N. \tag{11}$$

Тогда при $\alpha \geq 2[\nu] + 1$* *шаровые средние Рисса* (4) *порядка* α *от начальной функции* $u_0(x)$ *имеют при* $R \to \infty$ *асимптотику*

$$S_R^\alpha u_0(x) = A_0 + \frac{A_1 C_1}{R^{2\nu}} + \frac{Q_1(x, R)}{R^{2\nu}}, \tag{12}$$

где

$$\lim_{R \to \infty} Q_1(x, R) = 0 \text{ равномерно по } x \text{ во всем } E^N, \tag{13}$$

$$C_1 = \frac{2^\nu \Gamma\left(\frac{N + 2\alpha + 2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{N + 2\alpha + 2 - 2\nu}{2}\right)}.$$

Замечание 1. Теорема 1 представляет собой по существу тауберову теорему со степенным остатком [4] и перечисленные три ограничения: 1) ограниченность начальной функции $u_0(x)$, 2) существование равномерного во всем E^N предела (11), 3) неравенство $\alpha \geq 2[\nu] + 1$, связывающие порядок α средних Рисса начальной функции $u_0(x)$ со скоростью ν стабилизации решения задачи Коши (1), (2), представляют собой в совокупности систему тауберовых условий, гарантирующих существование степенной асимптотики (12) для шаровых средних Рисса порядка α от начальной функции $u_0(x)$.

Замечание 2. Легко видеть (см. [5, 6]), что перечисленные три тауберовых условия являются точными и не могут быть ослаблены или отброшены вовсе. Действительно, условие ограниченности начальной функции $u_0(x)$ является существенным, ибо, как известно [5], его отбрасывание приводит к тому, что даже равномерная в E^N стабилизация решения задачи (1), (2)

$$\lim_{R \to \infty} u(x, t) = A_0$$

не влечет за собой существование равномерного в E^N предела шаровых средних Рисса

$$\lim_{R \to \infty} S_R^\alpha u_0(x)$$

какого угодно порядка α от функции $u_0(x)$, имеющей на бесконечности не более чем степенной рост. Используя конструкцию примера из нашей работы [6], можно показать, что условие $\alpha \geq 2[\nu] + 1$, связывающее порядок средних Рисса от $u_0(x)$ со скоростью стабилизации решения задачи (1), (2), не может быть существенно ослаблено.

Из работы [6] также следует, что в случае, когда предел (11) существует равномерно по x лишь на компакте K, то стабилизация решения задачи (1), (2) не влечет существование равномерного на компакте K предела шаровых средних Рисса любого порядка $\alpha > 0$ в классе неограниченных начальных функций.

Обратная теорема к теореме 1, т.е. утверждение абелева типа, имеет место без тауберовых условий на порядок роста $u_0(x)$ и порядок α шаровых средних Рисса (4) от начальной функции.

Теорема 2. *Пусть функция* $u_0(x)$ *принадлежит классу А.Н. Тихонова* (3) *и пусть при некотором* ν, *удовлетворяющем неравенству*

$$0 < \nu < \frac{N + 2\alpha + 2}{2}, \quad \alpha > 0, \tag{14}$$

шаровые средние Рисса порядка $\alpha > -1$ *имеют при* $R \to +\infty$ *асимптотику*

$$S_R^\alpha u_0(x) = A_0(x) + \frac{A_1(x) C_1}{R^{2\nu}} + \frac{Q_1(x, R)}{R^{2\nu}}, \tag{15}$$

где

$$\lim_{R \to \infty} Q_1(x, R) = 0 \text{ равномерно по } x \text{ во всем } E^N. \tag{16}$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *имеет при* $R \to \infty$ *асимптотику* (5), (6).

Ясно, что в случае, когда начальная функция $u_0(x)$ является ограниченной, мы получаем из теорем 1 и 2 критерий существования асимптотики (10), (11) задачи Коши (1), (2).

Теорема 3. *Пусть начальная функция* $u_0(x)$ *является непрерывной и ограниченной в* E^N *и пусть* ν *удовлетворяет неравенству* (14). *Для того чтобы решение задачи Коши* (1), (2) *имело при* $t \to +\infty$ *асимптотику* (10), (11), *необходимо и достаточно, чтобы начальная функция* $u_0(x)$ *имела шаровые средние Рисса порядка* $\alpha \geq 2[\nu] + 1$, *для которых справедлива при* $R \to +\infty$ *асимптотика* (12), (13).

Замечание. Условие (14) гарантирует отсутствие неинтегрируемой особенности в точке $\rho = 0$ под знаком интеграла Пуассона, содержащего

* $[A]$ обозначает целую часть вещественного числа A.

шаровые средние Рисса порядка α от начальной функции

$$u(x, t) = \frac{2}{\Gamma(\frac{N+2\alpha+2}{2})} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho^{N+2\alpha+1} S^{\alpha}_{2\sqrt{t}\rho} u_0(x) d\rho.$$

Автор выражает глубокую благодарность акад. В.А. Ильину и чл.-корр. РАН В.А. Садовничему за постоянный интерес, стимулировавший возникновение настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* // Мат. сб. 1935. Т. 42. № 2. С. 199 - 216.
2. *Денисов В.Н.* // ДАН. 1993. Т. 329. № 3. С. 261 - 264.
3. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа М., 1957.
4. *Ganelius T.H.* // Lectuve Notes Math. 1971. № 232.
5. *Денисов В.Н.* // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 2. С. 290 - 305.
6. *Денисов В.Н.* // Там же. № 1. С. 7 - 16.