Доклады Академии наук
1992. Том 324, № 3

УДК 517.54 МАТЕМАТИКА

© Н.С. ДАИРБЕКОВ

ПОНЯТИЕ КВАЗИРЕГУЛЯРНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ n-МЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком Ю.Г. Решетняком 29 I 1992)

Квазирегулярные отображения областей пространства $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, являются естественным обобщением понятия квазирегулярной функции, т.е. решения уравнения Бельтрами $f_{\bar z} = \mu f_z$. В настоящей работе вводится класс отображений областей пространства $(\mathbf{R}^n)^k$ со значениями в $(\mathbf{R}^n)^m$, который при $k = m = 1$ совпадает с квазирегулярными отображениями областей $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, а при $n = 2$; $k, m \geqslant 1$ с классом решений многомерных комплексных уравнений Бельтрами. Изучаются его свойства и доказывается теорема устойчивости.

1. Для $n \geqslant 2$ и $s \geqslant 1$ обозначим $(\mathbf{R}^n)^s = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^n \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}^n$ (s раз). Элементы $x \in (\mathbf{R}^n)^s$ имеют вид $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $x_j \in \mathbf{R}^n$.

Пусть $n \geqslant 2$; $k, s \geqslant 1$ и $f\colon U \to (\mathbf{R}^n)^m$ – отображение области $U \subset (\mathbf{R}^n)^k$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(U)$. Матрицу Якоби $f'(x)$ отображения f будем рассматривать в соответствии с разложением $(\mathbf{R}^n)^k$ и $(\mathbf{R}^n)^m$ как блочную:

$$f'(x) = (f'_{ij}(x))_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,k}}, \qquad f'_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \in \mathbf{R}^{n \times n}.$$

Определение 1. Отображение f будем называть **К-квазирегулярным отображением** нескольких n-мерных переменных, если п.в. в U выполнено неравенство

$$\sum_{i,j} |f'_{ij}(x)|^n \leqslant K n^{n/2} \sum_{i,j} \det f'_{ij}(x).$$

Здесь и далее для матрицы $A \in \mathbf{R}^{s \times t}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,s\\ j=1,\ldots,t}}$, $|A| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$.

При $K < 1$ отображение f постоянно. Поэтому считаем, что $K \geqslant 1$. Обозначим: $\mathcal{Y}(K)$ – класс всех К-квазирегулярных отображений областей $(\mathbf{R}^n)^k$ в $(\mathbf{R}^n)^m$.

Замечание 1. При $k = m = 1$ класс $\mathcal{Y}(K)$ совпадает с классом К-квазирегулярных отображений в $\mathbf{R}^n$; такие отображения, называемые также отображениями с ограниченным искажением, хорошо изучены [1]. При $n = 2$; $k, m \geqslant 1$ класс $\mathcal{Y}(K)$ совпадает с классом решений многомерных комплексных уравнений Бельтрами $f_{\bar z} = \mu f_z$, если отождествить пространства $(\mathbf{R}^2)^k$ и $(\mathbf{R}^2)^m$ с $\mathbf{C}^k$ и $\mathbf{C}^m$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть $f_s\colon U \to (\mathbf{R}^n)^m$, $s = 1, 2, \ldots$, – последовательность отображений из $\mathcal{Y}(K)$, $K \geqslant 1$, сходящаяся в $L_{n,\mathrm{loc}}(U)$ к отображению f_0. Тогда $f_0 \in \mathcal{Y}(K)$.*

Теорема 1 доказывается методами, стандартными для теории отображений с ограниченным искажением.

2. Класс $\mathcal{Y}(K)$ естествен с точки зрения концепции устойчивости классов

отображений в C-норме А.П. Копылова [2, 3]. Чтобы показать это, введем еще один класс $\mathcal{Y}$.

Пусть g: $U \to (\mathbf{R}^n)^m$. Отображение g принадлежит классу $\mathcal{Y}$, если $g \in C^\infty(U)$ и для всех $x \in U$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ линейное отображение $g'_{ij}(x)$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ либо постоянно $(\equiv 0)$, либо есть сохраняющее ориентацию конформное преобразование $\mathbf{R}^n$. Этот класс появился в [3], где был поставлен вопрос о его устойчивости в C-норме.

Отметим, что при $k = m = 1$ и $n \geqslant 3$ класс $\mathcal{Y}$ есть объединение класса постоянных и класса мёбиусовых преобразований областей $\mathbf{R}^n$. Если $n = 2$, то $\mathcal{Y}$ – это класс голоморфных отображений областей $\mathbf{C}^k$ в $\mathbf{C}^m$. В случае $n \geqslant 3$; $k, m \geqslant 1$ каждая компонента g_i отображения $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ из класса $\mathcal{Y}$ обладает следующим свойством: для любого "полишара" $\mathcal{B} = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_k \subset U$, B_j – шары в $\mathbf{R}^n$, для каждого $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и любой точки $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) \in B_1 \times \dots \times B_{j-1} \times B_{j+1} \times \dots \times B_k$ отображение $t \mapsto g_i(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_k)$, $t \in B_j$, либо постоянно, либо есть сохраняющее ориентацию мёбиусово. Кроме того, имеет место

Т е о р е м а 2. *При $n \geqslant 3$ каждое отображение из $\mathcal{Y}$ рационально степени $\leqslant 2$ по каждой переменной, причем знаменатели в области определения в нуль не обращаются.*

Напомним определения функционалов близости в C-норме [2, 3]. Пусть $\rho \in (0, 1)$ и $B = B(x, r)$ – шар в $(\mathbf{R}^n)^k$. Если f: $B \to (\mathbf{R}^n)^m$, то $\xi_{\rho, B}(f, \mathcal{Y})$ означает точную нижнюю грань чисел ϵ, для которых найдется отображение g: $B \to (\mathbf{R}^n)^m$ из $\mathcal{Y}$ такое, что

$$|f(t) - g(t)| \leqslant \epsilon \operatorname{diam} f(B), \quad t \in B(x, \rho r).$$

Функционал

$$\xi_B(f, \mathcal{Y}) = \int_0^1 \xi_{\rho, B}(f, \mathcal{Y}) d\rho$$

измеряет близость f к классу $\mathcal{Y}$ внутри шара B. Для отображения f: $U \to (\mathbf{R}^n)^m$ положим

$$\xi(f, \mathcal{Y}) = \sup_{B \subset U} \xi_B(f, \mathcal{Y}); \quad \Xi(f, \mathcal{Y}) = \sup_{x \in U} \overline{\lim_{r \to 0}} \xi_{B(x, r)}(f, \mathcal{Y}).$$

Функционал ξ глобальной близости измеряет близость f к $\mathcal{Y}$ внутри каждого шара из области определения f, а функционал Ξ локальной близости – в бесконечно малых шарах.

Т е о р е м а 3. *Существует функция* $\alpha(\epsilon)$, $0 \leqslant \epsilon < \epsilon_0$, $\lim_{\epsilon \to 0} \alpha(\epsilon) = \alpha(0) = 0$, *такая, что если отображение f: $U \to (\mathbf{R}^n)^m$ принадлежит классу $W^1_{p, \mathrm{loc}}(U)$ с $p > kn$ и $\Xi(f, \mathcal{Y}) \leqslant \epsilon < \epsilon_0$, то $f \in \mathcal{Y}(1 + \alpha(\epsilon))$.*

Эта теорема означает, что отображениями, локально близкими к $\mathcal{Y}$, являются отображения класса $\mathcal{Y}(K)$. В случае четного n удается доказать, что, в свою очередь, отображения из $\mathcal{Y}(K)$ глобально близки к $\mathcal{Y}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть $n = 2l$. Существует функция $\beta(\epsilon)$, $0 \leqslant \epsilon < \infty$, $\lim_{\epsilon \to 0} \beta(\epsilon) = \beta(0) = 0$, такая, что если $f \in \mathcal{Y}(K)$ с $K \geqslant 1$, то $\xi(f, \mathcal{Y}) \leqslant \beta(K - 1)$.*

3. Построим по аналогии с [4, 5] уравнение Бельтрами для отображений из $\mathcal{Y}(K)$ в случае четного n, $n = 2l$, и K, близкого к 1.

Обозначим: $\Lambda^s(\mathbf{R}^{2l})$ – пространство внешних комплексных s-форм на $\mathbf{R}^{2l}$, снабженное евклидовой метрикой. Оператор Ходжа $*$ отображает Λ^s на Λ^{2l-s}. Относительно действия $*$ пространство Λ^l разлагается в прямую сумму пространств автодуальных и антиавтодуальных форм:

(1) $\Lambda^l(\mathbf{R}^{2l}) = \Lambda^+(\mathbf{R}^{2l}) \oplus \Lambda^-(\mathbf{R}^{2l}), \quad w = w^+ + w^-.$

Рассмотрим формы на $(\mathbf{R}^{2l})^k = \mathbf{R}_1^{2l} \oplus \mathbf{R}_2^{2l} \oplus \ldots \oplus \mathbf{R}_k^{2l}$ со значениями в $\mathbf{C}^m$. Положим:

$$\mathcal{L}^s = \left(\bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda^s(\mathbf{R}_j^{2l})\right)^m,$$

(2) $$\mathcal{L}^+ = \left(\bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda^+(\mathbf{R}_j^{2l})\right)^m,$$

$$\mathcal{L}^- = \left(\bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda^-(\mathbf{R}_j^{2l})\right)^m.$$

Определена естественная проекция

$$[\,\cdot\,]\colon\ (\Lambda^s((\mathbf{R}^{2l})^k)^m \to \mathcal{L}^s, \qquad \omega \mapsto [\omega].$$

Руководствуясь (2), введем пространства дифференциальных форм Ω^s, Ω^+ и Ω^- соответственно. Тогда (1) индуцирует разложение

$$\Omega^l = \Omega^+ \oplus \Omega^-, \quad \omega = \omega^+ + \omega^-.$$

Определим дифференциальные операторы

$$\mathcal{D}^+\colon\ \Omega^{l-1} \to \Omega^+, \quad \mathcal{D}^+\omega = [d\omega]^+;$$
$$\mathcal{D}^-\colon\ \Omega^{l-1} \to \Omega^-, \quad \mathcal{D}^-\omega = [d\omega]^-.$$

Назовем *уравнением Бельтрами* систему уравнений

(3) $$\mathcal{D}^+\alpha = \mu\mathcal{D}^-\alpha$$

относительно $\alpha \in \Omega^{l-1}$, где $\mu\colon\ U \to L(\mathcal{L}^-, \mathcal{L}^+)$ – измеримое отображение области $U \subset (\mathbf{R}^{2l})^k$ во множество линейных отображений из $\mathcal{L}^-$ и $\mathcal{L}^+$, причем

$$\|\mu\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in U} \|\mu(x)\| < 1.$$

При $k = m = 1$ такие уравнения рассматривались в [4, 5]. При $n = 2$ уравнение (3) совпадает с многомерным комплексным уравнением Бельтрами $f_{\bar z} = \mu f_z$. Исследование уравнения Бельтрами в значительной степени опирается на свойства комплексного преобразования Гильберта. Для (3) имеется соответствующий аналог: существует сингулярный интегральный оператор S, отображающий пространство $L_p((\mathbf{R}^{2l})^k, \mathcal{L}^+)$ в $L_p((\mathbf{R}^{2l})^k, \mathcal{L}^-), p > 1$, с ограниченной нормой $\|S\|_p$, $\|S\|_2 = 1$, такой, что для гладких финитных форм $\omega \in \Omega^{l-1}$

$$\mathcal{D}^-\omega = S(\mathcal{D}^+\omega).$$

Лемма 1. *Пусть $\alpha \in L_{p,\mathrm{loc}}(U, \mathcal{L}^{l-1})$, где $p > 1$, $\epsilon\|S\|_p < 1$, причем $\mathcal{D}^-\alpha$ и $\mathcal{D}^+\alpha$, понимаемые в обобщенном смысле, лежат в $L_{2,\mathrm{loc}}(U)$. Если α есть решение уравнения (3) с $\|\mu\|_\infty \leqslant \epsilon$, то $\mathcal{D}^\pm\alpha \in L_{p,\mathrm{loc}}(U)$ и для $\theta \in C_0^\infty(U, \mathbf{C})$ выполнено неравенство*

$$\|\theta\mathcal{D}^-\alpha\|_{L_p(U)} \leqslant \frac{2\|S\|_p}{1 - \epsilon\|S\|_p} \|\,|d\theta|\,\alpha\|_{L_p(U)}.$$

4. Пусть $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\colon U \to (\mathbf{R}^{2l})^m$. Возьмем форму $w \in C^1(\mathbf{R}^{2l}, \Lambda^{l-1}(\mathbf{R}^{2l}))$ такую, что $d^+w = (dw)^+ = 0, dw \neq 0$ и dw имеет постоянные коэффициенты. Положим

$$\alpha_f = ([f_1^*w], [f_2^*w], \ldots, [f_m^*w]), \qquad \alpha \in \Omega^{l-1}.$$

Теорема 5. *Существует функция* $\delta(K)$, $1 \leqslant K < K_0$, $\lim\limits_{K \to 1} \delta(K) = \delta(1) = 0$, *такая, что для отображения* $f \in \mathcal{Y}(K)$ *с* $K < K_0$ *форма* α_f *является решением некоторого уравнения Бельтрами* (3) *с* $\| \mu \|_\infty \leqslant \delta(K)$.

Из теоремы 5 и леммы 1 получается

Теорема 6. *Пусть* $f \in \mathcal{Y}(K)$ *с* $K < K_0$ *и* $p > 1$ *таково, что* $\delta(K) \| S \|_p < 1$. *Тогда* $f \in W^1_{lp,\mathrm{loc}}(U)$, *причем для* $\theta \in C_0^\infty(U)$ *выполнено неравенство*

$$\| \theta f' \|_{L_{lp}(U)} \leqslant C(p, K) \| \theta' | f \|_{L_{lp}(U)}.$$

Непосредственно получаем

Следствие 1. *Существует* $K_1 > 1$ *такое, что каждое отображение класса* $\mathcal{Y}(K)$ *с* $K < K_1$ *локально гёльдерово. Если* $W = \{ f\colon U \to (\mathbf{R}^{2l})^m \}$ – *семейство отображений из класса* $\mathcal{Y}(K)$ *с* $K < K_1$, *то* W *локально равностепенно непрерывно в* U, *если оно локально равномерно ограничено в* U.

Теорема 4 выводится из следствия 1 и теоремы 1.

5. При $n = 2$ теорема 6 может быть уточнена. Обозначим: $\mathfrak{C}(\epsilon)$, $0 \leqslant \epsilon < 1$, – класс решений всевозможных комплексных уравнений Бельтрами

$$f_{\bar z} = \mu f_z,$$

где $\mu\colon U \to \mathbf{C}^{km \times km}$ – измеримое отображение области $U \subset \mathbf{C}^k$ в пространство $(km \times km)$-матриц, причем $\| \mu \|_\infty \leqslant \epsilon$. Отображение $f\colon U \to \mathbf{C}^m$ принадлежит $W^1_{2,\mathrm{loc}}(U)$, а

$$f_{\bar z} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \bar z_1}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial \bar z_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial \bar z_k}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial \bar z_k} \right)$$

и аналогично для f_z. Как отмечалось, $\mathfrak{C}(\epsilon)$ совпадает с $\mathcal{Y}(K)$ при $n = 2$ и $\epsilon = \sqrt{(K-1)/(K+1)}$.

Теорема 7. *Пусть* U – *псевдовыпуклая область в* $\mathbf{C}^k$ *и* V – *компакт в* U. *Существует постоянная* $C = C_{U,V}$ *такая, что для любого отображения* $f\colon U \to \mathbf{C}^m$ *из класса* $\mathfrak{C}(\epsilon)$ *найдется голоморфное отображение* $g\colon U \to \mathbf{C}^m$ *такое, что*

$$| f(z) - g(z) | \leqslant C\epsilon \operatorname{diam} f(U)$$

для всех $z \in V$.

Институт математики
Сибирского отделения Российской Академии наук
Новосибирск

Поступило
18 II 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. 285 с. 2. *Копылов А.П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990. 222 с. 3. *Копылов А.П.* – Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 2, с. 83–111. 4. *Donaldson S.K., Sullivan D.P.* – Acta Math., 1989, vol. 163, p. 181–325. 5. *Iwaniec T., Martin G.* Quasiregular mappings in even dimensions. Preprint Inst. Mittag-Leffler, 1990.