G. V. Alekseev, Control problems for stationary models of magnetic hydrodynamics of a viscous incompressible fluid, *Dal'nevost. Mat. Zh.*, 2005, Volume 6, Number 1, 117–145

ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ. 2005. Том 6. № 1–2. С. 117–145

УДК 517.95
MSC2000 76W05

© Г.В. Алексеев*

Задачи управления для стационарных моделей магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости

Развивается методика исследования краевых задач и задач управления для стационарных моделей динамики вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости, рассматриваемых при неоднородных краевых условиях для скорости и электромагнитного поля. Приводится обзор результатов по исследованию краевых задач и задач управления для стационарных моделей магнитной гидродинамики, полученных на основе данной методики и с помощью других подходов.

Ключевые слова: *магнитная гидродинамика, вязкая жидкость, краевые задачи, задачи управления, системы оптимальности, разрешимость, локальная единственность*

Введение

Магнитная гидродинамика (МГД) представляет собой теорию макроскопического взаимодействия электрически проводящих жидкостей и электромагнитных полей. Она имеет важные приложения в астрономии и геофизике, а также в таких инженерных областях как управляемый термоядерный синтез, охлаждение ядерных реакторов жидкими металлами, электромагнитное литье металлов, МГД-генераторы и МГД-ионные двигатели.

Хорошо известно [1–3], что течение вязкой проводящей несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса для скорости и давления и уравнениями Максвелла без токов смещения для электромагнитного поля. Указанные уравнения связаны между собой через силу Лоренца и обобщенный закон Ома для движущейся жидкости. Однако, если уравнения Навье-Стокса следует рассматривать лишь в области Ω, занятой жидкостью, то уравнения Максвелла нужно рассматривать как в области Ω, так и в ее внешности $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. При этом электромагнитное поле должно удовлетворять уравнениям магнитной гидродинамики (вместе со скоростью и давлением) в Ω, уравнениям Максвелла в Ω_e и определенным условиям сопряжения на границе Γ области Ω. Подчеркнем, что указанный эффект, связанный с необходимостью рассмотрения уравнений Максвелла всюду в пространстве $\mathbb{R}^3$, существенно отличает задачи МГД от задач гидродинамики и серьезно осложняет их теоретическое исследование. Именно по этой причине большинство работ по исследованию уравнений МГД было посвящено изучению ситуаций, когда внешнее электромагнитное поле не является существенным, так что им можно пренебречь, либо свести его действие к соответствующим неоднородным краевым условиям для электромагнитного поля на границе области течения.

* Институт прикладной математики Дальневосточного Отделения Российской Академии наук, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: alekseev@iam.dvo.ru

Самым популярным примером такой ситуации является случай, когда граница Γ области Ω является идеально проводящей. Действительно, в этом случае в силу физических законов поведения электромагнитного поля (см., например, [4]), на идеально-проводящей границе необходимо обращаются в нуль нормальная компонента магнитного поля и тангенциальная компонента электрического поля. Исследованию данного класса задач МГД (при выполнении условия прилипания для скорости) были направлены усилия математиков в 60-е и 70-е годы прошлого столетия. Одной из первых работ в этом направлении явилась фундаментальная работа О.А. Ладыженской и В.А. Солонникова [6] (см. также их краткую заметку [5]). В этой работе детально исследованы три начально-краевые задачи для нестационарных уравнений МГД: упомянутая выше задача о течении жидкости в ограниченной области с идеально проводящей непроницаемой границей, задача о течении проводящей жидкости в области Ω и протекании электрического тока в токонесущем твердом проводнике Ω' при условии, что Ω и Ω' находятся в более широкой области, заполненной идеальным изолятором и ограниченной извне идеально проводящими стенками, и, наконец, задача исследования течения жидкости в ограниченной области, окруженной идеальным изолятором бесконечной протяженности. Основной вклад работы [6] состоит в том, что результаты о разрешимости указанных трех задач аналогичны соответствующим результатам о разрешимости начально-краевых задач для нестационарных уравнений Навье-Стокса. Аналогичные результаты были получены В.А. Солонниковым в [7] для стационарных уравнений МГД, рассматриваемых при соответствующих однородных краевых условиях.

После выхода статей [5–7] был опубликован еще ряд статей о разрешимости краевых и начально-краевых задач для уравнений МГД (отметим среди них в хронологическом порядке работы [8–59]). В преобладающем большинстве этих работ уравнения МГД рассматривались при однородных краевых условиях. Отметим среди них статьи G. Duvaut & J.-L. Lions [19], Ш. Сахаева и В.А. Солонникова [20], О.А. Ладыженской и В.А. Солонникова [23], монографию Г.Г. Брановера и А.Б. Цинобера [18], статьи M. Sermange & R. Temam [28], Z. Yoshida & Y. Giga [29]. Неоднородные краевые задачи для стационарной модели МГД с неоднородными условиями Дирихле либо условиями Неймана и смешанными краевыми условиями для скорости рассмотрены в [39] и [46], где доказана их локальная разрешимость. Ряд работ был посвящен исследованию начально-краевых задач для модернизированных уравнений МГД. Отметим среди них статьи Л.И. Ступялиса [21, 25, 26], Y. Giga & Z. Yoshida [31], D. Ebel & M.C. Shen [32, 33], В.Л. Поспелова [36], В.Н. Самохина [38], M. Spada & H. Wobig [44], В.А. Солонникова & G. Milone [49, 50] и G. Ströhmer [45]. В последней работе было введен альтернативный класс граничных условий для электромагнитного поля.

Еще один альтернативный способ задания краевых условий, более удобный в математическом плане, хотя и менее физичный, состоит в задании условий Дирихле как для скорости, так и для магнитного поля. Задачи с условиями Дирихле для скорости и магнитного поля изучались в работах R.H. Dyer & D.E. Edmuns [9], J. Förste [12, 13], G. Lassner [14], С.В. Чижонкова [30] и ряде других. Однако следует отметить, что задача Дирихле для уравнений МГД обладает существенным недостатком. Он заключается в том, что решение задачи Дирихле не удовлетворяет, вообще говоря, исходным уравнениям МГД, как было показано в [14], хотя и удовлетворяет другим уравнениям, получаемым путем использования определенной модификации закона Ома.

Мы также отметим, что ряд работ посвящен исследованию задач, которые выше были названы задачами сопряжения. Среди работ в этом направлении отметим, наряду с первыми пионерскими работами [5–7], статьи R.H. Dyer & D.E. Edmunds [8], D.E. Edmunds [10], E. Sanchez-Palencia [15, 16], а также цикл работ A.J. Meir & P.G. Schmidt [47, 53, 57]. В последнем цикле работ авторы рассматривают модельные задачи сопряжения, заключающиеся в нахождении движения проводящей жидкости в ограниченной области пространства, окруженной вакуумом или безграничным идеальным твердым диэлектриком. Подчеркнем, что в отличие от развиваемых ранее подходов к исследованию уравнений МГД, в которых происходит исключение давления и электрического поля, авторы развивают альтернативный вариант исследования рассматриваемых краевых задач для уравнений МГД. Он основан на исключении магнитного поля и использовании в качестве искомых величин скорости и плотности электрического тока, а также использовании давления и электростатического потенциала в качестве множителей Лагранжа, отвечающих условиям соленоидальности скорости и плотности электрического тока. Отметим, что разрешимость краевых задач в этих статьях доказана лишь при условии малости функций, стоящих в правых частях рассматриваемых граничных условий.

Настоящая работа преследует двоякую цель. Во-первых, мы изложим математический аппарат, применяемый при исследовании неоднородных краевых задач и задач управления для стационарных моделей МГД, и опишем основанную на данном аппарате методику их исследования. Во-вторых, мы сделаем обзор основных результатов по исследованию краевых задач и задач управления для стационарных моделей МГД вязкой жидкости, полученных с использованием разных методов, и проведем их сравнительный анализ.

1. Постановки краевых задач

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$ с границей Γ. Как известно [1, 2], математическая модель, описывающая процесс движения в Ω вязкой проводящей жидкости в присутствии электромагнитного поля, состоит из уравнений Навье-Стокса

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla P = \mathbf{f} + \mathbf{f_H}, \ \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \ \ \mathbf{f_H} = \frac{\mu_0}{\rho_0}\tilde{\mu}\mathbf{J}\times\mathbf{H}, \tag{1.1}$$

стационарных уравнений Максвелла без токов смещения

$$\operatorname{div}(\mu_0\tilde{\mu}\mathbf{H}) = 0, \ \ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \ \ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \ \ \operatorname{div}(\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}) = \rho_e \tag{1.2}$$

и обобщенного закона Ома (для движущейся жидкости)

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mu_0\tilde{\mu}\mathbf{u}\times\mathbf{H}) + \mathbf{J}_0. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{u}$, P, $\mathbf{H}$,$\mathbf{E}$ и $\mathbf{J}$ — скорость, давление, напряженность магнитного поля, напряженность электрического поля и плотность тока, $\mathbf{f}$ и $\mathbf{J}_0$ — заданные вектор-функции, имеющие смысл плотностей внешних гидродинамических источников и сторонних токов, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность жидкости, $\nu = \text{const}$ — коэффициент вязкости, σ — проводимость среды, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ — электрическая и магнитная проницаемости, ρ_e — плотность электрических зарядов. В первом уравнении в (1.1) $\mathbf{f_H}$ — плотность объемных электромагнитных сил (сила Лоренца [2]). Уравнения (1.1)–(1.3) должны быть дополнены граничными условиями на границе Γ области Ω. В качестве последних будем использовать следующие

$$\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}, \ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma = q, \ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k}. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{g}$, q и $\mathbf{k}$ — некоторые заданные на Γ функции, $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ. В частном случае, когда $q = 0$ и $\mathbf{k} = 0$, второе и третье условия в (1.4) означают, что граница Γ является идеально проводящей.

Исследование краевых задач магнитной гидродинамики начинается с исключения некоторых из электромагнитных величин, обычно плотности тока $\mathbf{J}$ и электрического поля $\mathbf{E}$.

Для этого следует заменить вектор $\mathbf{J}$ в выражении для силы Лоренца $\mathbf{f_H}$ и в левой части (1.3) вектором $\operatorname{rot}\mathbf{H}$ в соответствии со вторым уравнением Максвелла в (1.2). Предполагая, что параметры $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mu}$ и σ являются положительными константами и полагая $\mu_0\tilde{\mu} = \mu$, $\mu/\rho_0 = æ$, $p = P/\rho_0$, приходим к следующей системе уравнений:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - æ\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ æ = \mu/\rho_0, \tag{1.5}$$

$$\sigma^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \sigma^{-1}\mathbf{J}_0,\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \tag{1.6}$$

Ниже на задачу (1.4)–(1.6) будем ссылаться как на задачу 1. Отметим, что в рассматриваемой модели МГД плотность зарядов ρ_e считается неизвестной, причем она определяется после нахождения вектора $\mathbf{E}$ с помощью последнего уравнения в (1.2).

Вместо (1.5), (1.6) иногда рассматривают соответствующую систему в безразмерных переменных. Для ее вывода обозначим через L_0, U_0 и H_0 — характерные значения длины, скорости и напряженности магнитного поля. Представим размерные переменные $\mathbf{u}$ [м/с], $\mathbf{H}$ [А/м], p [Н/м^2]=[кг/м·с^2], $\mathbf{E}$ [В/м], $\mathbf{f}$ [м/с^2] и $\mathbf{J}_0$ [А/м^2] в следующем виде: $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}U_0$, $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}H_0$, $p = \tilde{p}\rho_0U_0^2$, $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}E_0$, $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{f}}U_0/L_0$, $\mathbf{J}_0 = \tilde{\mathbf{j}}J_0$, полагая $E_0 = \mu H_0U_0$, $J_0 = \sigma\mu H_0U_0$. Здесь $\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{p}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{j}}$ — соответствующие безразмерные переменные. Подставляя эти соотношения в (1.5) и (1.6) и отбрасывая знак $\sim$ над соответствующими безразмерными переменными, приходим к следующей безразмерной системе:

$$-(1/\mathrm{Re})\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - S\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} = \mathbf{f},\quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$
$$(1/\mathrm{Rm})\operatorname{rot}\mathbf{H} + \mathbf{E} + \mathbf{H}\times\mathbf{u} = \mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0.$$

Здесь безразмерные параметры Re, Rm и S имеют смысл числа Рейнольдса, магнитного числа Рейнольдса и параметра взаимодействия. Они определяются вместе с еще одним безразмерным параметром — числом Гартмана Ha соотношениями

$$\mathrm{Re} = U_0L_0/\nu,\ \mathrm{Rm} = \mu\sigma U_0L_0,\ S = \mu H_0^2/\rho_0U_0^2,\ \mathrm{Ha} = \sqrt{\mathrm{Re}\mathrm{Rm}S} = \sqrt{\sigma/\rho_0\nu}\,\mu H_0L_0. \tag{1.7}$$

2. Функциональные пространства. Математический аппарат исследования краевых задач и задач управления

2.1. Функциональные пространства. Ниже будем широко использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s\in\mathbb{R}$. Здесь D обозначает либо область Ω, либо границу Γ. При $s = 0$ получаем пространство $H^0(D) = L^2(D)$. Соответствующие пространства вектор-функций будем обозначать через $\mathbf{H}^s(D)$. Так, например, $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega)^3$. Нормы в пространствах $H^s(\Omega)$, $H^s(\Gamma)$ и их векторных аналогах будем обозначать через $\|\cdot\|_{s,\Omega} \equiv \|\cdot\|_s$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$. При $s = 0$ полагаем $\|\psi\|_{0,\Omega} = \|\psi\|$, $\|\psi\|_{0,\Gamma} = \|\psi\|_\Gamma$. Скалярное произведение в $L^2(\Omega)$ и $\mathbf{L}^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma)$ и $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ будем обозначать через $(\cdot,\cdot)$ либо $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Через $\|\cdot\|_1$ и $|\cdot|_1$ будем обозначать норму и полунорму в $H^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Отношение двойственности между пространством X и двойственным к нему X^* будем обозначать через $<\cdot,\cdot>_{X^*\times X}$ либо просто $<\cdot,\cdot>$. Предполагая, что $\Gamma\in C^{0,1}$, обозначим через $\gamma : H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma)$ оператор следа. Будем использовать следующие неравенства, вытекающие из теоремы вложения и непрерывности оператора следа:

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \le C_\Omega\|\mathbf{v}\|_1,\quad \|\gamma\mathbf{v}\|_{1/2,\Gamma} \le C_\Gamma\|\mathbf{v}\|_1\quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega),\ C_\Omega = \mathrm{const},\ C_\Gamma = \mathrm{const}. \tag{2.1}$$

Пусть $\mathcal{D}(\Omega)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций, $H_0^1(\Omega)$ = пополнение $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H^1(\Omega) \equiv \mathrm{Ker}\gamma$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^3$, $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0\}$, $L_0^2(\Omega) = \{p\in L^2(\Omega) : (p,1) = 0\}$, $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma) = \{q\in H^{1/2}(\Gamma) : (q,1)_\Gamma = 0\}$, $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{rot}\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega)\}$, $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) = \{\mathbf{v}\in\mathbf{L}^2(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{v}\in L^2(\Omega)\}$,

$\mathbf{H}^0(\mathrm{rot};\Omega) = \{\mathbf{h} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) : \mathrm{rot}\,\mathbf{h} = 0\}$, $\mathbf{H}^0(\mathrm{div};\Omega) = \{\mathbf{h} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) : \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0\}$, $\mathbf{H}(\Delta;\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \Delta\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$. Через $\mathbf{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)$ (либо $\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega)$) обозначим пополнение $\mathcal{D}(\Omega)^3$ в $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ (либо в $\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$).

Любой вектор $\mathbf{q}$, определенный на границе Γ области Ω может быть представлен в виде суммы нормальной и тангенциальной компонент $\mathbf{q}_n$ и $\mathbf{q}_T$. Если $\mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, то компоненты $\mathbf{q}_n$ и $\mathbf{q}_T$ определяются формулами $\mathbf{q}_n = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} \equiv q_n\mathbf{n}$, $\mathbf{q}_T = \mathbf{q} - \mathbf{q}_n \equiv (\mathbf{n}\times\mathbf{q})\times\mathbf{n}$. Здесь скаляр $q_n = \mathbf{q}\cdot\mathbf{n}$ – нормальная компонента векторного поля $\mathbf{q}$. Ясно, что $\mathbf{q}_T = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{n}\times\mathbf{q} = 0$. Через $\mathbf{H}^1_T(\Omega)$, $\mathbf{L}^2_T(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)$ обозначим подпространства пространств $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, состоящие из тангенциальных на Γ векторов с нормами, индуцируемыми соответственно из $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Наряду с замкнутыми (по норме $\|\cdot\|_1$) подпространствами $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1_T(\Omega)$ пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$ будем рассматривать двойственные к ним относительно $\mathbf{L}^2(\Omega)$ пространства $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ и $\mathbf{H}^{-1}_T(\Omega)$ с нормами $\|\cdot\|_{-1}$ и $\|\cdot\|_{-1,T}$, определяемыми соотношениями

$$\|\mathbf{f}\|_{-1} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega)} \frac{|<\mathbf{f},\mathbf{v}>|}{\|\mathbf{v}\|_1}, \ \|\mathbf{f}\|_{-1,T} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_T(\Omega)} \frac{|<\mathbf{f},\mathbf{v}>|}{\|\mathbf{v}\|_1}.$$

Отождествляя, как обычно, пространство $\mathbf{L}^2(\Omega)$ с его двойственным, имеем плотные и непрерывные вложения $\mathbf{H}^1_0(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1_T(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset \mathbf{H}^{-1}_T(\Omega)$. Через $H^{-1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{-1/2}_T(\Gamma)$ обозначим двойственные к пространствам $H^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)$ относительно соответственно пространств $L^2(\Gamma)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ и $\mathbf{L}^2_T(\Gamma)$.

Справедливы следующие формулы Грина [60]

$$(\mathbf{u}, \mathrm{grad}\,\varphi) + (\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \varphi) = <\gamma_n\mathbf{u}, \varphi>_\Gamma \equiv <\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}, \varphi>_\Gamma \ \ \forall\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega),\ \varphi \in H^1(\Omega), \tag{2.2}$$

$$(\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{w}) - (\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathbf{w}) = <\gamma_\tau\mathbf{u}, \mathbf{w}>_\Gamma \equiv <\mathbf{u}\times\mathbf{n}, \mathbf{w}>_\Gamma \ \forall\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega), \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{2.3}$$

$$(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + <\partial\mathbf{u}/\partial n, \mathbf{v}>_\Gamma \ \forall\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Delta;\Omega),\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{2.4}$$

В формулах (2.2), (2.3) и (2.4) $\gamma_n : \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ либо $\gamma_\tau : \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) \to \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ операторы нормального либо тангенциального следа соответственно, $\partial/\partial n : \mathbf{H}^1(\Delta;\Omega) \to \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ — оператор векторной нормальной компоненты, $<\cdot,\cdot>_\Gamma$ обозначает отношение двойственности между $H^{-1/2}(\Gamma)$ и $H^{1/2}(\Gamma)$ либо $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ и $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Введем теперь следующие дополнительные ограничения на область Ω:

(i) Ω — ограниченная конечно-связная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из $p_0 + 1$ связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p_0}$, где Γ_0 — граница неограниченной компоненты множества $\mathbb{R}^3\backslash\overline{\Omega}$, и существуют поверхности $\Sigma_i \in C^2$, $i = 1, 2, \ldots, q_0$ такие, что $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ при $i \neq j$, причем множество $\Omega = \Omega\backslash\bigcup_{i=1}^{q_0}\Sigma_i$ односвязно и липшицево;

(ii) $\Gamma \in C^{1,1}$.

Отметим, что числа q_0 и p_0, входящие в условие (i), являются топологическими характеристиками области Ω, называемыми первым и вторым числами Бетти. При этом $p_0 = 0$ тогда и только тогда, когда граница Γ связна, т. е. $\Gamma = \Gamma_0$, а $q_0 = 0$ тогда и только тогда, когда Ω односвязна. В общем случае q_0 обозначает число разрезов, которые нужно провести в Ω для превращения Ω в односвязную область, $p_0 + 1$ обозначает число компонент связности границы Γ.

Введем два подпространства гармонических в Ω векторов $\mathcal{H}(e) \subset \mathbf{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)$ и $\mathcal{H}(m) \subset \mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega)$, состоящие соответственно из всех решений однородных задач электрического либо магнитного типа, имеющих вид

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{v}\times\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma \text{ и } \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

$\mathcal{H}(e)$ и $\mathcal{H}(m)$ конечномерны [61], причем $\dim\mathcal{H}(e){=}p_0$, $\dim\mathcal{H}(m){=}q_0$, где числа p_0 и q_0 введены в (i). Через $\mathbf{S}^\perp$ обозначим ортогональное дополнение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ любого множества $\mathbf{S}\subset\mathbf{L}^2(\Omega)$. Положим $\mathbf{X}_T=\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega)\cap\mathcal{H}(m)^\perp$, $\mathbf{V}_T=\{\mathbf{v}\in\mathbf{X}_T:\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0\}$, $\mathbf{X}_N=\mathbf{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)\cap\mathcal{H}(e)^\perp$, $\mathbf{V}_N=\{\mathbf{v}\in\mathbf{X}_N:\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0\}$. При выполнении условий (i) и (ii) каждое из пространств $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{H}^1_T(\Omega)$, $\mathbf{X}_T$, $\mathbf{V}_T$, $\mathbf{X}_N$ и $\mathbf{V}_N$ является замкнутым в пространстве $\mathbf{H}^1(\Omega)$ [60, 61] В частности, $\mathbf{X}_T=\mathbf{H}^1_T(\Omega)\cap\mathcal{H}(m)^\perp$.

Введем билинейные формы $a_0:\mathbf{H}^1(\Omega)^2\to\mathbb{R}$ и $a_1:\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)^2\to\mathbb{R}$, где

$$a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega\nabla\mathbf{u}:\nabla\mathbf{v}d\Omega,\quad a_1(\mathbf{u},\mathbf{v})=\int_\Omega\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{v}d\Omega. \tag{2.5}$$

Из неравенства Фридрихса-Пуанкаре́ и [61] вытекает следующий результат.

Лемма 2.1. *При выполнении условия* (i) *существуют константы* $C_1=C_1(\Omega)$ *и* $\alpha_i=\alpha_i(\Omega)>0$, $i=0,1$, *с которыми выполняются неравенства*

$$|a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})|\le\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1\ \forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\mathbf{H}^1(\Omega)^2,\ a_0(\mathbf{v},\mathbf{v})\ge\alpha_0\|\mathbf{v}\|_1^2\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega), \tag{2.6}$$

$$|a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi})|\le C_1^2\|\mathbf{H}\|_1\|\mathbf{\Psi}\|_1,\ \forall(\mathbf{H},\mathbf{\Psi})\in\mathbf{H}^1(\Omega)^2,\ a_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{\Psi})\ge\alpha_1\|\mathbf{\Psi}\|_1^2\quad\forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_T. \tag{2.7}$$

Справедливо следующее ортогональное разложение пространства $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\mathbf{L}^2(\Omega)=\mathrm{rot}\,\mathbf{V}_T\oplus\nabla H^1_0(\Omega)\oplus\mathcal{H}(e). \tag{2.8}$$

Соотношение (2.8) означает, что любой вектор $\mathbf{u}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ допускает единственное ортогональное разложение вида $\mathbf{u}=\mathrm{rot}\,\mathbf{q}+\mathrm{grad}\,\varphi+\mathbf{e}$. Здесь векторный потенциал $\mathbf{q}\in\mathbf{V}_T$, скалярный потенциал $\varphi\in H^1_0(\Omega)$ и вектор $\mathbf{e}\in\mathcal{H}(e)$ однозначно определяются по $\mathbf{u}$.

Введем в дополнение к формам a_0 и a_1 в (2.5) билинейную форму $b:\mathbf{H}^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)\to\mathbb{R}$ и трилинейные формы c и $c_1:\mathbf{H}^1(\Omega)^3\to\mathbb{R}$, действующие по формулам

$$b(\mathbf{v},r){=}-\int_\Omega\mathrm{div}\,\mathbf{v}rd\Omega,\ c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}){=}\int_\Omega[(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{v}]\cdot\mathbf{w}d\Omega,\ c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u}){=}\int_\Omega(\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{u}d\Omega. \tag{2.9}$$

Введенные в (2.9) формы непрерывны, причем

$$c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v})=0\ \forall\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1(\Omega)\text{ с }\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0,\ \mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega), \tag{2.10}$$

$$c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u})=\int_\Omega(\mathbf{H}\times\mathbf{u})\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{\Psi}d\Omega=-c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{u},\mathbf{H})\quad\forall(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u})\in\mathbf{H}^1(\Omega)^3, \tag{2.11}$$

$$|c(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|\le\gamma_0'\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_1\le\gamma_0\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_1,\ \ \gamma_0=C_\Omega\gamma_0', \tag{2.12}$$

$$|c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u})|\le\gamma_1'\|\mathbf{\Psi}\|_1\|\mathbf{H}\|_1\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)}\le\gamma_1\|\mathbf{\Psi}\|_1\|\mathbf{H}\|_1\|\mathbf{u}\|_1\ \ \gamma_1=C_\Omega\gamma_1'. \tag{2.13}$$

Здесь γ_0' и γ_1' — константы, зависящие от Ω. Форма b в (2.9) удовлетворяет к тому же на паре $\mathbf{H}^1_0(\Omega)\times L^2_0(\Omega)$ inf-sup условию с константой $\beta>0$ [60]:

$$\inf_{r\in L^2_0(\Omega)}\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega)}\frac{b(\mathbf{v},r)}{\|\mathbf{v}\|_1\|r\|}\ge\beta. \tag{2.14}$$

Главную роль ниже будут играть, наряду с $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{H}^1_T(\Omega)$, $\mathbf{H}^1_0(\Omega),\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_T$, пространства $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)=\{\mathbf{h}\in\mathbf{H}^1(\Omega)\cap\mathcal{H}(m)^\perp:\mathrm{div}\,\mathbf{h}=0\}$, $H=\mathbf{H}^1(\Omega)\times\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, $H_{0T}=\mathbf{H}^1_0(\Omega)\times\mathbf{V}_T$, $V_{0T}=\mathbf{V}\times\mathbf{V}_T\subset H_{0T}\subset H$, а также двойственные к H_{0T} и V_{0T} пространства H^*_{0T} и V^*_{0T}. Пространства H, H_{0T} и V_{0T} являются гильбертовыми с гильбертовой нормой $(\mathbf{u},\mathbf{H})\mapsto\|(\mathbf{u},\mathbf{H})\|_1\equiv(\|\mathbf{u}\|_1^2+\text{æ}\|\mathbf{H}\|_1^2)^{1/2}$ (множитель æ при $\|\mathbf{H}\|_1^2$ здесь служит для уравнивания размерностей обоих слагаемых). Элементами пространства H^*_{0T} (либо V^*_{0T}) являются пары $(\mathbf{f},\mathbf{q})\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{V}_T^*$, (либо $(\mathbf{f},\mathbf{q})\in\mathbf{V}^*\times\mathbf{V}_T^*$), причем действие элемента $\mathbf{F}=(\mathbf{f},\mathbf{q})\in H_{0T}^*$ на элементе $(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in H_{0T}$ определяется соотношением

$$<\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})>_{H_{0T}^*\times H_{0T}}=<\mathbf{f},\mathbf{v}>_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)}+<\mathbf{q},\mathbf{\Psi}>_{\mathbf{V}_T^*\times\mathbf{V}_T}.$$

Ясно, что $\|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*}\equiv\|(\mathbf{f},\mathbf{q})\|_{H_{0T}^*}\le\|\mathbf{f}\|_{-1}+æ^{-1/2}\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{V}_T^*}$. Подобным образом определяется значение $<\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})>_{V_{0T}^*\times V_{0T}}$ для $\mathbf{F}=(\mathbf{f},\mathbf{q})\in V_{0T}^*$ и выводится оценка $\|\mathbf{F}\|_{V_{0T}^*}\le\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^*}+æ^{-1/2}\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{V}_T^*}$.

По аналогии с [60, с. 59] введем в рассмотрение линейные (канонические) операторы $S_{\mathbf{V}}\in\mathcal{L}(\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{V}^*)$ и $S_{V_{0T}}\in\mathcal{L}(H_{0T}^*,V_{0T}^*)$, действующие по формулам

$$<S_{\mathbf{V}}\mathbf{f},\mathbf{v}>=<\mathbf{f},\mathbf{v}>\quad\forall\mathbf{f}\in\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\quad\mathbf{v}\in\mathbf{V},$$
$$<S_{V_{0T}}\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})>=<\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})>\quad\forall\mathbf{F}\in H_{0T}^*,\quad(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in V_{0T}.$$

Ясно, что $\|S_{\mathbf{V}}\mathbf{f}\|_{\mathbf{V}^*}\le\|\mathbf{f}\|_{-1}$, $\|S_{V_{0T}}\mathbf{F}\|_{V_{0T}^*}\le\|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*}$.

Введем основную для дальнейшего изложения билинейную форму a формулой

$$a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi}))\equiv\nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})+\nu_1a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi})\equiv\nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})+\nu_m æ a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi}),\ \nu_1=1/\rho_0\sigma=æ\nu_m,$$

где величина $\nu_m=1/\mu\sigma$ имеет смысл “магнитной вязкости” [2]. В силу леммы 2.1 форма a непрерывна на $H\times H$ и коэрцитивна на подпространстве $H_{0T}\subset H$, причем

$$a((\mathbf{v},\mathbf{\Psi}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi}))\ge\nu_*(\|\mathbf{v}\|_1^2+æ\|\mathbf{\Psi}\|_1^2)\ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in H_{0T},\ \ \nu_*=\min(\alpha_0\nu,\alpha_1\nu_m).\tag{2.15}$$

Пусть $\hat{a}:H\times H\to\mathbb{R}$ — произвольная билинейная непрерывная форма, удовлетворяющая следующему условию “δ-малости” на подпространстве $V_{0T}\subset H$:

$$|\hat{a}((\mathbf{v},\mathbf{\Psi}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi}))|\le\delta\left(\|\mathbf{v}\|_1^2+æ\|\mathbf{\Psi}\|_1^2\right)\ \ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in V_{0T},\ \ 0\le\delta<\nu_*.\tag{2.16}$$

Рассмотрим для произвольного элемента $\mathbf{F}\in V_{0T}^*$ вариационную задачу, заключающуюся в нахождении такого вектора $(\mathbf{u},\mathbf{H})\in V_{0T}$, что

$$a((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi}))+\hat{a}((\mathbf{u},\mathbf{H}),(\mathbf{v},\mathbf{\Psi}))=<\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})>_{V_{0T}^*\times V_{0T}}\ \ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in V_{0T}.\tag{2.17}$$

Следующий результат вытекает из (2.15), (2.16) и теоремы Лакса-Мильграма.

Лемма 2.2. *Пусть при выполнении условий* (i), (ii) *непрерывные на $H\times H$ формы a и $\hat{a}$ удовлетворяют* (2.15) *и* (2.16). *Тогда:* 1) *билинейная форма $a+\hat{a}$ непрерывна на $H\times H$ и коэрцитивна на V_{0T} с константой коэрцитивности $\nu_*-\delta$;* 2) *задача* (2.17) *для любого элемента $\mathbf{F}\in V_{0T}^*$ имеет единственное решение $(\mathbf{u},\mathbf{H})\in V_{0T}$ и справедлива оценка*

$$\|(\mathbf{u},\mathbf{H})\|_1\le(\nu_*-\delta)^{-1}\|\mathbf{F}\|_{V_{0T}^*}.$$

Форму $b:\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)\to\mathbb{R}$, введенную в (2.9), формально можно рассматривать как билинейную форму $\tilde{b}:H_{0T}\times L_0^2(\Omega)$, определенную соотношением $\tilde{b}((\mathbf{v},\mathbf{\Psi}),r)=b(\mathbf{v},r)$. Из выполнения inf-sup условия (2.14) для b на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)$ вытекает выполнение inf-sup условия для формы $\tilde{b}$ на $H_{0T}\times L_0^2(\Omega)$, причем с той же константой $\beta>0$.

2.2. Поверхностная дивергенция и пространство $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma)$. При описании граничных значений электрического поля нам потребуется понятие поверхностной дивергенции. Введем его, следуя [62]. Пусть $\Gamma\in C^{1,1}$, $\varphi\in H^{3/2}(\Gamma)$ – произвольная функция. Определим для φ такую функцию $u=u_\varphi\in H^2(\Omega)$, что $\gamma u=\varphi$, и сопоставим функции u вектор $\mathbf{n}\times\nabla u|_\Gamma\times\mathbf{n}\in\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$. Можно показать, что так построенный вектор не зависит от выбора функции $u=u_\varphi$. Поэтому данная процедура определяет линейный непрерывный оператор $\nabla_\Gamma:H^{3/2}(\Gamma)\to\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, называемый оператором поверхностного градиента. Сопряженный к ∇_Γ оператор $\mathrm{div}_\Gamma:\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)\to H^{-3/2}(\Gamma)$, действующий по формуле $<\mathrm{div}_\Gamma\mathbf{\Psi},\varphi>=-<\mathbf{\Psi},\nabla_\Gamma\varphi>\ \forall\varphi\in H^{3/2}(\Gamma)$, $\mathbf{\Psi}\in\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, называется оператором поверхностной дивергенции. Обозначим через $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma)$ подпространство в $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma)$, состоящее из вектор-функций $\mathbf{q}$, поверхностная дивергенция $\mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{q}$ которых принадлежит $H^{-1/2}(\Gamma)$, с нормой $\|\mathbf{q}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma} = \|\mathbf{q}\|_{-1/2,\Gamma} + \|\,\mathrm{div}_\Gamma\,\mathbf{q}\|_{-1/2,\Gamma}$. В [62] (см. также [63]) доказан следующий результат.

Лемма 2.3. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с $\partial\Omega \in C^{1,1}$, либо Ω — выпуклый многогранник. Тогда пространство $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma)$ совпадает алгебраически и топологически с пространством тангенциальных следов функций из $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$, т. е.*

$$\mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma) = \{\mathbf{v}\times\mathbf{n}|_\Gamma : \mathbf{v}\in\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)\}.$$

Более того, существует линейный непрерывный оператор "поднятия"

$$R_\gamma : \mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma) \to \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega),$$

(*являющийся правым обратным к оператору γ_τ*) *такой, что*

$$\gamma_\tau \circ R_\gamma \mathbf{h} \equiv (R_\gamma\mathbf{h}\times\mathbf{n})|_\Gamma = \mathbf{h}\ \ \forall \mathbf{h}\in\mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma).$$

Следствием леммы 2.3 является сюрьективность оператора тангенциального следа $\gamma_\tau : \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) \to \mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma)$ для "регулярных" областей, т. е. ограниченных областей Ω с границей $\Gamma\in C^{1,1}$, либо выпуклых многогранников. Этот факт вместе с существованием непрерывного правого обратного оператора R_γ играет основополагающую роль при установлении условий на вектор-функцию $\mathbf{k}$ в (1.4), необходимых для определения вектора электрического поля $\mathbf{E}$, входящего в (1.4), (1.6). Подчеркнем, что лемма 2.3 доказана в [62] для регулярных областей. Основная трудность в перенесении результатов леммы 2.3 на более общий класс липшицевых областей, связана с тем обстоятельством, что в общем случае можно ввести несколько определений пространства $\mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma)$, эквивалентных между собой для регулярных областей, но не эквивалентных для нерегулярных областей. Более подробно об этом можно прочитать в [64].

2.3. Разрешимость краевых задач магнитного и электрического типов. При исследовании краевых задач магнитной гидродинамики существенно используются результаты о разрешимости неоднородных краевых задач магнитного либо электрического типа, описываемых соответственно уравнениями

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{J},\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \rho \text{ в } \Omega,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = q \text{ на } \Gamma, \tag{2.18}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{J},\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \rho \text{ в } \Omega,\ \mathbf{u}\times\mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma. \tag{2.19}$$

Хорошо известно (см. например, [4]), что при $\mathbf{J}=0$ и $\mathbf{k}=0$ задача (2.19) описывает электростатическое поле в области Ω, заполненной электрически однородной средой и ограниченной поверхностью с идеально проводящими стенками. Указанное поле создается зарядами, распределенными с плотностью ρ в области Ω. Точно так же при $\rho=0$ и $q=0$ задача (2.18) описывает соответствующее магнитостатическое поле, создаваемое токами, распределенными в области Ω с плотностью $\mathbf{J}$. Из определения введенных выше пространств $\mathcal{H}(e)$ и $\mathcal{H}(m)$ вытекает, что решениями однородной задачи (2.18) (при $\mathbf{J}=0, \rho=0, q=0$) из пространства $\mathbf{X}\equiv\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ являются функции $\mathbf{u}\in\mathcal{H}(m)$ и только они, тогда как множество решений однородной задачи (2.19) (при $\mathbf{J}=0,\rho=0,\mathbf{k}=0$) из $\mathbf{X}$ совпадает с пространством $\mathcal{H}(e)$.

Пусть $\mathbf{u}\in\mathbf{X}$. Подставляя $\mathbf{u}$ в (2.18), легко выводим, что выполняются следующие необходимые условия существования решения $\mathbf{u}$ задачи (2.18) в пространстве $\mathbf{X}$:

$$\rho\in L^2(\Omega),\ q\in H^{-1/2}(\Gamma),\ (\rho,1) - \langle q,1\rangle_\Gamma = 0,\ \mathbf{J}\in\mathbf{L}^2(\Omega),\ \mathrm{div}\,\mathbf{J}=0,\ \mathbf{J}\in\mathcal{H}(e)^\perp. \tag{2.20}$$

Оказывается, что эти условия и достаточны. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2.1. *При выполнении условия* (i) *задача магнитного типа* (2.18) *имеет решение* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (2.20). *Любое решение* $\mathbf{u}$ *задачи* (2.18) *представимо в виде*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_m + \mathrm{rot}\,\mathbf{p} + \mathrm{grad}\,\psi. \tag{2.21}$$

Здесь $\mathbf{u}_m$ *— гармоническое поле магнитного типа, векторный потенциал* $\mathbf{p} \in \mathbf{V}_N$ *является единственным соленоидальным решением задачи*

$$\tilde{a}_1(\mathbf{p},\mathbf{v}) \equiv (\mathrm{rot}\,\mathbf{p}, \mathrm{rot}\,\mathbf{v}) + (\mathrm{div}\,\mathbf{p}, \mathrm{div}\,\mathbf{v}) = (\mathbf{J},\mathbf{v})\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}_N \equiv \mathbf{H}_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega) \cap \mathcal{H}(e)^{\perp}, \tag{2.22}$$

а скалярный потенциал $\psi \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ *является единственным слабым решением неоднородной задачи Неймана*

$$\Delta\psi = \rho \ \text{ в } \Omega, \ \ \partial\psi/\partial n = q \text{ на } \Gamma. \tag{2.23}$$

Решение $\mathbf{u}$ *единственно с точностью до гармонических полей* $\mathbf{u}_m$ *магнитного типа. Нормальное решение* $\mathbf{u}_0$, *т. е. решение с минимальной* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *— нормой, единственно, имеет вид* $\mathbf{u}_0 = \mathrm{rot}\,\mathbf{p} + \mathrm{grad}\,\psi$ (*т. е. принадлежит пространству* $\mathbf{X} \cap \mathcal{H}(m)^{\perp}$), *причем с некоторой константой* C_m *для него справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}} \equiv \|\mathbf{u}_0\| + \|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_0\| + \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}_0\| \le C_m(\|\mathbf{J}\| + \|\rho\| + \|q\|_{-1/2,\Gamma}). \tag{2.24}$$

В частном случае, когда $\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$, задача (2.18) принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0, \ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \ \ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = q \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{2.25}$$

Предположим, что функция q удовлетворяет условиям $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $<q,1>_\Gamma = 0$. Из теоремы 2.1 тогда вытекает, что нормальное решение $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{X} \cap \mathcal{H}(m)^{\perp}$ задачи (2.25) существует, единственно и имеет вид $\mathbf{u}_0 = \nabla\psi$, где ψ – решение задачи Неймана (2.23) при $\rho = 0$. Предположим теперь, что в дополнение к (i) выполняется условие (ii), так что $\Gamma \in C^{1,1}$. Тогда с увеличением гладкости функции q гладкость функции ψ, а, следовательно, и нормального решения $\mathbf{u}_0$ задачи (2.25) также растет. В частности, при $q \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$ имеем в силу свойства эллиптической регулярности для задачи (2.23), что $\psi \in H^{1+s}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{u}_0 \in \mathbf{X} \cap \mathbf{H}^s(\Omega)$ $\forall s \in [0,1]$, так что справедливо

Следствие 2.1. *Пусть при выполнении условий* (i) $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $<q,1>_\Gamma = 0$. *Тогда нормальное решение* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{X} \cap \mathcal{H}(m)^{\perp}$ *задачи* (2.25) *существует, единственно и выполняется оценка* $\|\mathbf{u}_0\|_{\mathbf{X}} \le C_N\|q\|_{-1/2,\Gamma}$. *Если, более того,* $\Gamma \in C^{1,1}$, *а* $q \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$, *где* $s \in [0,1]$ *– любое число, то* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^s(\Omega)$, *причем с некоторой константой* C_N^s, *зависящей от* s, *выполняется оценка* $\|\mathbf{u}_0\|_{s,\Omega} \equiv \|\nabla\psi\|_{s,\Omega} \le C_N^s\|q\|_{-1/2+s,\Gamma}$.

Рассмотрим теперь задачу электрического типа (2.19). Будем предполагать, что выполняются условия (i), (ii) и следующие условия:

$$\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \ \ \rho \in L^2(\Omega), \ \ \mathbf{k} \in \mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma), \tag{2.26}$$

$$(\mathbf{J},\mathbf{v}) - <\mathbf{k},\mathbf{v}>_\Gamma = 0\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}(m), \ \mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0, \ (\mathbf{J} - \mathrm{rot}\,R_\gamma\mathbf{k})\cdot\mathbf{n} = 0 \ \text{ в } \ H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.27}$$

Здесь $R_\gamma : \mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma) \to \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ — оператор поднятия, введенный в лемме 2.3, так что функция $\mathbf{u_k} = R_\gamma\mathbf{k}$ удовлетворяет условиям $\mathbf{u_k} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$, $\mathbf{u_k} \times \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k}$, $\|\mathbf{u_k}\|_{\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)} \le C_\gamma\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma}$, $C_\gamma = \|R_\gamma\|$.

Теорема 2.2. *При выполнении условий* (i), (ii) *задача электрического типа* (2.19) *имеет решение* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega) \cap \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (2.26) *и* (2.27). *Любое решение* $\mathbf{u}$ *задачи* (2.19) *представимо в виде*

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathrm{rot}\,\mathbf{q} + \mathrm{grad}\,\varphi, \tag{2.28}$$

Здесь $\mathbf{u}_e$ *— гармоническое поле электрического типа, скалярный потенциал* $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *является единственным решением однородной задачи Дирихле*

$$\Delta\varphi = \rho \text{ в } \Omega,\ \varphi = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{2.29}$$

а векторный потенциал $\mathbf{q}\in\mathbf{V}_T$ *является единственным соленоидальным решением задачи*

$$\tilde{a}_1(\mathbf{q},\mathbf{v}) = (\mathbf{J},\mathbf{v}) + <\mathbf{k},\mathbf{v}>_\Gamma\ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{X}_T \equiv \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)\cap\mathbf{H}_0(\mathrm{div};\Omega)\cap\mathcal{H}(m)^\perp. \tag{2.30}$$

Нормальное решение $\mathbf{u}_0$ *единственно, имеет вид* $\mathbf{u}_0 = \mathrm{rot}\,\mathbf{q} + \nabla\varphi$, *т. е. принадлежит пространству* $\mathbf{X}\cap\mathcal{H}(e)^\perp$, *причем для него выполняется оценка*

$$\|\mathbf{u}_0\|_\mathbf{X} \le C_e(\|\mathbf{J}\| + \|\rho\| + \|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma}). \tag{2.31}$$

В частном случае, когда $\mathbf{J} = 0$, $\rho = 0$, задача (2.19) принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0,\ \ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0,\ \ \mathbf{u}\times\mathbf{n} = \mathbf{k}\ \ \text{ на }\ \ \Gamma. \tag{2.32}$$

Предположим, что функция $\mathbf{k}$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{k}\in\mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma),\ <\mathbf{k},\mathbf{v}>_\Gamma = 0\ \forall\mathbf{v}\in\mathcal{H}(m),\ (\mathrm{rot}\,R_\gamma\mathbf{k})\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ в } H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.33}$$

Из теоремы 2.2 тогда вытекает, что нормальное решение $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{X}\cap\mathcal{H}(e)^\perp$ задачи (2.32) существует, единственно и имеет вид $\mathbf{u}_0 = \mathrm{rot}\,\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ – решение задачи (2.30) при $\mathbf{J} = 0$, причем для $\mathbf{u}_0$ выполняется оценка $\|\mathbf{u}_0\|_\mathbf{X} \equiv \|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{q}\|_\mathbf{X} = \|\,\mathrm{rot}\,\mathbf{q}\| \le C_e\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma}$.

С увеличением гладкости функции $\mathbf{k}$ гладкость векторного потенциала $\mathbf{q}$, а следовательно и решения $\mathbf{u}$ задачи (2.32), также растет. Это вытекает из следующей теоремы:

Теорема 2.3. *Пусть при выполнении условий* (i), (ii) *пространство* $\mathbf{X}^s$ *определяется соотношениями* $\mathbf{X}^s = \{\mathbf{v}\in\mathbf{X} : \mathbf{v}\times\mathbf{n}\in\mathbf{H}^s(\Gamma)\}$, $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{X}^s} = \|\mathbf{v}\|_\mathbf{X} + \|\mathbf{v}\times\mathbf{n}\|_{s,\Gamma}$, *где* $0 < s \le 1/2$. *Тогда любой элемент* $\mathbf{u}\in\mathbf{X}^s$ *принадлежит пространству* $\mathbf{H}^{1/2+s}(\Omega)$, *причем с некоторой константой* C_D^s, *зависящей от* s, *но не зависящей от* $\mathbf{u}$, *выполняется оценка*

$$\|\mathbf{u}\|_{1/2+s,\Omega} \le C_D^s(\|\mathbf{u}\|_\mathbf{X} + \|\mathbf{u}\times\mathbf{n}\|_{s,\Gamma}).$$

Из теоремы 2.3, доказанной в [65] для липшицевых многогранников, вытекает

Следствие 2.2. *Пусть выполняются условия* (i), (ii), (2.33), *причем* $\mathbf{k}\in\mathbf{H}^s(\Gamma)$, *где* $s\in(0,1/2]$ *— любое число. Тогда нормальное решение* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{X}\cap\mathcal{H}(e)^\perp$ *задачи* (2.32) *существует, единственно, принадлежит пространству* $\mathbf{H}^{1/2+s}(\Omega)$ *и с некоторой константой* $\tilde{C}_D^s$ *выполняется оценка*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{1/2+s,\Omega} \le \tilde{C}_D^s\|\mathbf{k}\|_{s,\Gamma}.$$

Приведенные выше теоремы о разрешимости задач (2.18) и (2.19) доказаны в [66] и [67] для областей с границей $\Gamma\in C^\infty$. Отметим также работы [68–78], в которых исследованы те или иные аспекты, касающиеся задач (2.18) и (2.19), а также близких задач векторного анализа. В [71] указанные задачи исследуются на основе пространств Гельдера C^α. В [72] построенная в [66, 67] теория была обобщена на ограниченные области с липшицевыми границами с использованием L^p-пространств (вместо $L^2(\Omega)$) для "оптимальных" значений p. В [73] рассмотрена задача смешанного типа для ограниченной области с липшицевой границей, отвечающая ситуации, когда на одной части границы задается нормальная компонента векторного поля, а на другой – тангенциальная компонента. В [75, 65] исследованы вопросы непрерывности вложений $\mathbf{X}_N\subset\mathbf{H}^s(\Omega)$ и $\mathbf{X}_T\subset\mathbf{H}^s(\Omega)$ при некотором $s > 1/2$ и гладкости решений задач (2.18) и (2.19) для липшицевых многогранников. В [76, 77] предложен альтернативный подход к решению задач вида (2.18), (2.19) и их "смешанного аналога" для области Ω с границей $\Gamma\in C^2$. Он основан на вариационном принципе для определенных скалярных и векторных потенциалов, введенном в [70] для магнитостатистической задачи и далее использованном в [74] для решения задачи нахождения скорости течения жидкости по ее вихрю. Подробные доказательства теорем 2.1–2.3 при минимальных условиях на исходные данные можно найти в [78], где также приведены точные выражения для констант C_m и C_e.

Обратимся к исходной задаче 1. Предположим в дополнение к (i), (ii), что

(iii) $\mathbf{k} \in \gamma_\tau \mathbf{H}^0(\mathrm{rot};\Omega) \subset \mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma;\Gamma)$.

Из леммы 2.3 вытекает, что (iii) является необходимым условием существования решения задачи 1, а из теоремы 2.3 следует, что (iii) заведомо выполняется, если вектор $\mathbf{k}$ удовлетворяет условиям (2.33). При выполнении условия (iii) существует (не единственная) вектор-функция $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ такая, что

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E}_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{E}_0 \times \mathbf{n} = \mathbf{k} \text{ на } \Gamma. \tag{2.34}$$

Из (2.34) следует, что $\mathbf{E}_0$ имеет смысл вектора электрического поля, входящего в модель (1.4)–(1.6). Однако, как будет вытекать из результатов разд. 3, вектор $\mathbf{E}_0$ не обязан совпадать с компонентой $\mathbf{E}$ искомого решения $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E})$ задачи 1.

Ниже при введении понятия слабого решения задачи 1 нам будет удобно ввести условие $\mathrm{div}\mathbf{H}{=}0$ в определение функционального пространства для магнитного поля, в качестве которого будем использовать пространство $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, а пробные функции для магнитного поля будем выбирать из его подпространства $\mathbf{V}_T{\subset}\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$. Что касается условия $\mathrm{div}\,\mathbf{u}{=}0$, то оно будет использоваться в качестве самостоятельного уравнения. В соответствии с теорией абстрактных смешанных задач гидродинамики [60, с. 56] это позволит искать компоненту (скорость) $\mathbf{u}$ решения задачи 1 в $\mathbf{H}^1(\Omega)$, не заботясь о выполнении условия $\mathrm{div}\mathbf{u}{=}0$, а пробные функции для $\mathbf{u}$ выбирать из пространства $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

2.4. Основные этапы исследования задач управления. Этот раздел мы закончим описанием методики исследования задач управления для стационарных моделей магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. С помощью данной методики, разработанной сначала применительно к задачам управления для стационарных моделей тепломассопереноса в [79–86], задачи управления сводятся к абстрактным гладко-выпуклым экстремальным задачам в гильбертовых пространствах, где в качестве основного ограничения используется слабая (в смысле обобщенных функций) формулировка краевой задачи. Далее к полученной задаче применяется хорошо развитая теория решения задач такого типа (см., например, [87]). Указанная методика включает следующие этапы.

1. Введение оператора краевой задачи. На этом этапе вводятся два функциональных пространства (гильбертовых или банаховых) X и Y и оператор $F{:}X{\to}Y$, действующий из X в Y. X имеет смысл пространства, в котором ищется решение (сильное или слабое) исходной краевой задачи, Y имеет смысл пространства, которому принадлежат исходные данные (правые части уравнений и граничных условий), а F описывает соответствующий оператор краевой задачи. Все исходные данные задачи разбиваются на две группы: группу фиксированных данных u_0 и группу управлений u, а исходная краевая задача сводится к отысканию решения (состояния) $\mathbf{x} \in X$ операторного уравнения

$$F(\mathbf{x}, u) = 0 \ (\in Y). \tag{2.35}$$

2. Исследование свойств решения краевой задачи. На данном этапе устанавливаются достаточные условия на исходные данные, обеспечивающие существование и (локальную) единственность решения задачи (2.35), а также изоморфизм оператора, полученного линеаризацией оператора F по переменным состояния, и выводятся априорные оценки нормы решения через нормы управлений. Они позволяют сделать вывод об ограниченности решения в случае, когда исходные данные и управления ограничены.

3. Формулировка и исследование задачи управления. На этом этапе вводится функционал качества J, отвечающий цели исследования, зависящий как от состояния $\mathbf{x}$, так и управления u. В предположении, что u принадлежит выпуклому замкнутому множеству K, формулируется исходная задача управления в виде задачи условной минимизации

$$J(\mathbf{x}, u) \to \inf, \quad F(\mathbf{x}, u) = 0, \quad u \in K. \tag{2.36}$$

Далее исследуется разрешимость и единственность решения задачи (2.36).

4. Обоснование принципа Лагранжа. Вывод системы оптимальности. На данном этапе в дополнение к основным пространствам X и Y вводятся двойственные пространства X^* и Y^*, лагранжиан $\mathcal{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + <\mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u)>_{Y^* \times Y}$, где $\lambda_0 \geq 0$, и вычисляется частная производная Фреше $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \to Y$ от оператора F в точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ локального минимума в задаче (2.36). Доказывается фредгольмовость оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ и выводятся необходимые условия оптимальности. Они состоят из уравнения Эйлера–Лагранжа

$$F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* + \lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = 0 \text{ в } X^*,$$

где $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* : Y^* \to X^*$ – сопряженный к $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ оператор, и принципа минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \; \forall u \in K,$$

образующих вместе с (2.35) *систему оптимальности* для задачи (2.36).

5. Теоретический и численный анализ системы оптимальности.

Описанная методика представляет собой универсальную в определенном смысле процедуру, которую можно применять при исследовании задач управления для многих моделей механики сплошной среды. Использование ее не требует для вывода и обоснования системы оптимальности малости исходных данных либо основных параметров (чисел Рейнольдса, Гартмана и др.) исходной краевой задачи. Это существенно упрощает процедуру ее вывода и сводит задачу ее построения к проверке ряда условий, обеспечивающих справедливость указанной теории. Роль этих условий играют непрерывная дифференцируемость функционала качества и операторов модели по переменным состояния (скорости, давлению, магнитному полю), что обычно имеет место, их выпуклая зависимость от управляющих параметров, которая, как правило, подразумевается, и фредгольмовость оператора $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ в точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})$ локального минимума для задачи (2.36). Данная методика была применена в цикле работ [88–99] при исследовании задач управления для стационарной модели МГД (1.5), (1.6), а также для стационарных моделей МГД вязкой теплопроводной жидкости, рассматриваемых при различных краевых условиях. Более детальная схема ее применения и сравнительный анализ полученных результатов будут приведены в следующем разделе.

3. Определение слабого решения задачи 1. Постановка задачи управления. Обзор основных результатов

Пусть в дополнение к условиям (i)–(iii) выполняются условия
(iv) $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$; (v) $\mathbf{J}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $q \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$.

Предположим, что четверка $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E}) \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega}) \times (\mathbf{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)) \times C^1(\overline{\Omega}) \times \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ является классическим решением задачи 1. Умножим первое уравнение в (1.5) на функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Учитывая формулы (2.2) и (2.4), получим

$$\begin{gathered}\nu \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega + \int_\Omega [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} d\Omega - æ \int_\Omega (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v} p \, d\Omega = \\ = <\mathbf{f}, \mathbf{v}> \equiv <\mathbf{f}, \mathbf{v}>_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \;\; \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Точно также умножим первое уравнение в (1.6) на функцию $\rho_0^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}$, где $\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_T$, и проинтегрируем по области Ω. Учитывая в силу (2.3), (1.4) и (2.34), что

$$(\mathbf{E},\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}) = <\mathbf{E}\times\mathbf{n},\mathbf{\Psi}>_\Gamma = <\mathbf{k},\mathbf{\Psi}>_\Gamma = <\mathbf{E}_0\times\mathbf{n},\mathbf{\Psi}>_\Gamma = (\mathbf{E}_0,\operatorname{rot}\mathbf{\Psi})\ \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{H}^1(\Omega), \quad (3.2)$$

будем иметь

$$\nu_1\int_\Omega \operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}d\Omega + æ\int_\Omega(\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{u}d\Omega = <\mathbf{l},\mathbf{\Psi}>\ \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_T. \quad (3.3)$$

Здесь $<\mathbf{l},\mathbf{\Psi}>\equiv(\nu_1\mathbf{J}_0,\operatorname{rot}\mathbf{\Psi})+\rho_0^{-1}<\mathbf{k},\mathbf{\Psi}>_\Gamma = (\nu_1\mathbf{J}_0+\rho_0^{-1}\mathbf{E}_0,\operatorname{rot}\mathbf{\Psi})\ \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_T$, где $\nu_1 = 1/\rho_0\sigma$. Используя обозначения разд. 2 и (2.11), перепишем тождества (3.1), (3.3) в виде

$$\nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + c(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) - æc_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = <\mathbf{f},\mathbf{v}>\ \ \forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega),$$
$$\nu_1 a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi}) + æc_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u}) = <\mathbf{l},\mathbf{\Psi}>\ \ \forall\mathbf{\Psi}\in\mathbf{V}_T$$

и сложим их. В результате приходим к слабой формулировке задачи 1. Она заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u},\mathbf{H},p)\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)$, удовлетворяющей тождеству

$$\begin{aligned}\nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu_1 a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi}) + c(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) + æ[c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v})] =\\ = <\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})>\ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in H_{0T}\equiv\mathbf{H}_0^1(\Omega)\times\mathbf{V}_T\end{aligned} \quad (3.4)$$

и условиям

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,\ \ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma,\ \ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = q \text{ на } \Gamma. \quad (3.5)$$

Здесь $\mathbf{F}: H_{0T}\to\mathbb{R}$ — линейный функционал, действующий по формуле

$$<\mathbf{F},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})> = <\mathbf{f},\mathbf{v}> + <\mathbf{l},\mathbf{\Psi}> \equiv <\mathbf{f},\mathbf{v}> + (\nu_1\mathbf{J}_0,\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}) + \rho_0^{-1} < \mathbf{k},\mathbf{\Psi}>_\Gamma. \quad (3.6)$$

Из условий (iii), (iv), (v), (2.1) и (2.7) следует, что $\mathbf{F}\in H_{0T}^*$, причем

$$\|\mathbf{F}\|_{H_{0T}^*}\le M_1,\ M_1 = \|\mathbf{f}\|_{-1} + æ^{1/2}(C_1\nu_m\|\mathbf{J}_0\| + C_\Gamma\mu^{-1}\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\Gamma}). \quad (3.7)$$

Пусть тройка $(\mathbf{u},\mathbf{H},p)$ является решением задачи (3.4), (3.5). Рассматривая сужение (3.4) на $V_{0T}\equiv\mathbf{V}\times\mathbf{V}_T$, заключаем, что пара $(\mathbf{u},\mathbf{H})$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}\nu a_0(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \nu_1 a_1(\mathbf{H},\mathbf{\Psi}) + c(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{v}) + æ[c_1(\mathbf{\Psi},\mathbf{H},\mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\mathbf{v})] =\\ <\tilde{\mathbf{F}},(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})>\ \forall(\mathbf{v},\mathbf{\Psi})\in V_{0T},\ \tilde{\mathbf{F}} = S_{V_{0T}}\mathbf{F}.\end{aligned} \quad (3.8)$$

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iii). *Если четверка функций* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,\ \mathbf{E})\in\mathbf{C}^2(\overline{\Omega})\times(\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})\cap\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega))\times C^1(\overline{\Omega})\times\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$ *является классическим решением задачи 1, то пара* $(\mathbf{u},\mathbf{H})$ *принадлежит* $\mathbf{H}^1(\Omega)\times\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ *и является решением задачи* (3.5), (3.8), *где функционал* $\mathbf{F}: H_{0T}\to\mathbb{R}$ *определяется соотношением* (3.6).

Справедлив и обратный в определенном смысле результат.

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия* (i)–(v) *и пусть* $(\mathbf{u},\mathbf{H})\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$ — *решение задачи* (3.5), (3.8). *Тогда существуют такие функции* $p\in L_0^2(\Omega)$ *и* $\mathbf{E}\in\mathbf{H}^0(\operatorname{rot};\Omega)$, *однозначно определяемые парой* $(\mathbf{u},\mathbf{H})$, *что тройка* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p)$ *удовлетворяет тождеству* (3.4), *а четверка* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,\mathbf{E})$ *является решением уравнений в* (1.5), (1.6) *в следующем смысле:*

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - æ\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H} + \nabla p = \mathbf{f}\ \textit{в}\ (\mathcal{D}'(\Omega))^3,\ \ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0\ \textit{в}\ \Omega, \quad (3.9)$$

$$\sigma^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{E} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} = \sigma^{-1}\mathbf{J}_0,\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0,\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0\ \textit{в}\ \Omega. \quad (3.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Восстановление давления $p \in L^2_0(\Omega)$ так, что выполняется (3.4) или (3.1), осуществляется обычным образом с помощью теоремы де Рама [60]. Для вывода (3.9) достаточно выбрать в (3.1) тестовые функции $\mathbf{v}$ из подпространства $\mathcal{D}(\Omega)^3 \subset \mathbf{H}^1_0(\Omega)$. Осталось восстановить вектор электрического поля $\mathbf{E}$. С этой целью умножим (3.8) на ρ_0 и положим $\mathbf{v} = 0$. Учитывая (3.6), (3.2) и (2.11), будем иметь

$$(\sigma^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} - \sigma^{-1}\mathbf{J}_0 - \mathbf{E}_0, \operatorname{rot}\mathbf{\Psi}) = 0 \ \ \forall\mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T. \tag{3.11}$$

Тождество (3.11) означает, что вектор $\mathbf{w} \equiv \sigma^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} - \sigma^{-1}\mathbf{J}_0 - \mathbf{E}_0$ ортогонален вектору $\operatorname{rot}\mathbf{\Psi}$, где $\mathbf{\Psi} \in \mathbf{V}_T$ – произвольная вектор-функция. В силу (2.8) это возможно тогда и только тогда, когда $\mathbf{w} = \operatorname{grad}\varphi + \mathbf{e}$. Здесь $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ – скалярный потенциал, $\mathbf{e} \in \mathcal{H}(e)$ – некоторый вектор, причем пара $(\varphi, \mathbf{e})$ однозначно определяется вектором $\mathbf{w}$. Полагая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \nabla\varphi + \mathbf{e}$, замечаем, что $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{k}$ и что тройка $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, \mathbf{E})$ удовлетворяет всем уравнениям в (3.10). Это означает, что вектор $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \nabla\varphi + \mathbf{e}$ является искомой электрической компонентой решения $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{E})$ задачи 1.

Замечание 3.1. Обратим внимание на важность проблемы исключения и восстановления пары $(p, \mathbf{E})$. Подчеркнем при этом, что если исключение $(p, \mathbf{E})$ осуществляется достаточно просто путем использования специальных тестовых пространств для скорости и магнитного поля, а для восстановления p мы используем стандартный прием, основанный по существу на следствии к известной теореме де Рама [60], то этап восстановления электрического поля $\mathbf{E}$ более сложен. Для восстановления $\mathbf{E}$ мы используем, с одной стороны, разложение (2.8) пространства $\mathbf{L}^2(\Omega)$ на сумму трех ортогональных подпространств, установленное в [61], а с другой стороны, специальное условие на его тангенциальную компоненту $\mathbf{E}\times\mathbf{n}|_\Gamma$. Это условие, фигурирующее в (iii), гарантирует существование хотя бы одного вектора $\mathbf{E}_0$, удовлетворяющего условиям (2.34). Указанный вектор $\mathbf{E}_0$ еще не является искомым вектором электрического поля хотя бы потому, что для тройки $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, \mathbf{E}_0)$, удовлетворяющей (3.11), не выполняется первое уравнение в (1.6). Поэтому остается показать, что к вектору $\mathbf{E}_0$ можно добавить такой вектор, что их сумма удовлетворяет как (2.34), так и первому уравнению (1.6). Для доказательства этого факта и используется разложение (2.8). Именно оно гарантирует существование такого вектора $\nabla\varphi + \mathbf{e}$, где $\varphi \in H^1_0(\Omega)$, $\mathbf{e} \in \mathcal{H}(e)$, что сумма $\mathbf{E}_0 + \nabla\varphi + \mathbf{e}$ является искомой электрической компонентой решения $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, T, \mathbf{E})$ задачи 1. Подчеркнем также, что специальное условие (iii) на $\mathbf{k}$ используется лишь при восстановлении электрического поля $\mathbf{E}$. Вот почему оценка нормы $\|\mathbf{F}\|_{H^*_{0T}}$ в (3.7) содержит лишь норму $\mathbf{k}$ в $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, тогда как оценка для $\|\mathbf{E}\|$ содержит более “сильную” норму $\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma}$ [93].

Основываясь на леммах 3.1, 3.2 и замечании 3.1, введем следующее определение:

Определение 3.1. Слабым решением задачи 1 назовем любую тройку $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$, удовлетворяющую условиям (3.4), (3.5).

Доказательство существования слабого решения задачи 1 существенно осложняется неоднородностью граничных условий в (3.5), особенно для скорости $\mathbf{u}$. В этой связи отметим, что доказательство глобальной разрешимости неоднородной краевой задачи с условием Дирихле $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}$ для стационарных уравнений Навье–Стокса основано на использовании леммы Хопфа [60, с. 289]. Для произвольной функции $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям $\int_{\Gamma_i} \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}d\sigma = 0$, $i = 1, 2, \ldots, p_0$, где Γ_i – i-ая связная компонента границы Γ, она гарантирует существование соленоидального продолжения $\mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{g}$ вектора $\mathbf{g}$ внутрь области Ω, удовлетворяющего следующему условию “малости”: $|c(\mathbf{v}, \mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{g}, \mathbf{v})| \le \varepsilon\|\mathbf{v}\|^2_1 \ \forall\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Отыскивая с учетом леммы Хопфа скорость $\mathbf{u}$ в виде $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{g}$, где $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ — новая искомая функция, и подставляя это соотношение в уравнения Навье-Стокса, можно получить вспомогательную однородную краевую задачу для функции $\mathbf{u}$. Она имеет смысл операторного уравнения вида $\tilde{\mathbf{u}} = G(\tilde{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon})$, причем при достаточно малом ε, зависящем от $\mathbf{g}$, для нелинейного оператора G выполняются условия классической теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки вполне непрерывного оператора. Именно отсюда вытекает глобальная разрешимость неоднородной краевой задачи для уравнений Навье-Стокса. Однако, когда исследователи обратились к изучению соответствующих неоднородных краевых задач для уравнений МГД, то оказалось, что применение леммы Хопфа не приводит к аналогичному результату вследствие специфики уравнений МГД, содержащих, кроме конвективного нелинейного слагаемого еще два нелинейных слагаемых: силу Лоренца $æ\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ и максвеллов адвективный член $\mu\mathbf{u} \times \mathbf{H}$. Вот почему в работах, посвященных исследованию неоднородных краевых задач для стационарных уравнений МГД, существование решения обычно доказывалось "в малом", т. е. при определенных условиях малости исходных данных (см., например, уже цитированные работы [39, 46, 47, 53, 57]). Правда, в недавно вышедшей статье M. Wiedmer [56] сформулирована и доказана теорема глобальной разрешимости неоднородной краевой задачи, локальная разрешимость которой была установлена в [39], однако приведенное в [56] доказательство содержит пробелы. Глобальную разрешимость неоднородной краевой задачи вида (1.4)–(1.6) удалось установить лишь недавно в [78, 93], но при дополнительном условии, что вектор $\mathbf{g}$, входящий в граничное условие для скорости, тангенциален, т. е. что $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0$. Физически это условие означает, что жидкость занимает область Ω в движущемся сосуде с непроницаемыми стенками. Именно при выполнении этого условия удалось построить специальное продолжение $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon}$ вектора $\mathbf{g}$ в область Ω, обладающее еще более сильным свойством "малости", чем продолжение, входящее в классическую лемму Хопфа. Свойства указанного вектора $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon}$ описываются следующим утверждением:

Лемма 3.3. *При выполнении условий* (i), (ii) *для любой функции* $\mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ *и любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такая вектор-функция* $\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon} \in \mathbf{H}_T^1(\Omega)$, *что*

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon} = 0 \ \text{в}\ \Omega,\ \mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon} = \mathbf{g}\ \text{на}\ \Gamma,\ \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon}\|_1 \leq C_{\varepsilon}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma},\ \|\mathbf{u}_{\mathbf{g}}^{\varepsilon}\|_{\mathbf{L}^4(\Omega)} \leq \varepsilon\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}. \tag{3.12}$$

Здесь постоянная C_{ε} зависит от ε и, быть может, от Ω.

Аналогичную роль для магнитного поля играет следующая лемма:

Лемма 3.4. *При выполнении условий* (i), (ii) *для любой функции* $q \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ *существует единственная вектор-фукнция* $\mathbf{H}_0 \in \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \equiv \mathbf{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{H}(m)^{\perp}$ *такая, что*

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H}_0 = 0,\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{H}_0 = 0,\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = q,\ \ \|\mathbf{H}_0\|_1 \leq C_N\|q\|_{1/2,\Gamma}. \tag{3.13}$$

Здесь $C_N \equiv C_N^1$, где C_N^1 — константа, не зависящая от q, входящая в следствие 2.1.

Подробное доказательство леммы 3.3, основанное на использовании более ранних результатов из [81], можно найти в [78, 93]. Что касается леммы 3.4, то ее утверждение вытекает из следствия 2.1, поскольку в качестве искомого вектора $\mathbf{H}_0$ достаточно взять вектор $\mathbf{H}_0 = \nabla\psi$, где ψ – решение задачи Неймана (2.23) при $\rho = 0$.

Наряду с исходной задачей 1 рассмотрим линейную задачу, полученную линеаризацией задачи (3.4), (3.5). Она заключается в нахождении тройки $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ из условий

$$\begin{gathered} a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + æ[c_1(\mathbf{\Psi}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})] = \\ = <\mathbf{F}_1, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})> -\ b(\mathbf{v}, p)\ \ \forall(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T, \end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \chi,\ \mathbf{u} = \mathbf{g}\ \text{на}\ \Gamma,\ \ \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = q\ \ \text{на}\ \ \Gamma. \tag{3.15}$$

Здесь $\mathbf{F}_1 \in H_{0T}^*$ — произвольный функционал, а "скорость" $\hat{\mathbf{u}}$, "магнитное поле" $\hat{\mathbf{H}}$ и функция χ — заданные функции, удовлетворяющие условиям

(vi) $\hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_T^1(\Omega),\ \mathrm{div}\,\hat{\mathbf{u}} = 0,\ \hat{\mathbf{H}} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$; (vii) $\chi \in L_0^2(\Omega)$.

Подчеркнем, что слагаемые $c_1(\mathbf{\Psi}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{u})$ и $-c_1(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})$ в (3.14), полученные линеаризацией слагаемого $c_1(\mathbf{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u})$, отвечающего максвеллову адвективному члену $\mathbf{H} \times \mathbf{u}$ в первом уравнении в (1.6), и слагаемого $-c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v})$, отвечающего лоренцевой силе $\mathbf{f}_{\mathbf{H}} = æ \,\mathrm{rot}\, \mathbf{H} \times \mathbf{H}$ в (1.1), в сумме уничтожаются при $(\mathbf{u}, \mathbf{H}) = (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})$. Это вместе с (2.10) влечет коэрцитивность билинейной по $(\mathbf{u}, \mathbf{H})$ и $(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})$ формы в левой части (3.14) на пространстве H_{0T}. Указанное обстоятельство вместе с леммой 2.2 позволяет относительно просто доказать разрешимость задачи (3.14), (3.15) и установить изоморфизм отвечающего ей линейного оператора. Более конкретно, введем линейные операторы $\hat{A} : H \to H_{0T}^*$, $B : H_{0T} \to (L_0^2(\Omega))^* \equiv L_0^2(\Omega)$, $B^* : L_0^2(\Omega) \to H_{0T}^*$ по формулам

$$
\begin{gathered}
<\hat{A}(\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})> = a((\mathbf{u}, \mathbf{H}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + æ[c_1(\mathbf{\Psi}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{u}) - c_1(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v})], \\
<B(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}), r> = b(\mathbf{v}, r) = <B^* r, (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})>.
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

Из результатов [93] следует, что операторы $\hat{A}$ и B^* удовлетворяют условиям

$$
\begin{gathered}
<\hat{A}(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}), (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})> \geq \nu_* \|(\mathbf{v}, \mathbf{\Psi})\|_1^2 \equiv \nu_*(\|\mathbf{v}\|_1^2 + æ\|\mathbf{\Psi}\|_1^2) \ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{\Psi}) \in V_{0T}, \ \hat{A} \in \mathcal{L}(H, H_{0T}^*), \\
\|B^* p\| \geq \beta \|p\| \ \forall p \in L_0^2(\Omega), \ \ \|\hat{A}\| \leq M_2 \equiv \nu + C_1^2 \nu_m + \gamma_0 \|\hat{\mathbf{u}}\|_1 + 2\gamma_1 æ^{1/2} \|\hat{\mathbf{H}}\|_1,
\end{gathered}
\tag{3.17}
$$

где ν_*, β, γ_0 и γ_1 — константы из (2.15), (2.14), (2.12) и (2.13), и справедлива лемма.

Лемма 3.5. *При выполнении условий* (i), (ii), (vi) *для любой четверки* $(\mathbf{F}_1, \mathbf{g}, q, \chi) \in H_{0T}^* \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \times L_0^2(\Omega)$ *задача* (3.14), (3.15) *имеет единственное решение* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p) \in \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, *причем для этого решения выполняются оценки*

$$
\|\mathbf{u}\|_1 \leq \frac{1}{\nu_*} M_3 + C_0 \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \frac{1}{\beta}\|\chi\|, \ \|\mathbf{H}\|_1 \leq \frac{æ^{-1/2}}{\nu_*} M_3 + C_N \|q\|_{1/2,\Gamma}, \ \|p\| \leq \frac{1}{\nu_* \beta} M_4.
$$

Здесь $C_0 \equiv C_\varepsilon$ *и* C_N *— константы, входящие соответственно в* (3.12) (*при фиксированном значении* ε) *и* (3.13), *а константы* M_3 *и* M_4 *определяются соотношениями*

$$
M_3 = \|\mathbf{F}_1\|_{H_{0T}^*} + (\nu + \gamma_0 \|\hat{\mathbf{u}}\|_1 + \gamma_1 æ^{1/2} \|\hat{\mathbf{H}}\|_1)(C_0 \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \beta^{-1}\|\chi\|), \ M_4 = M_3(\nu_* + M_2).
$$

Полагая

$$
\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{H}, p), \ X = \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega), \ Y = H_{0T}^* \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma), \tag{3.18}
$$

введем оператор $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) : X \to Y$, действующий по формулам

$$
\Phi_1(\mathbf{x}) = \hat{A}((\mathbf{u}, \mathbf{H})) + B^* p, \ \Phi_2(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{div}\, \mathbf{u}, \ \Phi_3(\mathbf{x}) = \gamma \mathbf{u}, \ \Phi_4(\mathbf{x}) = \gamma_n \mathbf{H} \equiv \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}. \tag{3.19}
$$

Когда функция $\mathbf{u}$ пробегает все пространство $\mathbf{H}_T^1(\Omega)$, ее след $\gamma \mathbf{u}$ пробегает пространство $\mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, а $\mathrm{div}\mathbf{u}$ пробегает пространство $L_0^2(\Omega)$. Точно так же, когда функция $\mathbf{H}$ пробегает все пространство $\tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)$, ее нормальный след $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma$ пробегает пространство $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ (см. [78]). Отсюда и установленных выше свойств операторов $\hat{A} : \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \to H_{0T}^*$, $B^* : L_0^2(\Omega) \to H_{0T}^*$, а также оператора div: $\mathbf{H}_T^1(\Omega) \to L_0^2(\Omega)$ следует, что введенный в (3.18), (3.19) линейный оператор $\Phi : X \to Y$ определен и непрерывен на всем X, а из леммы 3.5 вытекает, что он сюръективен и обратим. В таком случае из теоремы Банаха об обратном операторе [87, с. 26] следует, что оператор $\Phi : X \to Y$ является линейным и непрерывным изоморфизмом. Сформулируем полученный результат.

Лемма 3.6. *Пусть выполяются условия* (i), (ii) и (vi). *Тогда оператор* $\Phi : X \to Y$, *определяемый формулами* (3.18), (3.19), *осуществляет линейный и непрерывный изоморфизм пространства* X *на пространство* Y.

Сформулируем теперь задачу управления для модели (1.4)–(1.6). С этой целью разобьем (в некотором смысле условно) множество данных задачи 1 на две группы: группу фиксированных данных, куда внесем для конкретности функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{k}$, и группу управлений, куда внесем функции $\mathbf{g}, \mathbf{j} \equiv \mathbf{J}_0$ и q, предполагая, что они могут изменяться в некоторых множествах K_1, K_2 и K_3. Более точно, обозначим через $\tilde{J} : X \to \mathbb{R}$ слабо полунепрерывный снизу функционал качества и предположим, что

(j) $K_1 \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, $K_2 \subset \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $K_3 \subset \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ — непустые замкнутые выпуклые множества.

Пусть $\tilde{J} : X \equiv \mathbf{H}_T^1(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, $\mu_l \geq 0$ — некоторые константы, $l = 1, 2, 3$. Полагая $K \equiv K_1 \times K_2 \times K_3$, $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)$, $u_0 = (\mathbf{f}, \mathbf{k})$, $u \equiv (\mathbf{j}, \mathbf{g}, q)$, введем функционал $J : X \times K \to \mathbb{R}$ по формуле

$$J(\mathbf{x}, u) = \frac{\mu_0}{2} \tilde{J}(\mathbf{x}) + \frac{\mu_1}{2} \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\mathbf{j}\|^2 + \frac{\mu_3}{2} \|q\|_{1/2,\,\Gamma}^2. \tag{3.20}$$

Предположим в дополнение к условию (j), что выполняются следующие условия:

(jj) $\mu_0 > 0$, $\mu_l \geq 0$ и K_l — ограниченное множество, либо $\mu_l > 0$ и $\tilde{J}$ ограничен снизу, $l = 1, 2, 3$.

Рассматривая функционал J на слабых решениях задачи 1, запишем соответствующее ограничение, имеющее вид ее слабой формулировки (3.4), (3.5), в виде

$$F(\mathbf{x}, u) \equiv F(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{g}, \mathbf{j}, q) = 0. \tag{3.21}$$

Здесь $F \equiv (F_1, F_2, F_3, F_4) : X \times K \to Y$ — оператор, действующий по формулам

$$<F_1(\mathbf{x}, u), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})> \equiv \nu a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu_1 a_1(\mathbf{H}, \boldsymbol{\Psi}) + c(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + æ[c_1(\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{H}, \mathbf{u}) -$$

$$c_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}, \mathbf{v})] - <\mathbf{F}, (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi})> \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\Psi}) \in H_{0T} = \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T,\ F_3(\mathbf{x}, u) \equiv \gamma \mathbf{u} - \mathbf{g} \in \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma),$$

$$<F_2(\mathbf{x}, u), r> \equiv b(\mathbf{u}, r)\ \forall r \in L_0^2(\Omega),\ F_4(\mathbf{x}, u) \equiv \gamma_n \mathbf{H} - q \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma). \tag{3.22}$$

При записи (3.4), (3.5) в виде (3.21), (3.22) мы учли, что система (1.4)–(1.6) содержит 8 независимых соотношений. Два из них: $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ уже учтены в определении функциональных пространств для $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$. Остальные уравнения используются при формировании четырех компонент F_1, F_2, F_3 и F_4 оператора F так, как указано в (3.22).

Сформулируем следующую задачу управления

$$J(\mathbf{x}, u) \equiv J(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{g}, \mathbf{j}, q) \to \inf,\ F(\mathbf{x}, u) = 0,\ (\mathbf{x}, u) \in X \times K. \tag{3.23}$$

В качестве основных функционалов стоимости будем выбирать $J_1, J_2, \ldots, J_8$, где

$$\begin{gathered} J_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|_1^2,\ J_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|_1^2,\ J_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|^2,\ J_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{H}\|_1^2,\ J_5(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}|\mathbf{H}|_1^2, \\ J_6(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\|\operatorname{rot} \mathbf{H}\|^2,\ J_7(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u} - \mathbf{u}_d|^2 d\Omega,\ J_8(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{H} - \mathbf{H}_d|^2 d\Omega. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Функционал J_3, описывающий меру “турбулентности” течения, используется в случае, когда требуется минимизировать интенсивность крупномасштабных турбулентных течений в проводящей жидкости. Функционалы J_7, J_8, где функция $\mathbf{u}_d \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ либо $\mathbf{H}_d \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ описывает заданное гидродинамическое либо электромагнитное поле, используются при решении обратных задач методами оптимизации (см. [78]). О смысле других функционалов J_k можно прочитать в [52, 78]. Подчеркнем, что основной целью оптимизации является минимизация первого слагаемого (т. е. исходного функционала качества $\tilde{J}$), стоящего в правой части (3.20). Остальные слагаемые добавляются в (3.20) с целью ограничения искомых управлений. При этом неотрицательные параметры $\mu_l \geq 0$, имеющие при $l \geq 1$ смысл параметров "штрафа", служат для регулирования относительной "важности" каждого из слагаемых в (3.20), а также для уравнивания размерностей указанных слагаемых. Через $Z_{ad} = \{(\mathbf{x}, u) \in X \times K : F(\mathbf{x}, u) = 0, J(\mathbf{x}, u) < \infty\}$ обозначим множество допустимых пар для задачи (3.23).

Пусть $X^* = \mathbf{H}_T^{-1}(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega)^* \times L_0^2(\Omega)$ и $Y^* \equiv H_{0T} \times L_0^2(\Omega) \times \mathbf{H}_T^{-1/2}(\Gamma) \times \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)^*$ — двойственные пространства к введенным выше произведениям X и Y. В соответствии с общей теорией экстремальных задач [87] введем в рассмотрение множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*)$, где $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+=\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$, $\mathbf{y}^*=((\xi,\eta), s, \zeta_1, \zeta_2)\in Y^*$, а функции $\xi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\eta \in \mathbf{V}_T$ и $s \in L_0^2(\Omega)$ имеют смысл "сопряженной" скорости, "сопряженного" магнитного поля и "сопряженного" давления, и лагранжиан $\mathcal{L} : X \times K \times \mathbb{R}^+ \times Y^* \to \mathbb{R}$ по формуле

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(\mathbf{x}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) = \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + <\mathbf{y}^*, F(\mathbf{x}, u)>_{Y^* \times Y} \equiv \lambda_0 J(\mathbf{x}, u) + \\ <F_1(\mathbf{x}, u),\ (\xi, \eta)>_{H_{0T}^* \times H_{0T}} + (F_2(\mathbf{x}, u), s) + <\zeta_1, F_3(\mathbf{x}, u)>_\Gamma + <\zeta_2, F_4(\mathbf{x}, u)>_\Gamma.\end{gathered} \tag{3.25}$$

Следующие теоремы устанавливают достаточные условия глобальной разрешимости и локальной единственности задачи 1, разрешимости задачи управления (3.23), справедливости для нее принципа Лагранжа и условия регулярности множителя Лагранжа.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* (i)–(v) *существует слабое решение* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p)\in X$ *задачи 1 и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leq M_{\mathbf{u}},\ \|\mathbf{H}\|_1 \leq M_{\mathbf{H}},\ \|p\| \leq M_p. \tag{3.26}$$

Здесь $M_{\mathbf{u}}(u_0, u)$, $M_{\mathbf{H}}(u_0, u)$ *и* $M_p(u_0, u)$ *— непрерывные неубывающие функции от норм величин* u_0 *и* u, *определенные формулами*

$$\begin{gathered}M_{\mathbf{u}}\equiv(2/\nu_*)[\|\mathbf{f}\|_{-1} + æ^{1/2}(C_1\nu_m\|\mathbf{J}_0\| + C_\Gamma\mu^{-1}\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\Gamma}) + M_{\mathbf{g}} + M_{\mathbf{g}q}] + C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \\ M_{\mathbf{H}}\equiv(2æ^{-1/2}/\nu_*)[\|\mathbf{f}\|_{-1}+æ^{1/2}(C_1\nu_m\|\mathbf{J}_0\|+C_\Gamma\mu^{-1}\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\Gamma})+M_{\mathbf{g}}+M_{\mathbf{g}q}]+C_N\|q\|_{1/2,\Gamma}, \\ M_p = \frac{1}{\nu_*\beta}(\nu_* + \nu + C_1^2\nu_m + \gamma_0 M_{\mathbf{u}} + 2\gamma_1 æ^{1/2} M_{\mathbf{H}})[\|\mathbf{f}\|_{-1}+ \\ +æ^{1/2}(C_1\nu_m\|\mathbf{J}_0\| + C_\Gamma\mu^{-1}\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\Gamma}) + (\nu + \gamma_0 M_{\mathbf{u}} + \gamma_1 æ^{1/2} M_{\mathbf{H}})C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}],\end{gathered} \tag{3.27}$$

где $M_{\mathbf{g}} \equiv \nu C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} + \gamma_0'\varepsilon_0 C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|^2_{1/2,\Gamma}$, $M_{\mathbf{g}q} = \gamma_1'\sqrt{æ}\varepsilon_0 C_N\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}\|q\|_{1/2,\Gamma}$. *Если* u_0 *и* u *"малы"* (*либо обе вязкости* ν *и* $\nu_m \equiv 1/\mu\sigma = \nu_1/æ$ *"велики"*) *в том смысле, что*

$$\frac{\gamma_0}{\alpha_0\nu}M_{\mathbf{u}} + \frac{\gamma_1}{\alpha_0\nu}\frac{\sqrt{æ}}{2}M_{\mathbf{H}} < 1,\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1\nu_m}M_{\mathbf{u}} + \frac{\gamma_1}{\alpha_1\nu_m}\frac{\sqrt{æ}}{2}M_{\mathbf{H}} < 1, \tag{3.28}$$

где константы $\alpha_0, \alpha_1, \gamma_0, \gamma_1$ *введены в* (2.6), (2.7), (2.12), (2.13), *то слабое решение задачи 1 единственно.*

Теорема 3.2. *Пусть при выполнении условий* (i)–(iv) *и* (j) $\tilde{J} : X \to \mathbb{R}$ *— слабо полунепрерывный снизу функционал и* $Z_{ad} \neq \emptyset$. *Тогда существует по крайней мере одно решение задачи управления (3.23).*

Следствие 3.1. *Пусть выполняются условия* (i)–(iv) *и* (j), *причем* $\mu_l > 0$, *либо* $\mu_l \geq 0$ *и* K_l *— ограниченные множества при* $1 \leq l \leq 3$. *Тогда существует по крайней мере одно решение задачи* (3.23) *при* $\tilde{J} = J_k$, $1 \leq k \leq 8$.

Теорема 3.3. *При выполнении условий* (i)–(iv) *и* (j) *оператор* $F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) : X \to Y$ *является фредгольмовым для любой пары* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \in X \times K$.

Теорема 3.4. *Пусть при выполнении условий* (i)–(iv) *и* (j) $K_1 \subset \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$, $K_2 \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$, $K_3 \subset \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ *— непустые выпуклые множества, пара* $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \equiv (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{p}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{q}) \in X \times K$

является точкой локального минимума в задаче (3.23), *причем функционал J непрерывно дифференцируем по $\mathbf{x}$ в точке $\hat{\mathbf{x}}$ для любого элемента $u \in K$ и выпуклый по u для каждой точки $\mathbf{x} \in X$. Тогда существует ненулевой множитель Лагранжа $(\lambda_0, \mathbf{y}^*) \in \mathbb{R}^+ \times Y^*$ такой, что справедливо уравнение Эйлера-Лагранжа*

$$F'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})^* \mathbf{y}^* + \lambda_0 J'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) = 0 \text{ в } X^*, \tag{3.29}$$

эквивалентное тождествам

$$\nu a_0(\mathbf{w}, \xi) + \nu_1 a_1(\mathbf{h}, \eta) + c(\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{w}, \xi) + c(\mathbf{w}, \hat{\mathbf{u}}, \xi) - æ[c_1(\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{h}, \xi) + c_1(\mathbf{h}, \hat{\mathbf{H}}, \xi)] +$$
$$æ[c_1(\eta, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{w}) + c_1(\eta, \mathbf{h}, \hat{\mathbf{u}})] + b(\mathbf{w}, \sigma) + <\zeta_1, \mathbf{w}>_\Gamma + <\zeta_2, \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}>_\Gamma +$$
$$\lambda_0 <J'_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}), \mathbf{w}> + \lambda_0 <J'_{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}), \mathbf{h}> = 0 \; \forall (\mathbf{w}, \mathbf{h}) \in \mathbf{H}^1_T(\Omega) \times \tilde{\mathbf{H}}^1(\Omega), \tag{3.30}$$

$$b(\xi, r) + \lambda_0 (J'_p(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}), r) = 0 \; \forall r \in L^2_0(\Omega), \tag{3.31}$$

и выполняется принцип минимума

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \leq \mathcal{L}(\hat{\mathbf{x}}, u, \lambda_0, \mathbf{y}^*) \; \forall u \in K, \tag{3.32}$$

эквивалентный вариационному неравенству

$$<\zeta_1, \mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}>_\Gamma + (\mathbf{j} - \hat{\mathbf{j}}, \operatorname{rot} \eta) + <\zeta_2, q - \hat{q}>_\Gamma \leq \lambda_0 [J(\hat{\mathbf{x}}, u) - J(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u})] \; \forall u \equiv (\mathbf{g}, \mathbf{j}, q) \in K. \tag{3.33}$$

Теорема 3.5. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.4 *и* (3.28). *Тогда любой нетривиальный множитель Лагранжа, удовлетворяющий соотношениям* (3.30), (3.31), *регулярен, т. е. имеет вид* $(1, \mathbf{y}^*)$ *и определяется единственным образом.*

Замечание 3.2. Условия (3.28) можно переписать в виде ограничения на безразмерные параметры: число Рейнольдса Re, магнитное число Рейнольдса Rm и число Гартмана Ha, если ввести их по аналогии с (1.7) с помощью формул

$$\mathrm{Re} = \frac{\gamma_0}{\alpha_0 \nu} M_{\mathbf{u}}, \; \mathrm{Rm} = \frac{\gamma_1}{\alpha_1 \nu_m} M_{\mathbf{u}} \equiv \frac{\gamma_1 \mu \sigma}{\alpha_1} M_{\mathbf{u}}, \; \mathrm{Ha} = \frac{\gamma_1}{\alpha_0 \nu} \sqrt{æ} M_{\mathbf{H}}. \tag{3.34}$$

С использованием (3.34) неравенства (3.28) переходят в условия

$$\mathrm{Re} + \frac{1}{2}\mathrm{Ha} < 1, \quad \mathrm{Rm} + \frac{1}{2}\mathrm{Pr}_m \mathrm{Ha} < 1, \tag{3.35}$$

обеспечивающие единственность решения задачи 1. Здесь безразмерный параметр $\mathrm{Pr}_m = \nu/\nu_m \equiv \mu\sigma\nu$ имеет смысл магнитного числа Прандтля [2]. В частном случае, когда $\sigma = 0$ и $\mathbf{H} = 0$, неравенства (3.35) переходят в одно неравенство Re< 1, обеспечивающее единственность решения краевой задачи для стационарных уравнений Навье–Стокса [60].

Доказательство всех приведенных теорем 3.1–3.5 можно найти в [78, 93]. Основные трудности, конечно, связаны с доказательством теоремы существования (теоремы 3.1). Для этой цели используются леммы 3.3 и 3.4. Идея доказательства теоремы 3.1 заключается в том, что компоненты $\mathbf{u}, \mathbf{H}$ слабого решения задачи 1 ищутся в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\varepsilon_{\mathbf{g}} + \tilde{\mathbf{u}}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \tilde{\mathbf{H}}$, где смысл функций $\mathbf{u}^\varepsilon_{\mathbf{g}}$ и $\mathbf{H}_0$ указан в леммах 3.3 и 3.4, а $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{V}$ и $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbf{V}_T$ – новые искомые функции. Подстановка этих соотношений в (3.8) приводит к вспомогательной задаче для пары $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{H}})$, имеющей смысл нелинейного операторного уравнения вида $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{H}}) = G_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{H}})$. Далее с учетом лемм 3.3, 3.4 и 2.2 показывается, что при достаточно малом ε, зависящем от $\mathbf{g}$ и q, для оператора G_ε выполняются условия теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки. Детали см. в [78, 93]. Остальные теоремы 3.2–3.5 доказываются на основе описанной в разд. 2.4 методики.

Отметим, что одно из первых теоретических исследований задач управления для стационарных моделей МГД было проведено в [48] в предположении, что $\mathbf{g} = 0$, а управлением служит магнитный поток (т. е. функция q, входящая в (1.4)) на части границы Γ, состоящей из конечного числа связных компонент. Подчеркнем, что в [48] обоснование применения принципа Лагранжа для рассматриваемой задачи проводится на основе другой методики, основанной на использовании альтернативной абстрактной теоремы о достаточных условиях справедливости принципа Лагранжа. В этой теореме не производится разделение переменных на состояние и управления по их свойствам, причем искомое управление считается элементом некоторого функционального пространства (а не выпуклого множества K, как в нашей постановке), поэтому данная теорема является менее общей. Необходимыми условиями ее применимости являются непрерывная дифференцируемость минимизируемого функционала J и оператора ограничения F модели по всем переменным в точке, где достигается локальный минимум. Еще одним важным условием является сюръективность производной Фреше от оператора F в точке локального минимума. Последнее условие является ограничительным, поскольку его справедливость удается доказать не для всех значений основных параметров задачи, роль которых в [48] играют магнитное число Рейнольдса Rm и число Гартмана Ha, а лишь для значений пар (Rm,Ha)$\in \mathbb{R}^2$, не принадлежащих особому множеству нулевой меры, состоящему из счетного (в общем случае) множества вертикальных прямых Rm = const и счетного множества кривых Ha = f(Rm). Следует отметить, что используемое в [48] предположение $\mathbf{g} = 0$ значительно упрощает анализ задач управления, поскольку в этом случае без труда удается доказать глобальную разрешимость исходной краевой задачи, причем при менее жестких условиях на границу Γ области Ω, например для липшицевого многогранника (см. [59, 78, 91]).

Подчеркнем, что теоремы 3.1–3.5 относятся к случаю, когда граничные условия имеют вид (1.4). В частном случае, когда $q = 0$ и $\mathbf{k} = 0$, эти условия отвечают идеально проводящей границе. Другим распространенным для практики является случай, когда область течения граничит с твердым диэлектриком. Аналогом краевых условий (1.5) в этом случае являются краевые условия $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}, \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{q}$, причем краевое условие на вектор $\mathbf{E}$ не ставится. Этот случай может быть исследован аналогичным образом на основе методики, изложенной в разд. 2.4.

Более общим является случай, когда граница Γ состоит из двух частей Γ_1 и Γ_2, на которых заданы краевые условия разных типов. Он достаточно сложен и пока совершенно не изучен даже в случае однородных граничных условий. В этом плане можно лишь отметить статью [73], посвященную исследованию уравнений Максвелла при смешанных краевых условиях вида $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = q$, $\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \mathbf{k}$ и $\mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{q}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = k$.

Уместно также отметить, что наряду с граничным условием Дирихле вида $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}$ для скорости в литературе используются и смешанные краевые условия для скорости, которые в достаточно общем виде можно записать следующим образом:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}_1,\ \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{g}_2 \text{ и } \big(p + (1/2)\big)|\mathbf{u}|^2|_{\Gamma_2} = g,\ \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_3} = g_3 \text{ и } \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_3} = \mathbf{h}. \quad (3.36)$$

При $\mathbf{g}_1 = 0$, $\mathbf{g}_2 = 0$ и $g_3 = 0$ соответствующие краевые задачи и задачи управления для модели (1.5), (1.6) исследованы в [88–90], где доказана глобальная разрешимость краевых задач и проведено теоретическое исследование задач управления.

Соотношения (3.30), (3.31) вместе с принципом минимума (3.32) и операторным ограничением (3.21) представляют собой систему оптимальности. Она состоит из трех частей. Первая ее часть имеет вид слабой формулировки (3.4), (3.5) задачи 1, эквивалентной операторному уравнению (3.21), вторая часть состоит из тождеств (3.30), (3.31) для множителей Лагранжа $(\xi, \eta), s, \zeta_1, \zeta_2$ и, наконец, последняя часть представляет собой принцип минимума (3.32), эквивалентный вариационному неравенству (3.33) относительно управлений $\hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{j}}$ и $\hat{q}$ (и множителей ζ_1, η, ζ_2).

Из условий $\xi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, $\eta \in \mathbf{V}_T$ и (3.31) вытекает, что множители ξ и η, сопряженные к $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$, обладают следующими свойствами:

$$\xi|_\Gamma = 0, \;\; \eta \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \; \operatorname{div} \eta = 0, \; \operatorname{div} \xi = -\lambda_0 J_p'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \text{ в } \Omega. \tag{3.37}$$

Отметим, что, в отличие от η, “сопряженная” скорость ξ в общем случае не обладает свойством соленоидальности, исключая ситуацию, когда $\mathbf{J}$ не зависит от p. Лишь в этом случае из (3.37) вытекает, что $\operatorname{div} \xi = 0$.

Следующий этап состоит в выводе из тождеств (3.30), (3.31) дифференциальных уравнений и граничных соотношений для множителей Лагранжа. Этот этап выполняется по схеме, развитой в [93]. Предполагая для простоты, что Ω односвязна, так что справедливо вложение $\mathbf{V} \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$, введем линейные канонические операторы $S_\mathbf{H} : \mathbf{H}_T^{-1}(\Omega) \to \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $S_\mathbf{V} : \mathbf{H}^1(\Omega)^* \to \mathbf{V}^*$. Справедлива следующая теорема (см. [93]).

Теорема 3.6. *Пусть Ω — односвязная область и выполняются условия теоремы* 3.4, *причем $S_\mathbf{V} J_\mathbf{H}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Тогда существует такая функция $\Psi \in L_0^2(\Omega)$, что в дополнение к* (3.30)–(3.33) *выполняются соотношения*

$$-\nu\Delta\xi - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\xi + \nabla\hat{\mathbf{u}}^T \cdot \xi + æ \operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{H}} + \nabla s = -\lambda_0 S_\mathbf{H} J_\mathbf{u}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}), \tag{3.38}$$

$$\nu_1 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \eta - æ \operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{u}} + æ \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}} \times \xi - æ \operatorname{rot}(\hat{\mathbf{H}} \times \xi) + \nabla\Psi = -\lambda_0 S_\mathbf{V} J_\mathbf{H}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{u}). \tag{3.39}$$

Замечание 3.3. Хотя функция Ψ формально не входит в выражение (3.25) для лагранжиана $\mathcal{L}$, тем не менее по существу ее можно считать множителем Лагранжа, сопряженным к потенциалу безвихревого (в односвязной области Ω) электрического поля $\mathbf{E}$, входящего в уравнения в (1.6) (см. подробнее об этом в [78]).

Из теоремы 3.6 вытекает, что вторая часть системы оптимальности представляет собой формулировку некоторой краевой задачи для лагранжевых множителей, зависящей от вида функционала $\tilde{J}$. Простой анализ (см. [78, 93]) показывает, что, например, при $\tilde{J} = J_2$ указанная краевая задача описывается соотношениями

$$-\nu\Delta\xi - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\xi + \nabla\hat{\mathbf{u}}^T \cdot \xi + æ \operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{H}} + \nabla s = \lambda_0\mu_0\Delta\hat{\mathbf{u}} \;\; \text{в} \;\; \Omega, \tag{3.40}$$

$$\nu_1 \text{rotrot}\eta - æ \operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{u}} + æ \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}} \times \xi - æ \operatorname{rot}(\hat{\mathbf{H}} \times \xi) + \nabla\Psi = 0 \;\; \text{в} \;\; \Omega, \tag{3.41}$$

$$\operatorname{rot} \eta \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma, \; \zeta_1 = -\nu\frac{\partial\xi}{\partial n} - \lambda_0\mu_0\frac{\partial\hat{\mathbf{u}}}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \; \zeta_2 = \Psi \text{ на } \Gamma. \tag{3.42}$$

В случае, когда функции $\hat{\mathbf{u}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ известны, соотношения (3.40), (3.41) вместе с (3.37) и первым соотношением в (3.42) представляют собой замкнутую систему восьми скалярных дифференциальных уравнений для нахождения множителей Лагранжа ξ, η и s, эквивалентную в силу теоремы 3.3 линейной фредгольмовой задаче. Определив из этой системы ξ, η и s, далее из последних двух соотношений в (3.42) можно найти оставшиеся множители ζ_1 и ζ_2. В общем же случае, когда $\hat{\mathbf{u}}$ и $\hat{\mathbf{H}}$ не известны, (3.40)–(3.42) и (3.37) представляют собой вторую часть системы оптимальности для задачи (3.23) при $\tilde{J} = J_2$, которую следует рассматривать совместно с соотношениями (3.4), (3.5) и (3.33).

Для других функционалов качества в (3.24) вывод дифференциальной формы второй части системы оптимальности можно найти в [78, 93]. В частности, для функционала $J_5 = J_5(\mathbf{H})$ она состоит из (3.37) и соотношений

$$-\nu\Delta\xi - (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\xi + \nabla\hat{\mathbf{u}}^T \cdot \xi + æ \operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{H}} + \nabla s = 0 \;\text{ в } \Omega,$$

$$\nu_1 \text{rotrot}\eta - æ \operatorname{rot} \eta \times \hat{\mathbf{u}} + æ \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}} \times \xi - æ \operatorname{rot}(\hat{\mathbf{H}} \times \xi) + \nabla\Psi = \lambda_0\mu_0\Delta\hat{\mathbf{H}} \text{ в } \Omega,$$

$$\nu_1 \operatorname{rot} \eta \times \mathbf{n} = -\lambda_0\mu_0\frac{\partial\hat{\mathbf{H}}}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \; \zeta_1 = -\nu\frac{\partial\xi}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \; \zeta_2 = \Psi - \lambda_0\mu_0\frac{\partial\hat{\mathbf{H}}}{\partial n} \cdot \mathbf{n} \text{ на } \Gamma.$$

Выше уже указывалось, что система оптимальности для задачи управления (3.23) состоит из трех основных частей: операторного ограничения (3.21) при $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$, $u = \hat{u}$, эквивалентного соотношениям (3.4), (3.5), уравнения Эйлера - Лагранжа, эквивалентного тождествам (3.30), (3.31), и принципа минимума, эквивалентного неравенству (3.33).

Подчеркнем, что первая часть системы оптимальности — соотношение (3.21), содержит переменные $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{p}$ основного состояния и все управления. Вторая часть (уравнение Эйлера-Лагранжа (3.29)) содержит все множители Лагранжа $\xi, \eta, s, \zeta_1, \zeta_2$, образующие сопряженное состояние $\mathbf{y}^*$, а также те из переменных $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{p}$ и $\hat{u}$, от которых зависит функционал J в (3.23). Наконец, (3.33) содержит все управления и множители η, ζ_1 и ζ_2, но не содержит $\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{H}}, \hat{p}$. Более детальный анализ системы оптимальности позволяет обнаружить следующие общие закономерности, касающиеся ее вывода.

1) Необходимость введения множителей Лагранжа $(\xi, \eta) \in H_{0T} \equiv \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbf{V}_T$ и $s \in L_0^2(\Omega)$ обусловлена наличием операторных ограничений $F_1(\mathbf{x}, u) = 0$, $F_2(\mathbf{x}, u) = 0$, входящих в общее операторное ограничение (3.21). Указанные множители необходимо входят во вторую часть системы оптимальности, а множитель η к тому же входит в вариационное неравенство (3.33) в виде слагаемого $(\mathbf{j} - \hat{\mathbf{j}}, \operatorname{rot} \eta)$. Последнее связано с тем, что оператор F_1 содержит лишь одно управление $\mathbf{j}$. Если же к введенным выше управлениям присоединить правую часть $\mathbf{f}$ уравнения импульса в (1.5), то тогда множитель ξ также войдет в (3.33) (см. замечание 3.4 ниже).

2) Необходимость введения лагранжевых множителей ζ_1 и ζ_2 вызвана наличием неоднородных граничных условий для $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$, имеющих в операторной форме вид $F_3(\mathbf{x}, u) \equiv \mathbf{u}|_\Gamma - \mathbf{g} = 0$, $F_4(\mathbf{x}, u) \equiv \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma - q = 0$. Множитель ζ_1 определяется по $\hat{\mathbf{u}}$ и ξ одной из формул $\zeta_1 = -\nu \partial\xi/\partial n - \lambda_0 \mu_0 \partial \hat{\mathbf{u}}/\partial n$, $\zeta_1 = -\nu \partial\xi/\partial n - \lambda_0 \mu_0 \operatorname{rot} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}$ и $\zeta_1 = -\nu \partial\xi/\partial n$ (см. [78, 93]) соответственно для функционалов J_1 (либо J_2), J_3 и остальных функционалов в (3.24). Подчеркнем, что множитель ζ_1 (либо ζ_2) вводится независимо от того, является ли граничная функция $\mathbf{g}$ для скорости $\mathbf{u}$ (либо q для $\mathbf{H}$) управлением или нет. Оба множителя необходимо входят в тождество (3.30) в виде слагаемых $<\zeta_1, \mathbf{w}>_\Gamma$ и $<\zeta_2, \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}>_\Gamma$. В рассматриваемом нами случае, когда $\mathbf{g}$ и q являются управлениями, они также входят и в неравенство (3.33) в виде слагаемых $<\zeta_1, \mathbf{g} - \hat{\mathbf{g}}>_\Gamma$ и $<\zeta_2, q - \hat{q}>_\Gamma$. В частном случае, когда $\mathbf{g} = 0$ (либо $q = 0$), условие $\mathbf{u}|_\Gamma = 0$ (либо $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$) следует учитывать в определении пространства, в котором ищется $\mathbf{u}$ (либо $\mathbf{H}$). Поэтому в этом случае отпадает необходимость во введении операторного ограничения $F_3(\mathbf{x}, u) = 0$ (либо $F_4(\mathbf{x}, u) = 0$), а следовательно, и во введении множителя ζ_1 (либо ζ_2).

3) Неоднородному условию Дирихле $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{g}$ для скорости $\mathbf{u}$ отвечает однородное условие Дирихле $\xi|_\Gamma = 0$ для "сопряженной" скорости ξ. Неоднородному условию $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = q$ для $\mathbf{H}$ отвечает однородное условие $\eta \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0$ для "сопряженного" магнитного поля η.

Замечание 3.4. Отметим, что все исходные данные краевой задачи (1.4)–(1.6) выше были разбиты на две группы: группу жестких данных, куда вошли $\mathbf{f}$ и $\mathbf{k}$, и группу управлений, куда вошли $\mathbf{g}, \mathbf{j}$ и q. Основываясь на приведенном анализе системы оптимальности, можно без труда преобразовать ее в том случае, когда некоторые элементы из группы управлений переходят в группу жестких данных и наоборот. Так, например, предположение о том, что q не является управлением, эквивалентно тому, что множество K_3 содержит один элемент: $K_3 = \{q\}$. С учетом этого неравенство (3.33) упрощается за счет отбрасывания последнего слагаемого в его левой части.

Наоборот, если функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{k}$ переходят из группы жестких данных в группу управлений, то это эквивалентно записи вектора управлений u и множества K в виде $u = (\mathbf{g}, \mathbf{j}, q, \mathbf{f}, \mathbf{k})$, $K = K_1 \times K_2 \times K_3 \times K_4 \times K_5$, где $K_4 \subset \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $K_5 \subset \mathbf{H}_T^{-1/2}(\mathrm{div}_\Gamma; \Gamma)$ — некоторые подмножества, и добавлению в правую часть функционала (3.20) суммы двух слагаемых $(\mu_4/2)\|\mathbf{f}\|_{-1}^2 + (\mu_5/2)\|\mathbf{k}\|_{-1/2,\mathrm{div},\Gamma}^2$, $\mu_l = \mathrm{const}$, $l = 4, 5$. Уравнение Эйлера-Лагранжа при этом не изменяется, поскольку оно получается дифференцированием Лагранжиана $\mathcal{L}$ по переменным состояния, а не по управлениям, тогда как в левую часть (3.33) следует добавить слагаемые $<\mathbf{f}-\hat{\mathbf{f}},\xi>$ и $\rho_0^{-1}<\mathbf{k}-\hat{\mathbf{k}},\eta>_\Gamma$, содержащие новые управления $(\hat{\mathbf{f}},\hat{\mathbf{k}})\in K_4\times K_5$.

Построенная выше система оптимальности для задачи управления (3.23) описывает необходимые условия оптимальности для ее решения. Однако этим ее роль не ограничивается. Оказывается, что анализ ее свойств позволяет получить много новой дополнительной информации о свойствах решения задачи управления и, в частности, выявить условия, обеспечивающие его единственность, как это было установлено в [94].

Следуя [94], предположим, что выполняются следующие условия, имеющие смысл условий малости данных и управлений:

$$\frac{\gamma_0}{\alpha_0\nu}M^0_{\mathbf{u}}+\frac{\gamma_1}{\alpha_0\nu}\frac{\sqrt{æ}}{2}M^0_{\mathbf{H}}<\frac{1}{2},\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1\nu_m}M^0_{\mathbf{u}}+\frac{\gamma_1}{\alpha_1\nu_m}\frac{\sqrt{æ}}{2}M^0_{\mathbf{H}}<\frac{1}{2}, \tag{3.43}$$

где $M^0_{\mathbf{u}}=\sup_{u\in K}M_{\mathbf{u}}(u_0,u)$, $M^0_{\mathbf{H}}=\sup_{u\in K}M_{\mathbf{H}}(u_0,u)$.

Пусть $(\hat{\mathbf{x}},\hat{u})\equiv(\hat{\mathbf{u}},\hat{\mathbf{H}},\hat{p},\hat{u})$ — решение задачи (3.23). В силу теорем 3.4, 3.5 существует единственный множитель Лагранжа $(1,\mathbf{y}^*)\equiv(1,(\xi,\eta),s,\zeta_1,\zeta_2)$, с которым выполняются тождества (3.30), (3.31) при $\lambda_0=1$ и неравенство (3.33). Предположим теперь, что существуют два решения $(\mathbf{x}_i,u_i)\equiv(\mathbf{u}_i,\mathbf{H}_i,p_i,\mathbf{g}_i,\mathbf{j}_i,q_i)$, $i=1,2$ задачи (3.23). В силу теоремы 3.1 для $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{H}_i$ и p_i справедливы оценки $\|\mathbf{u}_i\|_1\le M^0_{\mathbf{u}}$, $\|\mathbf{H}_i\|_1\le M^0_{\mathbf{H}}$, $\|p_i\|\le M^0_p$. Обозначим через $(1,\mathbf{y}^*_i)\equiv(1,(\xi_i,\eta_i),s_i,\zeta^i_1,\zeta^i_2)$ отвечающие решениям $(\mathbf{x}_i,u_i)$ множители Лагранжа. Положим $\mathbf{x}=\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2$, $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2$, $p=p_1-p_2$, $\mathbf{y}^*=\mathbf{y}^*_1-\mathbf{y}^*_2$.

Простой анализ, выполненный в [94], показывает, что разность $\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$, $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2$, $p=p_1-p_2$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\begin{gathered}c(\mathbf{u},\mathbf{u},\xi_1+\xi_2)-\mu c_1(\mathbf{H},\mathbf{H},\xi_1+\xi_2)+\mu c_1(\eta_1+\eta_2,\mathbf{H},\mathbf{u})\le -<J'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_1,u_1)-J'_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_2,u_2),\mathbf{u}>-\\ -<J'_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_1,u_1)-J'_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_2,u_2),\mathbf{H}>-(J'_p(\mathbf{x}_1,u_1)-J'_p(\mathbf{x}_2,u_2),p).\end{gathered} \tag{3.44}$$

Соотношение (3.44) и лежит в основе доказательства единственности решений конкретных задач управления. Ограничимся здесь рассмотрением двух частных случаев, отвечающих чисто “гидродинамическим” и “электромагнитным” функционалам качества и управлениям.

Рассмотрим сначала случай, когда функционал J зависит только от $\mathbf{H}$ и равен J_4, а управлениями являются “электромагнитные” данные $\mathbf{j}$ и q. Это эквивалентно в силу замечания 3.4 выбору в качестве K_1 фиксированного элемента $\mathbf{g}\in\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)$. Полагая $u_0=(\mathbf{f},\mathbf{k},\mathbf{g})$, $u=(\mathbf{j},q)$, $K=K_2\times K_3$, рассмотрим задачу управления

$$J_4(\mathbf{x})\equiv(\mu_0/2)\|\mathbf{H}\|^2_1\to\inf,\ F(\mathbf{x},u)=0,\ \mathbf{x}\in X,u=(\mathbf{j},q)\in K_2\times K_3,\mu_0>0. \tag{3.45}$$

Теорема 3.7. *Пусть в дополнение к условиям* (i)-(iv) *и* (3.43), $\mathbf{g}\in\mathbf{H}^{1/2}_T(\Gamma)$ — *заданный элемент,* $K_2\subset\mathbf{H}^0(\mathrm{div};\Omega)\cap\mathcal{H}(e)^\perp$ *и* $K_3\subset\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ — *ограниченные выпуклые замкнутые множества, причем*

$$\begin{aligned}&4\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ha}\Big(1+4\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ha}+16\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\mathrm{Ha}^2\Big)\equiv\\ &\equiv 4\sqrt{\frac{\alpha_0\nu}{\alpha_1\nu_m}}\frac{\gamma_1\sqrt{æ}M^0_{\mathbf{H}}}{\alpha_0\nu}\left[1+4\sqrt{\frac{\alpha_0\nu}{\alpha_1\nu_m}}\frac{\gamma_1\sqrt{æ}M^0_{\mathbf{H}}}{\alpha_0\nu}+16\frac{\gamma_0}{\gamma_1}\left(\frac{\gamma_1\sqrt{æ}M^0_{\mathbf{H}}}{\alpha_0\nu}\right)^2\right]<1.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Тогда решение $((\mathbf{u},\mathbf{H},p),\mathbf{j},q)\in X\times K_2\times K_3$ *задачи* (3.45) *единственно.*

Следствие 3.2. *При выполнении условий теоремы* 3.7 *система оптимальности для задачи* (3.45) *имеет единственное решение* $(\mathbf{u},\mathbf{H},p,\mathbf{j},q,\mathbf{y}^*)$.

Пусть теперь $J=J_1$, а управлением является граничный вектор $\mathbf{g}$ для $\mathbf{u}$. Полагая $u_0=(\mathbf{f},\mathbf{k},\mathbf{j},q)$, $u=\mathbf{g}$, $K=K_1$, рассмотрим задачу

$$J_1(\mathbf{x})\equiv(\mu_0/2)\|\mathbf{u}\|^2_1\to\inf,\ F(\mathbf{x},\mathbf{g})=0,\ \mathbf{x}\in X,\ \mathbf{g}\in K_1,\mu_0>0. \tag{3.47}$$

Теорема 3.8. *Пусть в дополнение к условиям* (i)-(iv) *и* (3.43), $\mathbf{j} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $q \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ *— заданные элементы,* $K_1 \subset \mathbf{H}_T^{1/2}(\Gamma)$ *— ограниченное выпуклое замкнутое множество, причем*

$$4\mathrm{Re}\Big[1 + 2\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\mathrm{Pr}_m\sqrt{\mathrm{Pr}_m}\mathrm{Ha} + 4\frac{\gamma_1}{\gamma_0}\mathrm{Pr}_m^2\mathrm{Ha}^2\Big] < 1. \tag{3.48}$$

Тогда решение $((\mathbf{u}, \mathbf{H}, p), \mathbf{g}) \in X \times K_1$ *задачи* (3.47) *единственно.*

Следствие 3.3. *При выполнении условий теоремы 3.8 система оптимальности для задачи* (3.47) *имеет единственное решение* $(\mathbf{u}, \mathbf{H}, p, \mathbf{g}, \mathbf{y}^*)$.

Подробные доказательства теорем 3.7 и 3.8 можно найти в [94].

Заключение

В настоящей работе описана общая методика исследования задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости, рассматриваемых при неоднородных краевых условиях для скорости и электромагнитного поля, приведен обзор основных результатов, полученных с помощью данной методики, а также проведен сравнительный анализ этих результатов и результатов, полученных другими методами. В частности, показано, что применение данной методики позволяет доказать разрешимость как исходных неоднородных краевых задач, так и задач управления для рассматриваемых моделей МГД при наличии нескольких распределенных или граничных управлений, вывести системы оптимальности и установить на основе анализа последних достаточные условия единственности решений ряда конкретных задач управления. Следует отметить, что не все важные вопросы, касающиеся свойств решений краевых задач и задач управления для моделей МГД вязкой несжимаемой жидкости, были освещены в этой работе. В стороне осталось исследование разрешимости неоднородных краевых задач в областях с нерегулярными границами, в том числе для нестационарных моделей МГД, изучение свойств регулярности и единственности решений задач управления, исследование необходимых или достаточных условий оптимальности второго порядка, а также изучение более сложных моделей с условиями сопряжения для электромагнитного поля. Эти вопросы еще ждут своего исследования.

Список литературы

1. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 248 с.

2. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967. 320 с.

3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука, 1982. 624 с.

4. *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение волн. М.: Наука, 1978. 544 с.

5. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* О разрешимости нестационарных задач в магнитной гидродинамике // Докл. АН СССР. 1959. V. 124. P. 26–28.

6. *Ладыженская О.А., Солонников В.А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1960. Т. 59. С. 115–174.

7. *Солонников В.А.* О некоторых стационарных краевых задачах магнитной гидродинамики // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1960. Т. 59. С. 174–187.

8. *Dyer R.H., Edmunds D.E.* A uniqueness theorem in magnetohydrodynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1961. V. 8. P. 254–262.

9. *Dyer R.H., Edmunds D.E.* On the existence of solutions of the equations of magnetohydrodynamics // Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V. 9. P. 403–410.

10. *Edmunds D.E.* Sur I'unicité des solutions des équations de la magnétohydrodynamique // C.r. Acad. Sci. Paris. 1962. V. 254. P. 1377–1379.

11. *Edmunds D.E.* Sur les équations différentielles de la magnétohydrodynamique // C.r. Acad. Sci. Paris. 1962. V. 254. P. 4248–4250.

12. *Förste J.* Ein Existenzsatz für stationäre Strömungen in der Magnetohydrodynamik // Mon. Deutsch. Wiss. Berlin. 1964. V. 6. P. 886–894.

13. *Förste J.* Ein Einzigkeitssatz für stationäre Strömungen in der Magnetohydrodynamik // Mon. Deutsch. Wiss. Berlin. 1967. V. 9. P. 241–247.

14. *Lassner G.* Über ein Rand-Anfangswertproblem der Magnetohydrodynamik // Arch. Rat. Mech. Anal. 1967. V. 30. P. 388–405.

15. *Sanchez-Palencia E.* Existence des solutions de certains problémes aux limites en magnetohydrodynamique // J. Méc. 1968. V. 7, № 3. P. 405–426.

16. *Sanchez-Palencia E.* Quelques résultats d'existence et d'unicité pour des écoulements magnétohydrodynamique non stationnaires // J. Méc. 1969. V. 8, № 4. P. 509–541.

17. *Алексеев Г.В.* О существовании течения проводящей жидкости в слабо искривленном канале // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-во ИГ СО РАН, 1969. Вып. 3. С. 7–16.

18. *Брановер Г.Г., Цинобер А.Б.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М.: Наука, 1970. 380 с.

19. *Duvaut G., Lions J.-L.* Inéquations en thermoélasticité et magnétohydrodynamique // Arch. Rat. Mech. Anal. 1972. V. 46. P. 241–279.

20. *Сахаев Ш., Солонников В.А.* Оценки решения одной краевой задачи магнитной гидродинамики // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1975. Т. 127. С. 87–108.

21. *Ступялис Л.И.* Нестационарная задача магнитной гидродинамики // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1975. Т. 52. С. 175–217.

22. *Ступялис Л.И.* О разрешимости начально-краевой задачи магнитной гидродинамики // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 219–239.

23. *Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A.* The linearization principle and invariant manifold problems of magnetohydrodynamics // J. Sov. Math. 1977. V. 8. P. 384–422.

24. *Förste J.* Über die Grundgleichungen der Plasmadynamick auf der Basis der Zweiflüssigkeitstheorie // Z. Angew. Math. Mech. 1979. V. 59. P. 553–558.

25. *Ступялис Л.И.* Нестационарная задача магнитной гидродинамики для случая двух пространственных переменных // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Краевые задачи математической физики. 1980. Т. 147, № 10. С. 156–168.

26. *Ступялис Л.И.* Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений магнитной гидродинамики // Тр. Матем. ин-та имени В.А. Стеклова. Краевые задачи математической физики. 1980. Т. 147, № 10. С. 169–193.

27. *Алексеев Г.В.* О разрешимости однородной краевой задачи для уравнений магнитной гидродинамики идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Изд-во ИГ СО РАН, 1982. Вып. 57. С. 6–24.

28. *Sermange M., Temam R.* Some mathematical questions related to the MHD equations // Comm. Pure. Appl. Math. 1983. V. 36. P. 635–664.

29. *Yoshida Z., Giga Y.* On the Ohm-Navier-Stokes system in magnetohydrodynamics // J. Math. Phys. 1983. P. 2860–2864.

30. *Чижонков С.В.* Об одной системе уравнений типа магнитной гидродинамики // Докл. АН СССР. 1984. Т. 278, № 5. С. 1074–1077.

31. *Giga Y., Yoshida Z.* On the equations of the two-component theory in magnetohydrodynamics // Communs. Partial Diff. Eqns. 1984. V. 9. P. 503–522.

32. *Ebel D., Shen M.C.* On the linear stability of a toroidal plasma with resistivity, viscosity, and Hall effect // J. Math. Anal. Appl. 1987. V. 125. P. 81–103.

33. *Ebel D., Shen M.C.* Linearization principle for a toroidal Hall current plasma with viscosity and resistivity // Anal. Mat. Pura Appl. 1988. V. 150. P. 39–65.

34. *Blum J.* Numerical simulation and optimal control in plasma physics: with applications in tokamaks // Paris: Gauthier-Villars, 1989.

35. *Giga Y., Yoshida Z.* A dynamic free-boundary problem in physics // SIAM J. Math. Anal. 1990. V. 21. № 5. P. 1118–1138.

36. *Поспелов В.Л.* Об устойчивости стационарного решения одной задачи магнитной гидродинамики // Дифференц. ур-я. 1991. Т. 27, № 5. С. 875–886.

37. *Самохин В.Н.* О системе уравнений магнитной гидродинамики нелинейно вязких сред // Дифференц. ур-я. 1991. Т. 27, № 5. С. 886–896.

38. *Самохин В.Н.* Существование решения одной модификации системы уравнений магнитной гидродинамики // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 3. С. 395–407.

39. *Gunzburger M.D., Meir A.J., Peterson J.S.* On the existence, uniqueness, and finite element approximation of solution of the equations of stationary, incompressible magnetohydrodynamics // Math. Comp. 1991. V. 56, № 194. P. 523–563.

40. *Besson O., Bourgeois J., Chevalier P.-A., Rappaz J., Touzani R.* Numerical model of electromagnetic casting processes // J. Comput. Phys. 1991. V. 92. P. 482–507.

41. *Rappaz J., Touzani R.* Modelling of a two-dimensional magnetohydrodynamic problem // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1991. V. 10, № 5. P. 451–453.

42. *Rappaz J., Touzani R.* On a two-dimensional magnetohydrodynamic problem. 1. Modelling and Analysis // Rairo Modél. Math. Anal. Numer. 1992. V. 26, № 2. P. 347–364.

43. *Самохин В.Н.* О стационарных задачах магнитной гидродинамики неньютоновских сред // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33, № 4. С. 120–127.

44. *Spada M., Wobig H.* On the existence and uniqueness of dissipative plasma equilibria in a toroidal // J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 1575–1591.

45. *Ströhmer G.* About an initial-boundary value problem from magneto-hydrodynamics // Math. Z. 1992. V. 209. P. 345–362.

46. *Meir A.J.* The equations of stationary, incompressible magnetohydrodynamics with mixed boundary conditions // Comp. Math. Applic. 1993. V. 25. P. 13–29.

47. *Meir A.J., Schmidt P.G.* A velocity-current formulation for stationary MHD flow // Appl. Math. Comp. 1994. V. 65. P. 95–109.

48. *Hou L.S., Meir A.J.* Boundary optimal control of MHD flows // Appl. Math. Optim. 1995. V. 32. P. 143–162.

49. *Milone G., Solonnikov V.A.* On an initial boundary-value problem for equations of magnetohydrodynamics with Hall and ion-sleep effect // Zap. Nauchn. Sem. S. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI). 1995. V. 221. P. 167–184.

50. *Milone G., Solonnikov V.A.* On the solvability of some initial boundary-value problems of magnetofluidmechanics with Hall and ion-sleep effects // Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Mat. Natur. 1995. V. 6. P. 117–132.

51. *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах (математическое моделирование). М.: Наука, Физматлит, 1995.

52. *Hou L., Ravindran S.* Computations of boundary optimal control problems for an electrically conducting fluid //J. Comput. Phys. 1996. V. 128. P. 319–330.

53. *Meir A.J., Schmidt P.G.* Variational methods for stationary MHD flow under natural interface conditions // Nonlinear Analysis. 1996. V. 26, № 4. P. 659–689.

54. *Gerbeau J.-F., Le Bris C.* Existence of solution for a density-dependent magnetohydrodynamic equation // Adv. Differential Equations. 1997. V. 2, № 3. P. 427–452.

55. *Gerbeau J.-F., Le Bris C.* On a coupled system arising in magnetohydrodynamics // Appl. Math. Lett. 1999. V. 12. P. 53–57.

56. *Wiedmer M.* Finite element approximation for equations of magnetohydrodynamics // Math. Comp. 1999. V. 69, $\mathcal{N}$ 229. P. 83–101.

57. *Meir A.J., Schmidt P.G.* Analysis and numerical approximation of a stationary MHD flow problem with nonideal boundary // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 36. P. 1304–1332.

58. *Gerbeau J.-F.* A stabilized finite element method for the incompressible magnetohydrodynamics equations // Numer. Math. 2000. V. 87. P. 83–111.

59. *Schötzau D.* Mixed finite element methods for stationary incompressible magnetohydrodynamics // Numer. Math. 2004. V. 96. P. 771–880.

60. *Girault V., Raviart P.A.* Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 376 p.

61. *Valli A.* Orthogonal decompositions of $L^2(\Omega)^3$. Preprint UTM 493 / Department of Mathematics. University of Trento, 1995.

62. *Alonso A., Valli A.* Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of $\mathbf{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ and the construction of the extension operator // Manuscr. Math. 1996. V. 89. P. 159–178.

63. *Cessenat M.* Mathematical methods in electromagnetism. Linear theory and applications. V. 41. Word Scientific Publishing, 1996.

64. *Buffa A., Costabel M., Sheen D.* On traces for $\mathbf{H}(\mathbf{curl},\Omega)$ in Lipschitz domains // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 276, № 2. P. 845–876.

65. *Alonso A., Valli A.* An optimal domain decomposition preconditioner for low-frequency time-harmonic Maxwell equations // Math. Comp. 1999. V. 68. P. 607–631.

66. *Saranen J.* Degeneralized harmonic fields in domain with anisotropic nonhomogeneous media // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 88. P. 104–115.

67. *Saranen J.* On electric and magnetic problems for vector fields in anisotropic nonhomogeneous media // J. Math. Anal. Appl. 1983. V. 91. P. 254–275.

68. *Боговский М.Е.* Решение некоторых задач векторного анализа, связанных с операторами div и grad // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1980. С. 5–40.

69. *Picard R.* On the boundary value problems of electro- and magnetostatics // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1982. V. 92A. P. 165–174.

70. *Kotiuga P.R., Silvester P.P.* Vector potential formulation for three-dimensional magnetostatics // J. Appl. Phys. 1982. V. 53. P. 8399–8401.

71. *Bolik J., von Wahl W.* Estimating $\nabla \mathbf{u}$ in terms of $\operatorname{div}\mathbf{u}$, $\operatorname{curl}\mathbf{u}$ and either $\mathbf{u}\cdot\nu$ or $\mathbf{u}\times\nu$ and the topology // Math. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 20. P. 737–744.

72. *Mitrea D., Mitrea M., Pipher J.* Vector potential thory on nonsmooth domains in $\mathbb{R}^3$ and applications to electromagnetic scattering // J. Fourier Anal. Appl. 1997. V. 3, № 2. P. 131–192.

73. *Fernandes P., Gilardi G.* Magnetostatic and electrostatic problems in inhomogeneous anisotropic media with irregular boundary and mixed boundary conditions // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 7. P. 957–991.

74. *Auchmuty G.* Reconstruction of the velocity in the three-demensional fluid flows // Proc. Royal. Soc. Lond. 1998. V. 454A. P. 607–630.

75. *Amrouche C., Bernardi C., Dauge M., Girault V.* Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. V. 21. P. 823–864.

76. *Auchmuty G., Alexander J.C.* L^2–well-posedness of planar div–curl systems // Arch. Rat. Mech. Anal. 2001. V. 160. P. 91–134.

77. *Auchmuty G., Alexander J.* L^2–well posedeness of div–rot systems in space. Preprint. 2002.

78. *Алексеев Г.В.* Теоретический анализ обратных экстремальных задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Препринт № 1 / ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука. 2002. 78 с.

79. *Алексеев Г.В.* Разрешимость стационарных задач граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 982–998.

80. *Алексеев Г.В.* Стационарные задачи граничного управления для уравнений тепловой конвекции // Докл. РАН. 1998. Т. 362, № 2. С. 174–177.

81. *Алексеев Г.В., Смышляев А.Б., Терешко Д.А.* Неоднородные краевые задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса. Препринт № 19 / ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 2000. 60 с.

82. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений тепломассопереноса // Докл. РАН. 2000. Т. 375, № 3. С. 315–319.

83. *Alekseev G.V., Adomavichus E.A.* Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2001. V. 9. P. 435–468.

84. *Алексеев Г.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений тепломассопереноса // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 971–991.

85. *Алексеев Г.В., Адомавичюс Э.А.* Исследование обратных экстремальных задач для нелинейных стационарных уравнений переноса вещества // Дальневост. матем. журн. 2002. Т. 3, № 1. С. 79–92.

86. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарных уравнений теории массопереноса // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2002. Т. 42, № 3. С. 380–394.

87. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

88. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Разрешимость смешанной задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Дальневост. мат. журн. 2002. Т. 3, № 2. С. 285–301.

89. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* О разрешимости смешанной краевой задачи для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. технол. 2002. Т. 7, ч. 1, спец. вып. С. 242–250.

90. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Разрешимость обратных экстремальных задач для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости со смешанными граничными условиями // Дальневост. мат. журн. 2003. Т. 4, № 1. С. 108–126.

91. *Алексеев Г.В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Прикл. мех. техн. физ. 2003. Т. 44, № 6. С. 170–179.

92. *Алексеев Г.В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики // Докл. РАН. 2004. Т. 395, $\mathcal{N}$ 3. С. 322–325.

93. *Алексеев Г.В.* Разрешимость задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой жидкости // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 243–262.

94. *Алексеев Г.В.* О единственности решения задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, $\mathcal{N}$ 1. С. 142–157.

95. *Алексеев Г.В.* Теоретический анализ задач управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости. Препринт № 1 / ИПМ ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 2004. 80 с.

96. *Алексеев Г.В.* Обратные экстремальные задачи для стационарной модели магнитной гидродинамики теплопроводной жидкости // Вычисл. технол. 2004. Т. 9, ч. 1, спец. вып. С. 158–166.

97. *Бризицкий Р.В.* Задачи управления для модели МГД вязкой теплопроводной жидкости со смешанными граничными условиями // Дальневост. мат. журн. 2004. Т. 5, № 2. С. 226–238.

98. *Алексеев Г.В.* Краевые задачи и задачи управления для стационарной модели магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 6. С. 744–748.

99. *Алексеев Г.В., Бризицкий Р.В.* Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости со смешанными граничными условиями // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. 2005. Т. 45, № 12. С. 2131–2147.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 5 июля 2005 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 04-01-00136).

Alekseev G. V. Control problems for stationary models of magnetic hydrodynamics of a viscous incompressible fluid. Far Eastern Mathematical Journal. 2005. V. 6. № 1–2. P. 117–145.

ABSTRACT

A general technique is proposed for analysing control problems for stationary magnetohydrodynamic models of a viscous incompressible fluid. The review of results of study of boundary and control problems for stationary MHD models is given.

Key words: *magnetic hydrodynamics, viscous fluid, boundary value problems, control problems, optimality system, solvability, local uniqueness*