О. А. Дубовик, О. Б. Сидонский, Группа матриц и функции Лежандра,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 71–77

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ГРУППА МАТРИЦ И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

О. А. Дубовик, О. Б. Сидонский

1. Пусть $PH(3)$ — группа матриц четвертого порядка

$$g \equiv g(\tau, s, p, q, \varphi) = \begin{pmatrix} e^{\tau}\operatorname{ch}\varphi & e^{\tau}\operatorname{sh}\varphi & 0 & p \\ e^{\tau}\operatorname{sh}\varphi & e^{\tau}\operatorname{ch}\varphi & 0 & q \\ 0 & 0 & e^{\tau} & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представление группы $PH(3)$ в пространстве функций $f(x, y)$, бесконечно-дифференцируемых финитных по x на прямой $(-\infty, \infty)$ и аналитических периодических с периодом $2\pi i$ по y в комплексной плоскости, возьмем в виде

$$T_R(g) f(x, y) = \exp\left[-Re^{-x}(s + p\operatorname{ch} y - q\operatorname{sh} y)\right] \cdot f(x - \tau, y - \varphi). \tag{1}$$

Рассмотрим вторую реализацию представления $T_R(g)$ в пространстве интегральных преобразований $F(\lambda, \omega)$ функций $f(x, y)$:

$$F(\lambda, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dx \int_{-\pi i}^{\pi i} e^{\omega y} f(x, y)\, dy, \tag{2}$$

ω — целое,

$$Q_R(g) F(\lambda, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}\, dx \int_{-\pi i}^{\pi i} e^{\omega y} T_R(g) f(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Формула обращения преобразования (2) имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\lambda x}\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda, \omega)\, e^{-\omega y}\, d\mu(\omega), \tag{4}$$

$\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{(n)}$, $\delta_{(n)}$ — мера Дирака в точке n.

2. Найдем вид операторов $Q_R(g)$ для конкретных элементов $g \in PH(3)$. По формуле (1)

$$T_R(g(\tau, 0, 0, 0, \varphi))f(x, y) = f(x-\tau, y-\varphi);$$

тогда из (3) следует равенство

$$Q_R(g(\tau, 0, 0, 0, \varphi))F(\lambda, \omega) = e^{\lambda\tau+\omega\varphi}F(\lambda, \omega). \quad (5)$$

Из формул (4) и (3) следует, что для $g(0, s, \pm\sqrt{s^2-1}, 0, 0)$, если $s > 1$, $-1 < \operatorname{Re}\nu < 0$, $\operatorname{Re} R \geqslant 0$, операторы $Q_R(g(0, s, \pm\sqrt{s^2-1}, 0, 0))$ являются интегральными операторами

$$Q_R(g)F(\lambda, \omega) =$$
$$= \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} K(\lambda-\hat{\lambda}, \omega-\hat{\omega}; R; g)F(\hat{\lambda}, \hat{\omega}) \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\lambda}\, d\mu(\hat{\omega}) \quad (6)$$

с ядрами, выражаемыми через присоединенные функции Лежандра 1-го рода [1, стр. 149]:

$$K(\nu, m; R; g) = \frac{R^\nu}{2\pi i}(\mp 1)^m \Gamma(-\nu-m)\mathfrak{P}_\nu^m(s),$$
$$\nu = \lambda-\hat{\lambda}, \quad m = \omega-\hat{\omega}. \quad (7)$$

Если $g = g(0, s, 0, \pm\sqrt{1-s^2}, 0)$, $0 < s < 1$, $\operatorname{Re}\nu < 0$, $R > 0$, то операторы $Q_R(g)$ также являются интегральными операторами с ядрами, выражаемыми через присоединенные функции Лежандра 1-го рода на разрезе $0 < s < 1$ [1, стр. 143]:

$$K(\nu, m; R; g) = \frac{R^\nu}{2\pi i}(\pm 1)^m \Gamma(-\nu-m)P_\nu^m(s). \quad (8)$$

3. Если $Q_R(g_i)$, $i = 1, 2$, являются интегральными операторами с ядрами $K(\lambda, \omega; R; g_i)$, то в силу мультипликативного свойства

$$Q_R(g_1g_2) = Q_R(g_1)Q_R(g_2)$$

имеет место равенство [2, стр. 271]

$$K(\nu, m; R; g_1g_2) =$$
$$= \int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda, \omega; R; g_1)K(\nu-\lambda, m-\omega; R; g_2)\, d\lambda\, d\mu(\omega). \quad (9)$$

При различном выборе элементов g_1, g_2 группы PH (3) получаются различные соотношения для функций Лежандра.

Для элементов группы PH (3) имеет место равенство

$$g\left(0, s_1, \sqrt{s_1^2-1}, 0, 0\right) g(\tau, 0, 0, 0, \varphi)\cdot$$
$$\cdot g\left(0, s_2, \sqrt{s_2^2-1}, 0, 0\right) = g(t, 0, 0, 0, \psi)\, g\cdot$$
$$\cdot\left(0, S, \sqrt{S^2-1}, 0, 0\right) g(\tau t, 0, 0, 0, \varphi\psi),$$

где

$$s_1 > 1, \quad s_2 > 1, \quad S e^t = s_1 + e^\tau s_2,$$
$$\sqrt{S^2-1}\, e^t \operatorname{ch}\psi = \sqrt{s_1^2-1} + e^\tau \operatorname{ch}\varphi \sqrt{s_2^2-1},$$
$$\sqrt{S^2-1}\, e^t \operatorname{sh}\psi = e^\tau \operatorname{sh}\varphi \sqrt{s_2^2-1}.$$

Отсюда и из равенств (7) и (9) получим теорему сложения для присоединенных функций Лежандра 1-го рода:

$$e^{\nu t+m\psi}\mathfrak{P}_\nu^m(S) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{\omega\varphi}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\lambda\tau}\cdot$$
$$\cdot B(-\lambda-\omega, \lambda+\omega-\nu-m)\,\mathfrak{P}_\lambda^\omega(s_2)\,\mathfrak{P}_{\nu-\lambda}^{m-\omega}(s_1)\,d\lambda. \tag{10}$$

Воспользовавшись формулой обращения (2), из (10) получим теорему умножения:

$$B(-\lambda-\omega, \lambda+\omega-\nu-m)\,\mathfrak{P}_\lambda^\omega(s_2)\,\mathfrak{P}_{\nu-\lambda}^{m-\omega}(s_1) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi i}^{\pi i} e^{\nu t+m\psi}\mathfrak{P}_\nu^m(S)\, e^{-\lambda\tau-\omega\varphi}\, d\tau\, d\varphi.$$

Найдем соотношения, связывающие между собой присоединенные функции Лежандра $P_\nu^m(s)$ и $\mathfrak{P}_\nu^m(s)$. Для этого рассмотрим элемент g группы PH (3):

$$g = g\left(0, s_1, \sqrt{s_1^2-1}, 0, 0\right) g\left(0, s_2, 0, \sqrt{1-s_2^2}, 0\right),$$

где $s_1 > 1$, $0 < s_2 < 1$. Этот элемент можно представить в одном из следующих видов:

а) вне круга, $s_1^2 + s_2^2 > 2$,

$$g = g(t, 0, 0, 0, \psi)\, g\left(0, S, \sqrt{S^2-1}, 0, 0\right)\cdot$$
$$\cdot g(-t, 0, 0, 0, -\psi),$$

где

$$S e^t = s_1 + s_2, \quad e^t \operatorname{ch}\psi \sqrt{S^2-1} = \sqrt{s_1^2-1},$$
$$e^t \operatorname{sh}\psi \sqrt{S^2-1} = \sqrt{1-s_2^2};$$

b) на окружности, $s_1^2 + s_2^2 = 2$,

$$g = g\,(0, s_1 + s_2, r, r, 0), \qquad r = \sqrt{s_1^2 - 1};$$

c) внутри круга, $s_1^2 + s_2^2 < 2$,

$$g = g\,(t, 0, 0, 0, \psi)\, g\,(0, S, 0, \sqrt{1 - S^2}, 0)\cdot \\ \cdot g\,(-t, 0, 0, 0, -\psi),$$

где

$$S\mathrm{e}^t = s_1 + s_2,\quad \mathrm{e}^t \operatorname{sh}\psi \sqrt{1 - S^2} = \sqrt{s_1^2 - 1}, \\ \mathrm{e}^t \operatorname{ch}\psi \sqrt{1 - S^2} = \sqrt{1 - s_2^2}.$$

Применяя формулу (9), в соответствии с этим получим следующие соотношения между присоединенными функциями Лежандра на разрезе (0, 1) и вне его:

$$\hat{\mathrm{a}})\ (-1)^m \mathrm{e}^{\nu t + m\psi} \mathfrak{P}_\nu^m(S) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} (-1)^\omega \cdot \\ \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{B}\,(-\lambda - \omega, \lambda + \omega - \nu - m)\, \mathfrak{P}_\lambda^\omega(s_1)\, P_{\nu-\lambda}^{m-\omega}(s_2)\, \mathrm{d}\lambda,$$

где $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda - \nu) > 0$;

$$\hat{\mathrm{b}})\ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} (-1)^\omega \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{B}(-\lambda - \omega, \lambda + \omega - \nu - m)\cdot \\ \cdot \mathfrak{P}_\lambda^\omega(s_1)\, P_{\nu-\lambda}^{m-\omega}(s_2)\, \mathrm{d}\lambda = \begin{cases} (s_1 + s_2)^{\nu - m} \dfrac{r^m}{m!}\, \Gamma(m - \nu), & m \geqslant 0, \\ 0, & m < 0, \end{cases}$$

где $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda - \nu) > 0$;

$$\hat{\mathrm{c}})\ \mathrm{e}^{\nu t + m\psi} P_\nu^m(S) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} (-1)^\omega \cdot \\ \cdot \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathrm{B}\,(-\lambda - \omega, \lambda + \omega - \nu - m)\, \mathfrak{P}_\lambda^\omega(s_1)\, P_{\nu-\lambda}^{m-\omega}(s_2)\, \mathrm{d}\lambda,$$

где $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda - \nu) > 0$.

4. Для операторов представления имеет место соотношение

$$Q_R(g)\, Q_R(g^{-1}) = E,$$

где E — единичный оператор. При чисто мнимом $R = i\rho$, как следует из формул (6) и (7), операторы $Q_R(g)$ и $Q_R(g^{-1})$ являются одновременно интегральными и мы можем записать следующие взаимно обратные интегральные преобразования:

$$\Phi(\lambda, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (i\rho)^{\lambda-\hat{\lambda}} (\pm 1)^{\omega-\hat{\omega}} \Gamma(\hat{\lambda} + \hat{\omega} - \lambda - \omega) \cdot$$

$$\cdot \mathfrak{P}_{\lambda-\hat{\lambda}}^{\omega-\hat{\omega}}(s) F(\hat{\lambda}, \hat{\omega})\, d\hat{\lambda}\, d\mu(\hat{\omega}),$$

$$F(\lambda, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\rho)^{\lambda-\hat{\lambda}} (\pm 1)^{\omega-\hat{\omega}} \Gamma(\hat{\lambda} + \hat{\omega} - \lambda - \omega) \cdot$$

$$\cdot \mathfrak{P}_{\lambda-\hat{\lambda}}^{\omega-\hat{\omega}}(s) \Phi(\hat{\lambda}, \hat{\omega})\, d\hat{\lambda}\, d\mu(\hat{\omega}),$$

где $s > 1,\ 1 > \operatorname{Re}(\lambda - \hat{\lambda}) > 0$.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики
при Томском государственном
университете

Поступило
17.V.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., «Наука», 1973.
[2] Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, М., «Наука», 1965.