Н. В. Миллионщиков, Асимптотическая нормальность оценок регрессии для слабозависимых случайных полей,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2005, номер 2, 3–8

Математика

УДК 519.214

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК РЕГРЕССИИ ДЛЯ СЛАБОЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Н. В. Миллионщиков

1. Введение. Регрессионные модели, традиционно представляя большой теоретический интерес, используются во многих прикладных задачах (см., например, [1, 2]).

Рассмотрим строго стационарное случайное поле $\{(X_j, Y_j), j \in \mathbb{Z}^d\}$, $d \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathrm{Law}(X_j, Y_j) = \mathrm{Law}(X, Y)$, где X, Y — случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^s$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Одни из наиболее распространенных непараметрических оценок функции регрессии $r(x) := E(Y|X = x)$, $x \in \mathbb{R}^s$, были введены Надарая и Ватсоном (см. [1] и там же библиографию). Эти оценки определяются следующим образом:

$$\widehat{r}_n(x) := \sum_{j\in U_n} Y_j K((x - X_j)h_n^{-1}) \left(\sum_{j\in U_n} K((x - X_j)h_n^{-1}) \right)^{-1},$$

если $\sum_{j\in U_n} K((x - X_j)h_n^{-1}) \neq 0$, и $\widehat{r}_n(x) := 0 \in \mathbb{R}^m$ в противном случае. Здесь $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$, $K(x)$ — плотность некоторого распределения вероятностей, а $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю при $n \to \infty$.

Выберем k различных точек $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^s$, таких, что $g(x_p) > 0$, $p = 1, \dots, k$, где $g(x)$ — плотность X. В данной работе изучается асимптотика совместных распределений случайных векторов $\widehat{r}_n(x_1), \dots, \widehat{r}_n(x_k)$ при $n \to \infty$. В качестве промежуточных результатов доказывается несколько свойств ядерных оценок $\widehat{g}_n(x) := (|U_n| h_n^s)^{-1} \sum_{j\in U_n} K((x - X_j)h_n^{-1})$ плотности $g(x)$ случайного вектора X, здесь $|U_n|$ обозначает количество элементов множества U_n.

Мы будем использовать понятие (BL, θ)-зависимости (см. [3]). Напомним, что функция $F\colon S \to M$, где (S, δ) и (M, τ) — метрические пространства, называется липшицевой, если

$$\mathrm{Lip}(F) = \sup_{x,y\in S, x\neq y} \frac{\tau(F(x), F(y))}{\delta(x, y)} < \infty.$$

Для $m \geqslant 1$ определим класс $BL(S^m)$ как совокупность ограниченных липшицевых функций $F : S^m \to \mathbb{R}$, отображающих метрическое пространство (S^m, δ_m) в $\mathbb{R}$, причем $\delta_m(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \delta(x_k, y_k)$ для $x = (x_1, \dots, x_m) \in S^m$ и $y = (y_1, \dots, y_m) \in S^m$, а в $\mathbb{R}$ берется евклидово расстояние.

Далее T — метрическое пространство с метрикой ρ.

Определение 1 (см. [3]). Случайное поле $X = \{X_t, t \in T\}$, принимающее при каждом t значения в метрическом пространстве S, называется (BL, θ)-зависимым, если для любого $s \in T$ и произвольного конечного множества $J \subset T$, такого, что $s \notin J$, неравенство

$$|\mathrm{cov}(F(X_s), G(X_t, t \in J))| \leqslant \theta_r \mathrm{Lip}(F) \mathrm{Lip}(G), \tag{1}$$

где $\theta = \{\theta_r\}_{r\geqslant 1}$ — такая числовая последовательность, что $\theta_r \to 0$ при $r \to \infty$, и $r = \inf\{\rho(s,t) : t \in J\}$, справедливо при всех $F \in BL(S), G \in BL(S^{|J|})$.

Очевидно, любое семейство независимых случайных векторов удовлетворяет (1). В ряде задач математической статистики, теории надежности, теории перколяции и статистической физики используются понятия положительной и отрицательной ассоциированности (см. [3] и ссылки там же). С определением 1 тесно связано введенное в статье [3] понятие квазиассоциированности, которое для полей с конечными вторыми моментами позволяет охватывать как положительную, так и отрицательную ассоциированность. Как показано в работе [4], любое гауссовское случайное поле обладает свойством квазиассоциированности.

В работах [5, 6] доказана асимптотическая нормальность ядерных оценок плотности квазиассоциированного и (BL,θ)-зависимого случайного поля соответственно. Подчеркнем, что, исследуя асимптотику распределений оценок $\widehat{g}_n(x), \widehat{r}_n(x)$, мы не будем в отличие от [5, 6] налагать никаких ограничений на форму множеств U_n. Это оказывается возможным благодаря использованию некоторых специфических свойств рассматриваемых случайных полей и применению метода Стейна (см. [7]) для доказательства установленной ниже леммы 1.

2. Основные результаты. Введем несколько новых обозначений. Для $i \neq j$, $i,j = 1,\dots,m$, пусть $f_i(x,u)$, $f_{ij}(x,u,v)$ — плотности векторов (X_0, Y_{0i}) и (X_0, Y_{0i}, Y_{0j}) соответственно, здесь $0 \in \mathbb{Z}^d$, а Y_{0i} обозначает i-ю координату вектора Y_0. Положим

$$v_{ii}(x_p) := \int\limits_{\mathbb{R}} (u - r_i(x_p))^2 f_i(x_p, u)\, du \int\limits_{\mathbb{R}^s} K^2(x)\, dx,$$

$$v_{ij}(x_p) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} (u - r_i(x_p))(v - r_j(x_p)) f_{ij}(x_p, u, v)\, du dv \int\limits_{\mathbb{R}^s} K^2(x)\, dx,$$

где $r_i(x_p)$ — i-я координата $r(x_p)$. В формулировках результатов статьи будет фигурировать блочно-диагональная матрица $V_R^2 = V_R^2(x_1,\dots,x_k) := \operatorname{diag}\{V(x_1),\dots,V(x_k)\}$, где $V(x_p) := (v_{ij}(x_p))_{i,j=1,\dots,m}$ для $p = 1,\dots,k$. Предполагается, что $V_R^2 > 0$.

Составим вектор

$$R(n) := (|U_n| h_n^s)^{1/2} (g(x_1)(\widehat{r}_n(x_1) - r(x_1)), \dots, g(x_k)(\widehat{r}_n(x_k) - r(x_k)))$$

со значениями в $\mathbb{R}^{km}$. Целью данной работы является получение оценки сверху величины

$$\Delta(n) := \sup_{B \in \mathcal{C}_{km}} |P(V_R^{-1} R(n) \in B) - P(Z \in B)|.$$

Здесь и далее $\mathcal{C}_{km}$ — класс выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^{km}$, Z — стандартный нормальный вектор в $\mathbb{R}^{km}$, а V_R^{-1} — матрица, обратная к положительному квадратному корню из V_R^2.

Сделаем несколько замечаний. Далее буква C будет обозначать, вообще говоря, различные для разных формул положительные множители, не зависящие от n, а в некоторых случаях и от других параметров, что будет оговариваться отдельно. Так как все наши оценки доказываются с точностью до множителей, которые могут зависеть от размерности рассматриваемых конечномерных пространств, мы не будем указывать, какая именно из норм используется в каждом конкретном случае. В качестве расстояния между точками $i = (i_1,\dots,i_d)$ и $j = (j_1,\dots,j_d)$ из $\mathbb{Z}^d$ всегда будет выступать $\|i - j\| = \max_{1 \leqslant q \leqslant d} |i_q - j_q|$.

Теперь приведем четыре группы условий.

(A_1) Пусть $\{(X_j, Y_j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ — строго стационарное (BL,θ)-зависимое случайное поле, X_j принимают значения в $\mathbb{R}^s$, Y_j — в $\mathbb{R}^m$, $\|Y_0\| \leqslant C$ п.н. Предположим, что векторы (X_0, Y_0), (X_0, X_j), $j \in \mathbb{Z}^d$, $j \neq 0$, имеют плотности $f(x,y)$, $g_j(x_1,x_2)$ соответственно, причем функция $f(x,y)$ липшицева по x, а функции $g_j(x_1,x_2)$ ограничены на $\mathbb{R}^{2s}$ равномерно по j.

(A_2) Пусть ядро $K(x)$ есть липшицева функция и $\int_{\mathbb{R}^s} \|x\| K(x) dx < \infty$.

(A_3) Пусть $|U_n| h_n^s \to \infty$, $|U_n| h_n^{s+2} \to 0$ при $n \to \infty$.

(A_4) Предположим, что в качестве θ из определения (BL,θ)-зависимости поля $\{(X_j, Y_j), j \in \mathbb{Z}^d\}$ можно взять последовательность $\{u(r)\}_{r \in \mathbb{N}}$, для которой существуют натуральные числа q_n, такие, что $u(q_n) h_n^{-(s+2)} \to 0$ и $q_n^d h_n^s \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что условия $(A_1), (A_2)$ обеспечивают конечность элементов $v_{ij}(x_p)$ матрицы V_R^2.

Теорема. *Пусть матрица V_R^2 невырождена и выполняются условия $(A_1) - (A_4)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\Delta(n) \leqslant C\{H_n + (|U_n| h_n^{s+2})^{1/2}\},$$

где

$$H_n := ((|U_n| h_n^s)^{-1/2} + q_n^d h_n^s + u(q_n) h_n^{-(s+2)})^{1/3}. \tag{2}$$

3. Доказательства. В основе доказательства теоремы лежит следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть U — конечное подмножество $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, а $\{\xi_j, j \in U\}$ — строго стационарное центрированное (BL, θ)-зависимое случайное поле со значениями в $\mathbb{R}^m$, причем для всех $i \neq j$, $i, j \in U$, и некоторых положительных констант a_1, a_2, a_3*

$$\|\xi_i\| \leqslant a_1 \text{ п.н.}, \ E\|\xi_i\| \leqslant a_2, \ E\|\xi_i\|\|\xi_j\| \leqslant a_3, \ \mathrm{Var}(\xi_i) = V^2 > 0.$$

Тогда для любого $r \in \mathbb{N}$, такого, что $(2r+1)^d \leqslant |U|$, и всех $\gamma \in (0, \gamma_0], \gamma_0 = \gamma_0(m) > 0$, справедлива оценка

$$\sup_{B \in \mathcal{C}_m} |P(|U|^{-1/2} V^{-1} \sum_{j \in U} \xi_j \in B) - P(Z \in B)| \leqslant$$

$$\leqslant C\{\gamma^{-1}\|V^{-1}\|^2(a_3 r^d + \theta_r) + \gamma^{-2} a_1 \|V^{-1}\|^3 |U|^{-1/2}(a_1 a_2 + \theta_1 + a_2^2) + \gamma\},$$

где $C = C(m, d)$, Z — стандартный нормальный вектор в $\mathbb{R}^m$, а θ_r фигурирует в определении 1.

Доказательство. Воспользуемся методом Стейна подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1 в статье [6]. Положим

$$\zeta_j := |U|^{-1/2} V^{-1} \xi_j, \quad S := \sum_{j \in U} \zeta_j, \quad \mathbb{S}_i := (S_i, \ldots, S_m),$$

и рассмотрим функциональное уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} E\Big(\frac{\partial f_i(\mathbb{S}_i)}{\partial x_i} - S_i f_i(\mathbb{S}_i)\Big) = Eh(S) - Eh(Z), \tag{3}$$

в котором $h(x) = h_B(x)$ — гладкая функция, используемая в качестве приближения индикатора выпуклого множества B. Таким образом, для доказательства леммы необходимо оценить левую часть равенства (3).

Для каждого $B \subset \mathbb{R}^m$ и $\gamma > 0$ определим множество $B^{(\gamma)} := \{x \in \mathbb{R}^m : inf_{y \in B}\|x - y\| < \gamma\}$. Согласно лемме 2 из [6], можно считать, что $h(x)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$0 \leqslant h(x) \leqslant 1, x \in \mathbb{R}^m, \ h(x) = 1, x \in B, \ h(x) = 0, x \notin B^{(\gamma)}, \ \Big|\frac{\partial h(x)}{\partial x_k}\Big| \leqslant C\gamma^{-1}, \ \Big|\frac{\partial h(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial h(x')}{\partial x_k}\Big| \leqslant C\gamma^{-2}\|x - x'\|$$

для всех $k = 1, \ldots, m$, $x, x' \in \mathbb{R}^m$. А из леммы 1 той же статьи следует, что найдутся функции $f_i = f_i(x_i, \ldots, x_m)$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющие (3) и такие, что

$$|f_i(x)| \leqslant C, \ \Big|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k}\Big| \leqslant C\gamma^{-1}, \ \Big|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial f_i(x')}{\partial x_k}\Big| \leqslant C\gamma^{-2}\|x - x'\| \tag{4}$$

для всех $k = i, \ldots, m$, $x, x' \in \mathbb{R}^{m-i+1}$ и $\gamma \in (0, \gamma_0]$, $\gamma_0 = \gamma_0(m) > 0$.

Теперь оценим $|\sum_{i=1}^m E(\partial f_i(\mathbb{S}_i)/\partial x_i - S_i f_i(\mathbb{S}_i))|$, уже зная, что функции f_i удовлетворяют (4). Введем обозначения

$$S^{jr} := \sum_{k \in U : \|k - j\| \geqslant r} \zeta_k, \quad \mathbb{S}_i^{jr} := (S_i^{jr}, \ldots, S_m^{jr}), \quad \mathbb{S}_i^j := \mathbb{S}_i^{j1},$$

здесь $r \in \mathbb{N}$ и $(2r+1)^d \leqslant |U|$. Имеем

$$ES_i f_i(\mathbb{S}_i) = \sum_{j \in U} E\zeta_{ji}(f_i(\mathbb{S}_i^j) - f_i(\mathbb{S}_i^{jr})) + \sum_{j \in U} E\zeta_{ji} f_i(\mathbb{S}_i^{jr}) +$$

$$+ \sum_{j \in U} E\Big\{\zeta_{ji}(f_i(\mathbb{S}_i) - f_i(\mathbb{S}_i^j) - \sum_{k=i}^{m} \frac{\partial f_i(\mathbb{S}_i^j)}{\partial x_k}\zeta_{jk})\Big\} + \sum_{j \in U}\sum_{k=i}^{m} E\frac{\partial f_i(\mathbb{S}_i^j)}{\partial x_k}\zeta_{jk}\zeta_{ji} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4. \tag{5}$$

Используя условия леммы и соотношения (4), нетрудно показать, что

$$|\Sigma_1| \leqslant C\gamma^{-1}\|V^{-1}\|^2 r^d a_3, \quad |\Sigma_2| \leqslant C\gamma^{-1}\|V^{-1}\|^2 \theta_r, \quad |\Sigma_3| \leqslant C\gamma^{-2}\|V^{-1}\|^3 |U|^{-1/2} a_1^2 a_2. \tag{6}$$

Поскольку $\sum_{j\in U}\mathrm{Var}(\zeta_j)=I$, где I — единичная матрица, получаем

$$\Big|\Sigma_4 - E\frac{\partial f_i(\mathbb{S}_i)}{\partial x_i}\Big| \leqslant \sum_{j\in U}\sum_{k=i}^{m}\Big|\mathrm{cov}\big(\frac{\partial f_i(\mathbb{S}_i^j)}{\partial x_k},\zeta_{jk}\zeta_{ji}\big)\Big| + \sum_{j\in U}\sum_{k=i}^{m} E\Big|\frac{\partial f_i(\mathbb{S}_i^j)}{\partial x_k} - \frac{\partial f_i(\mathbb{S}_i)}{\partial x_k}\Big| E|\zeta_{jk}\zeta_{ji}| = \Delta_1+\Delta_2. \qquad (7)$$

Очевидно,

$$\Delta_1 \leqslant C\gamma^{-2}\|V^{-1}\|^3|U|^{-1/2}a_1\theta_1, \quad \Delta_2 \leqslant C\gamma^{-2}\|V^{-1}\|^3|U|^{-1/2}a_2^2a_1. \qquad (8)$$

Из (5)–(8) следует неравенство

$$\Big|\sum_{i=1}^{m}E(\partial f_i(\mathbb{S}_i)/\partial x_i - S_if_i(\mathbb{S}_i))\Big| \leqslant C(\gamma^{-1}\|V^{-1}\|^2(r^da_3+\theta_r)+\gamma^{-2}a_1\|V^{-1}\|^3|U|^{-1/2}(a_1a_2+\theta_1+a_2^2)).$$

В завершение доказательства леммы осталось заметить, что

$$|P(S\in B)-P(Z\in B)| \leqslant \sup_{B\in\mathcal{C}_m}|Eh_B(S)-Eh_B(Z)| + P(Z\in(\partial B)^{(\gamma)}),$$

где ∂B — граница множества B, и $P(Z\in(\partial B)^{(\gamma)})\leqslant C\gamma$ (см. лемму 5 из [6]).

В дальнейшем используется следующий простой результат.

Лемма 2. *Пусть ζ_0,ζ_1 — случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^m$, тогда для любого $\delta>0$*

$$\sup_{B\in\mathcal{C}_m}|P(\zeta_0+\zeta_1\in B)-P(Z\in B)| \leqslant \sup_{B\in\mathcal{C}_m}|P(\zeta_0\in B)-P(Z\in B)| + P(\|\zeta_1\|>\delta)+C\delta.$$

Для доказательства теоремы нам потребуется установить несколько свойств ядерных оценок $\widehat{g}_n(x)$ плотности $g(x)$. Рассмотрим вектор $L(n)=(L_1(n),\dots,L_k(n))$ с компонентами

$$L_p(n) := (|U_n|h_n^s)^{1/2}\sigma_p^{-1}(\widehat{g}_n(x_p)-E\widehat{g}_n(x_p)),$$

где $\sigma_p^2 := g(x_p)\int_{\mathbb{R}^s}K^2(x)\,dx$, $p=1,\dots,k$.

Предложение 1. *Пусть выполнены условия $(A_1)-(A_4)$, тогда для любого $n\in\mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\sup_{B\in\mathcal{C}_k}|P(L(n)\in B)-P(Z\in B)| \leqslant CH_n,$$

где H_n фигурирует в (2), а Z — стандартный нормальный вектор в $\mathbb{R}^k$.

Доказательство. Обозначим

$$K_{jp}(n) := h_n^{-s/2}\sigma_p^{-1}K((x_p-X_j)h_n^{-1}), \quad K_j(n) := (K_{j1}(n),\dots,K_{jk}(n)),$$

$$\kappa_j(n) := K_j(n)-EK_j(n).$$

Легко видеть, что $\kappa_j(n), j\in U_n$, при каждом $n\in\mathbb{N}$ образуют (BL,θ)-зависимое случайное поле и в качестве θ можно взять последовательность $\{Cu(r)h_n^{-(s+2)}\}_{r\in\mathbb{N}}$, где C не зависит от n и r. Простые вычисления показывают, что при всех достаточно больших $n\in\mathbb{N}$ случайные векторы $\kappa_j(n), j\in U_n$, удовлетворяют всем условиям леммы 1, а в качестве величин a_1, a_2, a_3 можно взять $Ch_n^{-s/2}$, $Ch_n^{s/2}$, Ch_n^s соответственно. Положив $r=q_n$ и $\gamma=H_n$ в лемме 1, получим

$$\sup_{B\in\mathcal{C}_k}|P(|U_n|^{-1/2}V_n^{-1}\sum_{j\in U_n}\kappa_j(n)\in B)-P(Z\in B)| \leqslant CH_n, \qquad (9)$$

где V_n^{-1} — матрица, обратная к квадратному корню из $V_n^2 := \mathrm{Var}(\kappa_0(n))$ (предполагается, что n достаточно велико, и тогда V_n^2 невырождена).

Представим $L(n)$ в виде суммы

$$L(n) = |U_n|^{-1/2}V_n^{-1}\sum_{j\in U_n}\kappa_j(n) + |U_n|^{-1/2}(V_n-I)V_n^{-1}\sum_{j\in U_n}\kappa_j(n),$$

где I — единичная матрица. Воспользовавшись леммой 2 при $\delta = h_n^{1/2}$ и легко проверяемым соотношением $\|V_n - I\| \leqslant Ch_n$, получим неравенство

$$\sup_{B\in\mathcal{C}_k} |P(L(n) \in B) - P(Z \in B)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{B\in\mathcal{C}_k} |P(|U_n|^{-1/2}V_n^{-1} \sum_{j\in U_n} \kappa_j(n) \in B) - P(Z \in B)| + P(\|Z\| > Ch_n^{-1/2}) + Ch_n^{1/2}.$$

Следовательно, применение неравенства (9), простой оценки $P(\|Z\| > Ch_n^{-1/2}) \leqslant Ch_n^{1/2}$ и второго соотношения в условиях (A_3) завершает доказательство предложения.

Сформулируем простое следствие предложения 1.

Следствие. *Пусть выполнены условия* $(A_1)-(A_4)$. *Тогда для всех* $\varepsilon > 0$, $p = 1, \dots, k$ *и* $n \in \mathbb{N}$, *таких, что* $h_n < \varepsilon$, *справедливы неравенства*

$$P(|\widehat{g}_n(x_p) - g(x_p)| \geqslant \varepsilon) \leqslant C(H_n + (|U_n|h_n^s)^{-1/2}(\varepsilon - h_n)^{-1}e^{-C(\varepsilon-h_n)^2|U_n|h_n^s}),$$

$$P\Big(\sum_{j\in U_n} K((x_p - X_j)h_n^{-1}) = 0\Big) \leqslant CH_n.$$

Доказательство теоремы. Обозначим

$$M_{jp}(n) := h_n^{-s/2}(Y_j - r(x_p))K((x_p - X_j)h_n^{-1}), \quad M_j(n) := (M_{j1}(n), \dots, M_{jk}(n)),$$

$$\mu_j(n) := M_j(n) - EM_j(n).$$

Следуя схеме доказательства предложения 1, можно получить оценку

$$\sup_{B\in\mathcal{C}_{km}} |P(|U_n|^{-1/2}V_R^{-1} \sum_{j\in U_n} \mu_j(n) \in B) - P(Z \in B)| \leqslant CH_n. \tag{10}$$

Используя условия $(A_1), (A_2)$, можно показать, что $E\|M_0(n)\| \leqslant Ch_n^{(s+2)/2}$. Отсюда и из (10) вытекает неравенство

$$\sup_{B\in\mathcal{C}_{km}} |P(V_R^{-1}T(n) \in B) - P(Z \in B)| \leqslant C(H_n + |U_n|^{1/2}h_n^{(s+2)/2}),$$

где вектор $T(n) := |U_n|^{-1/2}\sum_{j\in U_n}\mu_j(n) + |U_n|^{1/2}EM_0(n)$. Рассмотрим диагональную матрицу $G_n = \operatorname{diag}\{g_1(n), \dots, g_1(n), \dots, g_k(n), \dots, g_k(n)\}$ размера $km \times km$; здесь $g_p(n) := g(x_p)/\widehat{g}_n(x_p)$, если $\widehat{g}_n(x_p) \neq 0$, и $g_p(n) = 0$ в противном случае, $p = 1, \dots, k$. Очевидно, $R(n) = G_nT(n)$.

Представим $V_R^{-1}R(n)$ в виде суммы $V_R^{-1}R(n) = V_R^{-1}T(n) + (G_n - I)V_R^{-1}T(n)$. Используя лемму 2, для всех $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ получим

$$\Delta(n) = \sup_{B\in\mathcal{C}_{km}} |P(V_R^{-1}R(n) \in B) - P(Z \in B)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{B\in\mathcal{C}_{km}} |P(V_R^{-1}T(n) \in B) - P(Z \in B)| + P(\|G_n - I\| > \delta) + \delta/\varepsilon + \varepsilon. \tag{11}$$

Теперь для завершения доказательства теоремы осталось применить следствие 1 и положить $\varepsilon = (|U_n|h_n^s)^{-1/6}$, $\delta = (|U_n|h_n^s)^{-1/3}$ в соотношении (11).

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 03–01–00724.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Надарая Э.А.* Непараметрическое оценивание плотности вероятности и кривой регрессии. Тбилиси: Изд-во Тбилисского гос. ун-та, 1983.
2. *Dette H., Zhang C.* A power comparison between nonparametric regression tests // Statist. Probab. Let. 2004. **66**. 289–301.

3. *Bulinski A., Suquet Ch.* Normal approximation for quasi-associated random fields // Statist. Probab. Let. 2001. **54**. 215–226.
4. *Шашкин А.П.* Квазиассоциированность гауссовской системы случайных векторов // Успехи матем. наук. 2002. **57**, вып. 6. 199–200.
5. *Булинский А.В., Миллионщиков Н.В.* Скорость нормального приближения для ядерных оценок плотности квазиассоциированного случайного поля // Теория вероятностей и математическая статистика. 2002. **66**. 34–45.
6. *Bulinski A., Shashkin A.* Rates in the central limit theorem for weakly dependent random variables // J. Math. Sci. 2004. **122**, N 4. 3343–3358.
7. *Stein C.* Approximate Computation of Expectation // Lecture Notes **7**. Hayward, CA: IMS, 1986.

Поступила в редакцию
11.04.2004

УДК 517.982, 517.983

ПРИМЕР ПОЗИТИВНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, НЕ ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ МОМЕНТНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

М. Ю. Кувшинов

1. Введение. Напомним основные определения, относящиеся к комплексной проблеме моментов.

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{c_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$ называется комплексной моментной последовательностью, если существует мера $\mu(z)$ на C (определенная на борелевских множествах), такая, что

$$c_{k,l} = \int\limits_C z^k \overline{z}^l \, d\mu(z), \quad k,l = 0,1,2,\dots . \tag{1}$$

Меру $\mu(z)$ на C, удовлетворяющую уравнению (1), будем называть решением комплексной проблемы моментов, порождаемой последовательностью $\{c_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$.

Одна из первых постановок комплексной проблемы моментов приведена в статье [1]. Важнейшая задача — разрешимость комплексной проблемы моментов. Отметим, что данная задача тесно связана с проблемой существования нормального оператора, являющегося расширением данного формально нормального оператора [1, 2].

Для последовательности $\{c_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$ и меры $\mu(z)$, удовлетворяющих уравнению (1), имеем

$$\sum_{k,l,p,q=0}^{n} c_{k+q,l+p}\lambda_{k,l}\overline{\lambda}_{p,q} = \int\limits_C \left|\sum_{k,l=0}^{n} \lambda_{k,l} z^k \overline{z}^l\right|^2 d\mu(z) \geqslant 0, \quad \forall\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^{n} \subset C, \quad \forall n \in N.$$

Таким образом, получаем хорошо известное необходимое условие разрешимости комплексной проблемы моментов (1): для комплексной моментной последовательности $\{c_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k,l,p,q=0}^{n} c_{k+q,l+p}\lambda_{k,l}\overline{\lambda}_{p,q} \geqslant 0, \quad \forall\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^{n} \subset C, \quad \forall n \in N.$$

Определение 2. Последовательность $\{c_{k,l}\}_{k,l=0}^{\infty} \subset C$ называется комплексной позитивной последовательностью, если

$$\sum_{k,l,p,q=0}^{n} c_{k+q,l+p}\lambda_{k,l}\overline{\lambda}_{p,q} > 0, \quad \forall\{\lambda_{k,l}\}_{k,l=0}^{n} \not\equiv 0, \quad \forall n \in N.$$

Из работ [3–5], посвященных двумерной проблеме моментов, следует (см., например, [2]), что существует комплексная позитивная последовательность, не являющаяся комплексной моментной последовательностью. Однако этот факт доказывается в абстрактной форме без конкретного примера.