О. С. Розанова, Об оценке времени существования гладкого решения уравнений гидравлики для потоков на наклонных поверхностях, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1998, том 4, выпуск 1, 333–344

Об оценке времени существования гладкого решения уравнений гидравлики для потоков на наклонных поверхностях

О. С. РОЗАНОВА
Белгородский государственный университет

УДК 517.598

Ключевые слова: двумерные уравнения гидравлики, задача Коши, время существования решения.

Аннотация

Найден класс гладких начальных данных задачи Коши для системы двумерных уравнений гидравлики в приближении Сен-Венана, при которых в течение некоторого конечного времени гладкость решения теряется. Отдельно рассмотрен случай мелкомасштабных движений, когда не существенны скатывающая сила и трение.

Abstract

O. S. Rosanova, On an estimation of the time of existence of smooth solution of hydraulics equations for flows on inclined surfaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika vol. 4 (1998), № 1, p. 333–344.

A class of smooth initial data of Cauchy problem for two-dimensional equations of hydraulics as Saint-Venant approximation is found, such that the corresponding solutions loose their smoothness during some finite time period. The case of small-scale flows, when the rolling force and friction are not essential, is taken up separately.

Пусть задана гладкая наклонная криволинейная поверхность, $(x^1, x^2) = (x, y)$ — некоторые локальные криволинейные координаты на этой поверхности, $\alpha(x, y)$ — меньший угол, который образует вектор, противоположный вектору ускорения свободного падения $\vec{g}$ с вектором внешней нормали к поверхности. Будем считать, что угол $\alpha(x, y)$ является гладкой функцией координат и заключен в пределах $[0, \alpha_*]$, $\alpha_* < \frac{\pi}{2}$.

Обозначим через h глубину потока, измеренную по нормали ко дну, через v^1 и v^2 — компоненты усредненного по глубине вектора скорости $\vec{v}$ вдоль дна, радиус кривизны дна через R, а через l — характерный масштаб длины. В предположении, что $\frac{h}{l} \ll 1$, $\frac{h}{R} \ll 1$ и в пренебрежении криволинейностью системы координат (x, y) могут быть выведены уравнения гидравлики первого приближения ([1]) для описания движения однородной несжимаемой среды:

Фундаментальная и прикладная математика 1998, том 4, № 1, с. 333–344.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} h\vec{v} = 0, \tag{0.1}$$

$$h\frac{d\vec{v}}{dt} = hg\sin\alpha\vec{e} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\frac{gh^2\cos\alpha}{2} - (\vec{\tau} + \vec{\tau}_a). \tag{0.2}$$

Здесь $\vec{e}$ — единичный вектор, касательный к линиям наибольшего спуска на дне, $\vec{\tau}$ и $\vec{\tau}_a$ — силы трения о дно и на верхней границе потока соответственно (эти функции могут зависеть от x, y, а также от решения), $g = |\vec{g}|$.

Для системы (0.1)–(0.2) рассмотрим задачу Коши с начальными данными

$$h(0,x,y) = h_0(x,y) \geqslant 0, \quad \vec{v}(0,x,y) = \vec{v}_0(x,y), \tag{0.3}$$

принадлежащими пространству $C_0^1(\mathbb{R}^2)$ непрерывно дифференцируемых финитных функций.

Квазилинейная система (0.1)–(0.2) приводится к виду симметрической гиперболической [2] (в том числе и при $h \geqslant 0$ [3, 4]) и поэтому при достаточной гладкости начальных данных и функций $\vec{\tau}, \vec{\tau}_a$ по всем переменным обладает локально по времени t классическим финитным (при любом фиксированном t) решением задачи Коши (0.1)–(0.3) [4, 5]. А именно, если $h_0 \geqslant 0$, $(h_0, v_0) \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, $(h_0^{\frac{1}{2}}, v_0) \in W_2^s(\mathbb{R}^2)$ $(s > 2)$, $\vec{\tau}, \vec{\tau}_a$ в начальный момент времени принадлежат $W_2^s(\mathbb{R}^2)$ и имеют производные вплоть до порядка $s+1$ по всем переменным, непрерывные и ограниченные, пока решение остается ограниченным, то существует T, такое что задача Коши (0.1)–(0.3) имеет единственное решение из пространства $C\Big([0,T], W_2^s(\mathbb{R}^2)\Big) \cap C^1\Big([0,T], W_2^{s-1}(\mathbb{R}^2)\Big) \cap L_\infty\Big([0,T], W_2^s(\mathbb{R}^2)\Big)$, являющееся финитным и таким, что $h \geqslant 0$ (см. также [6], где разрешимость доказана в иных классах функциональных пространств; в случае $h > 0$ результат о локальном существовании решения непосредственно следует из [5, 7]).

Хорошо известно, что существует тенденция к образованию особенностей первоначально гладких решений квазилинейных гиперболических уравнений и систем, при этом особенности связаны либо с обращением при $t \to T_*$ в бесконечность L_∞-норм первых производных решения, что соотносится с появлением «ударной волны» (в нашем случае — скачка уровня), либо с обращением в бесконечность L_∞-нормы самого решения [7, 8].

В настоящей работе выделяются классы начальных данных, при которых в течение некоторого конечного времени классическое решение разрушается, и оценивается это время. (Отметим, что исследование распространения уже сформировавшихся скачков уровня является отдельной задачей (см. [1, 9] и содержащиеся там ссылки).)

Задачи такого рода для квазилинейных гиперболических уравнений и систем неоднократно рассматривались (см. [10], а также обзор в [8]). Основным инструментом исследования при этом являлся либо метод характеристик, либо тесно с ним связанные методы. Однако подобному анализу поддается весьма ограниченное количество классов уравнений и систем: это, прежде всего, системы законов сохранения $m \times m$ в пространстве одной переменной [11, 12], из которых наиболее детально изучены системы 2×2 [13, 14], скалярные законы сохранения в пространстве n переменных [15, 16], а также некоторые типы систем $n \times n$ в пространстве n переменных [17]. При этом во многих случаях показано, что если начальные данные «достаточно малы», то система имеет глобальное гладкое решение.

Однако многие, в том числе и практически важные системы уравнений (например, относящиеся к газовой динамике) неудобны для исследования методом характеристик. В работе [18] достаточные условия потери гладкости классическим решением консервативных систем $n \times n$ в пространстве n переменных находились при помощи некоторых зависящих от решения интегральных функционалов, в [19, 20] то же самое сделано для систем уравнений газовой динамики. В [6] подобные интегральные функционалы использовались для асимптотических оценок различных видов энергии в таких системах. В [21, 22] класс систем уравнений, допускающих исследование гладкости подобным методом, значительно расширен, однако среди достаточных условий потери гладкости в этом случае, вообще говоря, были такие, которые зависели от поведения решения в любой момент времени. Для уравнений гидравлики удается выделить классы гладких начальных данных, при которых в течение некоторого конечного времени образуется особенность решения, и оценить это время, не используя дополнительной информации о решении.

1. Уравнения для мелкомасштабных движений

Как известно [1], в случае мелкомасштабных движений скатывающая сила и трение не играют существенной роли, так что уравнение (0.2) принимает вид

$$h\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\frac{gh^2\cos\alpha}{2}. \tag{1.1}$$

Обозначим площадь, занимаемую на склоне веществом в момент времени t, через $S(t)$, а элемент площади — через dS.

Система (0.1)–(1.1) наиболее проста для анализа и прежде всего потому, что обладает законами сохранения «массы» и «энергии»:

$$\int\limits_{S(t)} h\,dS = \int\limits_{S(0)} h_0\,dS = m = \mathrm{const},$$

$$\int\limits_{S(t)} \left(\frac{h|\vec{v}|^2}{2} + \frac{gh^2\cos\alpha}{2}\right) dS = \int\limits_{S(0)} \left(\frac{h_0|\vec{v}_0|^2}{2} + \frac{gh_0^2\cos\alpha}{2}\right) dS = E = \mathrm{const}\,.$$

Введем обозначения для кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{\text{к}}(t) = \int\limits_{S(t)} \frac{h|\vec{v}|^2}{2} dS, \quad E_{\text{п}}(t) = \int\limits_{S(t)} \frac{gh^2\cos\alpha}{2} dS.$$

Рассмотрим следующие функционалы:

$$G(t) = \int\limits_{S(t)} \varphi h\, dS,$$

$$F(t) = \int\limits_{S(t)} (h\vec{v}, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi) dS, \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Отметим, что $G(t) > 0$ при $h \not\equiv 0$.

Обозначим

$$K = \frac{4}{27} m^3 g \cos\alpha_*, \quad L = 4EG(0) - F^2(0).$$

Ниже будет доказана следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы классическое решение задачи Коши* (0.1), (1.1), (0.3) *потеряло исходную гладкость в некоторый конечный момент времени* τ, *достаточно, чтобы начальные данные были подчинены условиям*

$$\frac{\operatorname{arcctg} \dfrac{F(0)}{\sqrt{L}}}{\operatorname{arcctg} \dfrac{F(0)}{2\sqrt{K}}} > \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}, \tag{1.2}$$

$$t_* = \frac{2G(0) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} \operatorname{arcctg} \dfrac{F(0)}{2\sqrt{K}}\right)}{\sqrt{L} - F(0) \operatorname{tg}\left(\dfrac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} \operatorname{arcctg} \dfrac{F(0)}{2\sqrt{K}}\right)} > 0. \tag{1.3}$$

При этом

$$\tau \leqslant t_*. \tag{1.4}$$

Доказательство. Умножив (0.1) на $\vec{v}$ и сложив с (1.1), получим векторное уравнение

$$\frac{\partial(hv^i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(hv^i v^j) + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{gh^2\cos\alpha}{2} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Умножив его скалярно на $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi$, проинтегрировав по $S(t)$ и применив формулу Грина, получим

$$F'(t) = \int\limits_{S(t)} h|\vec{v}|^2\, dS + \int\limits_{S(t)} gh^2 \cos\alpha\, dS = 2(E_{\text{к}} + E_{\text{п}}) = 2E. \tag{1.5}$$

Согласно неравенству Гельдера имеем, что

$$F^2(t) \leqslant 4E_{\text{к}}(t)G(t), \quad E_{\text{к}}(t) \geqslant \frac{F^2(t)}{4G(t)}. \tag{1.6}$$

Заметим, что отсюда, в частности, вытекает, что $L \geqslant 0$. Далее, из неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dS \leqslant C_\varkappa \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^\varkappa(x,y)\,dS\biggr)^{\frac{1}{2\varkappa-1}} \biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (x^2+y^2) f(x,y)\,dS\biggr)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa-1}}$$

(константа $\varkappa \in (1,2]$, константа $C_\varkappa = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa-1}} + \left(\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\right)^{-\frac{\varkappa}{2\varkappa-1}}$), справедливого для тех неотрицательных $f(x,y)$, для которых имеют смысл все присутствующие интегралы [6], следует, что

$$E_{\text{п}}(t) \geqslant \frac{2K}{G(t)}, \quad \text{где} \quad K = \left(\frac{m}{C_2}\right)^3 g\cos\alpha_* = \frac{4}{27} m^3 g \cos\alpha_*. \tag{1.7}$$

Из (0.1) следует, что $G(t)$ и $F(t)$ связаны соотношением

$$G'(t) = F(t). \tag{1.8}$$

Из (1.5) и (1.8) имеем, что

$$F(t) = 2Et + F(0), \quad G(t) = Et^2 + F(0)t + G(0), \tag{1.9}$$

а из (1.5)–(1.7) и (1.9) имеем, что

$$F'(t) \geqslant \frac{F^2(t)}{2G(t)} + \frac{2K}{G(t)} = \frac{F^2(t) + 4K}{2(Et^2 + F(0)t + G(0))}. \tag{1.10}$$

После разделения переменных и интегрирования неравенства (1.10) по t от $t_0 = 0$ получим, что

$$\begin{gathered}
\operatorname{arctg}\frac{F(t)}{2\sqrt{K}} - \operatorname{arctg}\frac{F(0)}{2\sqrt{K}} \geqslant \frac{2\sqrt{K}}{\sqrt{L}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2Et+F(0)}{\sqrt{L}} - \operatorname{arctg}\frac{F(0)}{\sqrt{L}}\right),\\
\operatorname{arctg}\frac{2Et+F(0)}{\sqrt{L}} \leqslant \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{F(0)}{2\sqrt{K}}\right)\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} + \operatorname{arctg}\frac{F(0)}{\sqrt{L}} = \\
= \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}\operatorname{arcctg}\frac{F(0)}{2\sqrt{K}} + \operatorname{arctg}\frac{F(0)}{\sqrt{L}}.
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Отметим, что правая часть последнего неравенства не меньше, чем $-\frac{\pi}{2}$, а величина t ограничена сверху, если

$$\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}\operatorname{arcctg}\frac{F(0)}{2\sqrt{K}} + \operatorname{arctg}\frac{F(0)}{\sqrt{L}} < \frac{\pi}{2},$$

что приводится к виду (1.2). В этом случае из (1.11) получается оценка t сверху, совпадающая с (1.4), отсюда же следует и условие (1.3).

Итак, из (1.10) следует, что если решение h, v^1, v^2 остается классическим, то $F(t)$ обращается в плюс-бесконечность за конечное время, что противоречит (1.5). Это противоречие и доказывает теорему.

Замечание 1. Опираясь на (1.3), можно получить менее громоздкие, но более грубые условия потери гладкости классическим решением задачи Коши (0.1), (1.1), (0.3). А именно, вместо (1.3) можно потребовать, чтобы было выполнено условие

$$F(0) > 2\sqrt{K}\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{K}{EG(0)}}\right).$$

Отметим, что правая часть этого неравенства положительна, так как вследствие (1.7)

$$0 < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{K}{EG(0)}} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} < \frac{\pi}{2}.$$

Замечание 2. Из результатов работы [6] следует, что существуют положительные константы B_1 и B_2 ($B_1 < B_2$), такие что

$$\frac{B_1}{G(t)} \leqslant E_{\text{п}}(t) \leqslant \frac{B_2}{G(t)}.$$

Таким образом, учитывая (1.9), мы получаем, что $E_{\text{п}}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если решение остается классическим при $t \to \infty$.

2. Полные уравнения гидравлики в приближении Сен-Венана

Для анализа системы уравнений (0.1), (0.2) сделаем предположения о характере сил трения. А именно, положим

$$\vec{\tau}_a = 0, \quad \vec{\tau} = \mu g h \cos\alpha \vec{e} + kh\vec{v},$$

где μ и k — известные неотрицательные функции, предполагаемые интегрируемыми. Будем считать, что μ и k зависят от координат x и y, а k может также зависеть от решения. Функция μ представляет собой коэффициент кулоновского (сухого) трения, а k может быть коэффициентом рэлеевского трения (при зависимости только от координат) или содержать в себе коэффициент гидравлического трения Шези c ($k = c|\vec{v}|$). В дальнейшем мы будем предполагать величины μ и k ограниченными ($\mu \leqslant \mu_* = \mathrm{const}$, $k \leqslant k_* = \mathrm{const}$).

а) Оценки величины полной энергии

В системе (0.1), (0.2) при сделанных ранее предположениях о начальных данных по-прежнему сохраняется величина «массы» m, а полная энергия E уже представляет собой функцию времени. Сделаем необходимые оценки.

Лемма. *Для классических решений задачи Коши (0.1)–(0.3) справедлива следующая двусторонняя оценка величины $E(t)$ полной энергии системы:*

$$\frac{2K}{\left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}t^2 + E(0)t + \sqrt{G(0)}\right)^2} \leqslant E(t) \leqslant \left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{\sqrt{2}}t + \sqrt{E(0)}\right)^2,$$

где $\lambda_* = g \sup\limits_{(x,y)} |\sin\alpha - \mu\cos\alpha|$.

Доказательство. Из (0.1) и (0.2) следует, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{S(t)} \left(\frac{h|\vec{v}|^2}{2} + \frac{gh^2\cos\alpha}{2}\right) dS = -\int\limits_{S(t)} kh|\vec{v}|^2 dS + g\int\limits_{S(t)} (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(h\vec{v}, \vec{e}) dS. \tag{2.1}$$

Согласно неравенству Гельдера имеем, что

$$\left| g\int\limits_{S(t)} (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(h\vec{v}, \vec{e})\, dS\right|^2 \leqslant \lambda_*^2 \int\limits_{S(t)} h|\vec{v}|^2 dS \cdot \int\limits_{S(t)} h\, dS = 2\lambda_*^2 m E_{\text{к}}(t). \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant \sqrt{2}\lambda_*\sqrt{m}\sqrt{E(t)},$$

или

$$E(t) \leqslant \left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}t}{\sqrt{2}} + \sqrt{E(0)}\right)^2. \tag{2.3}$$

Сделаем оценку роста функции $G(t)$. Согласно (1.6), (1.8) и (2.3) получим, что

$$(G'(t))^2 \leqslant 4E(t)G(t) \leqslant 4G(t)\left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{\sqrt{2}}t + \sqrt{E(0)}\right)^2,$$

откуда после разделения переменных и интегрирования получим, что

$$G(t) \leqslant \left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}t^2 + \sqrt{E(0)}t + \sqrt{G(0)}\right)^2. \tag{2.4}$$

Теперь, отталкиваясь от неравенства (1.7), с использованием (2.4) мы можем получить оценку величины полной энергии снизу, а именно

$$E(t) \geqslant E_{\text{п}}(t) \geqslant \frac{2K}{G(t)} \geqslant \frac{2K}{\left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}t^2 + \sqrt{E(0)}t + \sqrt{G(0)}\right)^2}.$$

Лемма доказана.

б) Достаточные условия образования особенностей

Обозначим $\chi_{S(t)}$ характеристическую функцию области $S(t)$.

Теорема 2. *Предположим, что характеристики склона таковы и система координат выбрана так, что*

$$\psi_* = \inf_{(x,y)} \{\chi_{S(t)} g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi, \vec{e})\} > -\infty.$$

Тогда для того, чтобы классическое решение задачи Коши (0.1), (0.2), (0.3) *перестало существовать, в случае $\psi_* \geqslant 0$ достаточно, чтобы начальные данные удовлетворяли условию*

$$F(0) > 2\sqrt{K}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\sqrt{K}}{\gamma G(0)}, \tag{2.5}$$

где

$$\gamma = k_* + 2\sigma, \quad \sigma = \max\left\{\sqrt{\frac{E(0)}{G(0)}}, \sqrt{\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{\sqrt{2G(0)}}}\right\}.$$

При этом справедлива следующая оценка времени образования особенности:

$$t \leqslant t_{**} = \frac{1}{\gamma}\ln\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K} - \gamma G(0)\,\mathrm{arcctg}\,\frac{F(0)}{2\sqrt{K}}}. \tag{2.6}$$

Если же $\psi_* < 0$, то достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$0 < A < B < 1, \tag{2.7}$$

где

$$A = \frac{\gamma G(0)}{\sqrt{K}}\,\mathrm{arcctg}\,\frac{F(0)}{2\sqrt{K}}, \quad B = 1 + \frac{m\psi_* G(0)}{4K},$$

и существовала такая константа ε ($A < \varepsilon < B$), что при ней выполнено неравенство $t_{**} \leqslant \tau$, где

$$t_{**} = \frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{\varepsilon\sqrt{K}}{\varepsilon\sqrt{K} - \gamma G(0)\,\mathrm{arcctg}\,\frac{F(0)}{2\sqrt{K}}}\right), \tag{2.8}$$

$$\tau = \left(\frac{2E(0)}{\lambda_*^2 m} + \beta\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2E(0)}}{\lambda_*\sqrt{m}}, \tag{2.9}$$

$$\beta = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_*\sqrt{m}}\left(2\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)K}{-\psi_* m}} - \sqrt{G(0)}\right).$$

В этом случае решение теряет гладкость в течение времени $t \leqslant t_{**}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что выражение, стоящее под знаком котангенса в (2.5) вследствие (1.7) заключено в промежутке $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, а из (1.7) и (2.7) следует, что $\mathrm{arcctg}\,\frac{F(0)}{2\sqrt{K}} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $F(0) > 0$.

Умножая (0.1) на $\vec{v}$ и складывая с (0.2), а затем умножая полученное векторное уравнение скалярно на $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi$, после применения формулы Грина получим, что

$$F'(t) \geqslant 2E(t) + \delta F(t) + g \int\limits_{S(t)} (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi, \vec{e})h\, dS, \tag{2.10}$$

где $\delta = k_*$, если $F(t) \geqslant 0$, и $\delta = 0$ в противном случае.

Так как по условию существует нижняя грань величины

$$g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi, \vec{e}) = \psi_*,$$

то из (2.10) будет следовать неравенство

$$F'(t) + \delta F(t) \geqslant 2E(t)\left(1 + \frac{\psi_* m}{2E(t)}\right). \tag{2.11}$$

Отметим, что если правая часть (2.11) положительна, то $F(t) > F(0)$ и, следовательно, $F(t) > 0$, если $F(0) > 0$.

Рассмотрим случай $\psi_* \geqslant 0$. Из (2.11) с учетом (1.6), (1.7) и (2.4) аналогично (1.10) выводим, что

$$F'(t) \geqslant \frac{F^2(t) + 4K}{2\left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}t^2 + \sqrt{E(0)}t + \sqrt{G(0)}\right)^2}. \tag{2.12}$$

Обозначим $N(t) = e^{k_* t}F(t)$ и заметим, что

$$\frac{\lambda_* m}{2\sqrt{2}}t^2 + \sqrt{E(0)}t + \sqrt{G(0)} \leqslant \sqrt{G(0)}e^{\sigma t}, \tag{2.13}$$

где $\sigma = \max\left\{\sqrt{\frac{E(0)}{G(0)}}, \sqrt{\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{\sqrt{2G(0)}}}\right\}$. С учетом (2.13) из (2.12) получим

$$N'(t) \geqslant \frac{N^2(t)e^{-k_* t} + 4Ke^{k_* t}}{2G(0)e^{2\sigma t}} \geqslant \frac{N^2(t) + 4K}{2G(0)}e^{-(k_* + 2\sigma)t},$$

или

$$\frac{N'(t)}{N^2(t) + 4K} \geqslant \frac{e^{-(k_* + 2\sigma)t}}{2G(0)}.$$

После интегрирования и несложных преобразований отсюда получается оценка (2.6). Условие (2.5) есть условие неотрицательности подлогарифмического выражения в (2.6).

Пусть теперь $\psi_* < 0$. В этом случае выражение $q = 1 + \frac{\psi_* m}{2E(t)}$, даже будучи положительным при $t = 0$, вообще говоря, поменяет знак за конечное время.

Несложный подсчет с использованием содержавшейся в лемме оценки $E(t)$ снизу показывает, что если $\psi_* < 0$, то $q \geqslant \varepsilon > 0$ при

$$t < \tau = \left(\frac{2E(0)}{\lambda_*^2 m} + \beta\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{E(0)}}{\lambda_*\sqrt{m}}, \tag{2.14}$$

где
$$\beta = \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_* \sqrt{m}}\left(2\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)K}{-\psi_* m}} - \sqrt{G(0)}\right).$$

Если $\beta > 0$, то $\tau > 0$. Вытекающее отсюда условие на величину ε таково:
$$0 < \varepsilon < 1 + \frac{m\psi_* G(0)}{4K} < 1. \tag{2.15}$$

Итак, из (1.6), (1.7), (2.4) и (2.11) следует, что пока $t < \tau$, где τ определено в (2.14), выполнено неравенство
$$F'(t) + k_* F(t) \geqslant \frac{\varepsilon(F^2(t) + 4K)}{2\left(\frac{\lambda_*\sqrt{m}}{2\sqrt{2}}t^2 + \sqrt{E(0)}t + \sqrt{G(0)}\right)^2}.$$

Повторив буквально те же выкладки, что и в случае $\psi_* \geqslant 0$, получим оценку сверху времени существования гладкого решения задачи Коши (0.1)–(0.3): $t \leqslant t_{**}$, где t_{**} определено в (2.8).

Требование неотрицательности подлогарифмического выражения накладывает еще одно условие на ε:
$$\varepsilon > \frac{\gamma G(0)}{\sqrt{K}} \operatorname{arcctg} \frac{F(0)}{2\sqrt{K}} \tag{2.16}$$
(то есть, следуя формулировке теоремы, $\varepsilon > A$). Из (2.15) и (2.16) следует условие (2.7).

Итак, если ε таково, что $t_{**} \leqslant \tau$, то в течение времени $t \leqslant t_{**}$ величина $N(t)$ (а значит, и $F(t)$) в случае сохранения решением исходной гладкости обратилась бы в бесконечность за конечное время, что противоречит неравенствам (1.6), (2.4) и лемме, запрещающим $F(t)$ расти быстрее, чем $O(t^3)$. Теорема доказана.

Замечание. Пренебрежение криволинейностью координат $(x^1, x^2) = (x, y)$ при выводе системы уравнений (0.1), (0.2) не является принципиальным для приведенных выше рассуждений. Вообще говоря, мы могли бы считать склон гладким римановым многообразием S с метрическим тензором a_{ij} $(i, j = 2)$, тогда обычные производные заменятся на ковариантные, вычисленные с учетом метрики a_{ij}, функция φ заменится на $\frac{1}{2}a_{ij}x^i x^j$, а интегралы будут браться по многообразию S $(dS = \sqrt{|a_{ij}|}dx^i\, dx^j)$. Вопрос об образовании особенностей решений аналогичных систем уравнений с частными производными, заданных на римановых многообразиях, рассмотрен, например, в [21, 22].

Автор выражает глубокую признательность Э. Р. Розендорну за привлечение внимания к данной проблеме.

Литература

[1] Эглит М. Э. Неустановившиеся движения в руслах и на склонах. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[2] Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.

[3] Makino T., Ukai S., Kawashima S. Sur la solution a support compact de l'equation d'Euler compressible // Jap. J. of Appl. Math. — 1986. — V. 3. — P. 249–257.

[4] Makino T., Ukai S. Sur l'existance des solutions locales de l'equation d'Euler–Poisson pour l'evolution d'etoile gazeuses // J. Math. Kyoto Univ. — 1987. — V. 27, № 3. P. 387–399.

[5] Kato T. The Cauchy problem for quasilinear symmetric hyperbolic system // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1975. — V. 58. — P. 181–205.

[6] Chemin J.-Y. Dynamique des gaz a masse totale finie // Asympt. Anal. — 1990. — V. 3. — P. 215–220.

[7] Вольперт А. И., Худяев С. И. О задаче Коши для составных систем нелинейных уравнений // Мат. сборник. — 1972. — Т. 87, № 4. — С. 504–528.

[8] Majda A. Compressible fluids flow and systems of conservation laws in several space variables. Applied Math. Sci. V. 53. — Berlin: Springer, 1984.

[9] Куликовский А. Г., Эглит М. Э. Двумерная задача о движении снежной лавины по склону с плавно меняющимися свойствами // Прикладная математика и механика. — 1973. — Т. 37, № 5. — С. 837–848.

[10] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.

[11] John F. Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation // Comm. Pure Appl. Math. — 1974. — V. 27. — P. 377–405.

[12] Liu T.-P. Development of singularities in the nonlinear waves for hyperbolic partial differential equations // J. Diff. Equat. — 1979. — V. 33. — P. 92–111.

[13] Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Regional Conf. Series in Appl. Math. № 13. — SIAM, 1973.

[14] Боровиков В. А. Оценка сверху времени существования гладкого решения квазилинейной гиперболической системы уравнений // ДАН СССР. — 1971. — Т. 201, № 1. — С. 12–15.

[15] Conway E. The formation and decay of shocks for a conservation law in several dimensions // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1977. — V. 64. — P. 47–57.

[16] Nacane Shizio. Formation of shocks for a single conservation law // SIAM J. Math. Anal. — 1988. — V. 19, № 6. — P. 1398–1408.

[17] Levine H. A., Protter M. H. The breakdown of solutions of quasilinear first order systems of partial differential equations // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1986. — V. 95, № 3. — P. 253–269.

[18] Sideris T. Singularities of hyperbolic equations // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1984. — V. 86, № 4. — P. 369–381.

[19] Sideris T. Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids // Comm. Math. Phys. — 1985. — V. 101, № 4. — P. 475–485.

[20] Rammaha M. A. Formation of singularities in compressible fluids in two-space dimensions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — V. 107, № 3. — P. 705–714.

[21] Розанова О. С. О достаточных условиях образования особенностей решений некоторых классов систем нелинейных уравнений. Дис… канд. физ.-мат. наук. М., 1992.

[22] Розанова О. С. Достаточные условия потери гладкости решениями системы уравнений модели тонкой атмосферы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. — 1991. — № 2. — С. 23–27.

Статья поступила в редакцию в феврале 1996 г.