L. D. Faddeev, Zero Modes for the Quantum Liouville Model, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 2014, Volume 48, Issue 3, 14–23

DOI: 10.4213/faa3149

Функциональный анализ и его приложения
2014, т. 48, вып. 3, с. 14–23

УДК 517.9

Нулевые моды для квантовой модели Лиувилля*

© 2014. Л. Д. Фаддеев

К столетию со дня рождения И. М. Гельфанда

Обсуждается проблема определения нулевых мод для квантовой модели Лиувилля и описывается их представление в гильбертовом пространстве.

§ 1. Введение и постановка задачи

Квантовая модель Лиувилля является базисным примером конформной теории поля. Она представляет собой квантование динамической системы для вещественного поля $\phi(x,t)$, заданной на цилиндре $(x,t)\in\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2\gamma}\int_0^{2\pi}(\pi^2+\phi_x^2+e^{2\phi})\,dx$$

и канонической скобкой Пуассона

$$\{\phi(x),\phi(y)\}=0,\quad \{\pi(x),\pi(y)\}=0,\quad \{\pi(x),\phi(y)\}=\gamma\delta(x-y)$$

в терминах начальных данных $\phi(x)=\phi(x,0)$, $\pi(x)=\phi_t(x,0)$. Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\phi_{tt}-\phi_{xx}+e^{2\phi}=0. \tag{1}$$

В основе квантового подхода, развитого рядом авторов (см. обзор [1] и цитированную там литературу), лежит классическая формула Лиувилля

$$e^{2\phi}=-4\,\frac{f'(x-t)g'(x+t)}{(f(x-t)-g(x+t))^2} \tag{2}$$

и параметризация функций $f(x)$ и $g(x)$ через свободные поля и нулевые моды типа

$$\ln f(x)=Q-\frac{Px}{\pi}+\chi(x), \tag{3}$$

где Q и P — канонические переменные, а периодическое поле $\chi(x)$ задается осцилляторными степенями свободы. Поле $g(x)$ параметризуется аналогично с теми же P и Q. Возникает картина для соответствующего гильбертова пространства

$$\mathfrak{H}=L_2(\mathbb{R})\otimes\mathscr{H}_L\otimes\mathscr{H}_R,$$

где в $\mathscr{H}_L$ и $\mathscr{H}_R$ представляют осцилляторы, а $L_2(\mathbb{R})$ является пространством нулевых мод (P,Q). Однако на некотором этапе возникает инвариантность по отношению к отражению $P\to -P$, происхождение которой не всегда ясно.

*Работа над этой статьей частично поддержана грантами РФФИ 11-01-00570-а, 11-01-12037-офи_м и программой РАН «Математические проблемы нелинейной динамики»

В данной работе, которая следует предыдущей публикации [4], я приведу аргументы для этой инвариантности и метод ее реализации в гильбертовом пространстве.

§ 2. Классическая теория

Уравнение (1) реализуется как соотношение нулевой кривизны

$$[\widehat{L}_1, \widehat{L}_0] = 0$$

для связности

$$\widehat{L}_1 = \frac{d}{dx} - L_1, \qquad \widehat{L}_0 = \frac{d}{dt} - L_0,$$

где 2×2-матрицы L_1, L_0 параметризуются полем $\phi(x,t)$:

$$L_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \phi_t & e^{\phi} \\ e^{\phi} & -\phi_t \end{pmatrix}, \qquad L_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \phi_x & -e^{\phi} \\ e^{\phi} & -\phi_x \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$T(x,t) = \begin{pmatrix} A(x,t) & B(x,t) \\ C(x,t) & D(x,t) \end{pmatrix}$$

— голономия, т. е. решение совместных уравнений

$$T_x = L_1 T, \qquad T_t = L_0 T$$

с начальным условием

$$T(0,0) = I. \tag{4}$$

Легко проверить, что проективные компоненты

$$f(x,t) = \frac{A(x,t)}{B(x,t)}, \qquad g(x,t) = \frac{C(x,t)}{D(x,t)}$$

удовлетворяют уравнениям

$$f_x = f_t, \qquad g_x = -g_t$$

и, таким образом,

$$f(x,t) = f(x-t), \qquad g(x,t) = g(x+t).$$

Из (4) следуют начальные условия

$$f(0) = \infty, \qquad g(0) = 0$$

и ограничения

$$f'(0) < 0, \qquad g'(0) > 0,$$

из которых вытекает, что $f(x)$ и $g(x)$ положительны. Формула Лиувилля (2) реализуется этими функциями.

Введем для окружности $t = 0$ монодромию

$$M = T(2\pi, 0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Это гиперболическая унимодулярная матрица с положительными матричными элементами. Ясно, что f и g удовлетворяют условиям квазипериодичности:

$$f(x+2\pi) = \frac{af(x)+c}{bf(x)+d}, \qquad g(x+2\pi) = \frac{ag(x)+c}{bg(x)+d}.$$

Эти условия можно упростить, если привести монодромию к диагональному виду, взяв

$$MN = ND,$$

где

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1/\xi \\ \eta & 1 \end{pmatrix}.$$

Параметр λ дает собственное значение монодромии, а ξ и η — ее неподвижные точки, т. е. решения квадратного уравнения

$$b\xi^2 - (a-d)\xi - c = 0, \qquad a + d = \lambda + \frac{1}{\lambda}. \tag{5}$$

Леон Тахтаджян и я в 1984 г. сосчитали скобки Пуассона элементов a, b, c, d (опубликовано в 1986 г. в [5]):

$$\{a,b\} = \frac{1}{2}\gamma ab, \qquad \{a,c\} = \frac{1}{2}\gamma ac,$$
$$\{d,b\} = -\frac{1}{2}\gamma bd, \qquad \{d,c\} = -\frac{1}{2}\gamma cd,$$
$$\{b,c\} = 0, \qquad \{a,d\} = \gamma bc$$

(заметим, что эти соотношения легли в основу теории квантовых групп (см. [6], [7])). Из этих соотношений следует, что λ, ξ и η можно параметризовать в виде

$$\lambda = e^{-P}, \quad \xi = \alpha e^{Q}, \quad \eta = -\alpha e^{-Q}$$

со скобками

$$\{P,Q\} = \frac{\gamma}{2}, \quad \{P,\alpha\} = 0, \quad \{Q,\alpha\} = 0.$$

В терминах этих переменных монодромия T приобретает вид

$$M = \frac{1}{\operatorname{ch} Q} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(Q-P) & \alpha^{-1}\operatorname{sh} P \\ \alpha \operatorname{sh} P & \operatorname{ch}(Q+P) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Теперь очевидно, что для образа

$$\hat{f} = N(f) = \frac{f + \eta}{f/\xi + 1}$$

функции f относительно преобразования Мёбиуса имеем

$$\hat{f}(0) = \xi = \alpha e^{Q}, \qquad \hat{f}(2\pi) = e^{-2P}\hat{f}(0),$$

так что

$$\ln\frac{\hat{f}(x)}{\alpha} = Q - \frac{Px}{\pi} + \chi(x),$$

где $\chi(x)$ периодична. Мы получили формулу (3). Однако элементы матрицы M положительны только при условии, что

$$P > 0.$$

Таким образом, фазовое пространство для нулевых мод P и Q представляет собой полуплоскость и его квантование следует провести корректно. Мы сделаем это после введения новых канонических переменных вместо P и Q и квантовой реализации соответствующего канонического преобразования.

Введем преобразование переменных

$$u = \frac{\operatorname{ch} Q}{\operatorname{ch}(Q-P)} = \frac{1}{a}, \qquad v = \frac{\operatorname{sh}^2 P}{\operatorname{ch} Q \operatorname{ch}(Q-P)} = \frac{bc}{a},$$

которое отображает верхнюю полуплоскость (P, Q) в положительный квадрант

$$u > 0, \qquad v > 0.$$

Скобки Пуассона для u и v имеют вид

$$\{u, v\} = -\gamma uv,$$

так что их логарифмы дают канонические переменные на $\mathbb{R}^2$ и их квантование тривиально.

Монодромия M приобретает вид

$$M = \begin{pmatrix} u^{-1} & \alpha\sqrt{v/u} \\ \alpha^{-1}\sqrt{v/u} & u+v \end{pmatrix},$$

и мы можем построить для нее квантовую реализацию.

§ 3. Квантование

Квантовым аналогом переменных u и v является вейлева пара u и v с соотношением

$$uv = q^2 vu, \qquad q = e^{i\gamma/2}.$$

Переменная α остается центральным элементом. Чтобы быть ближе к обозначениям из теории автоморфных функций, положим

$$\gamma = 2\pi\tau$$

и для τ выберем параметризацию через мнимые полупериоды ω, ω',

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}, \qquad \omega\omega' = -\frac{1}{4},$$

лежащие на верхней мнимой полуоси.

Операторы u, v реализуются в $L_2(\mathbb{R})$ следующим образом:

$$uf(x) = e^{-i\pi x/\omega} f(x), \qquad vf(x) = f(x + 2\omega').$$

Это существенно самосопряженные операторы с областью определения $\mathscr{D}$, состоящей из аналитических функций вида

$$e^{-\alpha x^2} e^{\beta x} P(x),$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{C}$, а $P(x)$ — полином с комплексными коэффициентами.

Квантовый аналог монодромии M после естественного упорядочивания множителей задается в виде

$$M = \begin{pmatrix} u^{-1} & \alpha q^{-1/4} u^{-1/2} v^{1/2} \\ \alpha^{-1} q^{-1/4} u^{-1/2} v^{1/2} & u+v \end{pmatrix}.$$

Наша первая задача — диагонализовать $\operatorname{tr} M$, т. е. оператор

$$L = u + u^{-1} + v.$$

Этот оператор сейчас хорошо известен, он имеет много интерпретаций. Например, в квантовой теории Тейхмюллера ([8], [9]) он называется длиной геодезической, в теории разложения тензорного произведения двух неприводимых представлений модулярного дубля квантовой теории групп $SL_q(2,\mathbb{R})$ он появляется как главная часть соответствующего оператора Казимира [10]. Спектральная теория для оператора L исследовалась Кашаевым [11].

Оператор L имеет однократный непрерывный спектр, сосредоточенный на полуоси $2 < \lambda < \infty$. Соответствующие обобщенные собственные функции явно выражаются через функцию

$$\gamma(x) = \exp\left\{-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixt}}{\sin\omega t\sin\omega' t}\,\frac{dt}{t}\right\},$$

где сингулярность при $t = 0$ обходится сверху. Эта функция получила большое распространение в последние 10 лет. Я предложил назвать ее квантовым дилогарифмом [12]. Подробное описание ее свойств можно найти в [13]. В приложении приводятся некоторые ее свойства, используемые в этой работе.

Основное свойство — функциональное уравнение

$$\frac{\gamma(x+\omega')}{\gamma(x-\omega')} = 1 + e^{-i\pi x/\omega} \tag{7}$$

позволяет утверждать, что обобщенная функция

$$\psi(x,s) = \gamma(x - s - \omega'' + i0)\gamma(x + s - \omega'' + i0)e^{-i\pi(x-\omega'')^2}$$

при $s \in \mathbb{R}$ является собственной функцией оператора L с собственным значением

$$e^{i\pi s/\omega} + e^{-i\pi s/\omega} = 2\cos\pi s/\omega.$$

Здесь

$$\omega'' = \omega + \omega'.$$

Функция $\gamma(z - \omega'')$ имеет полюс при $z = 0$, и слагаемое $+i0$ характеризует его обход.

Кашаев [11] доказал свойства ортонормированности и полноты

$$\int\overline{\psi(x,s)}\psi(x,s')\,dx = \frac{1}{\rho(s)}(\delta(s-s') + \delta(s+s')),$$

$$\int_0^{\infty}\psi(x,s)\overline{\psi(y,s)}\rho(s)\,ds = \delta(x-y),$$

где мера $\rho(s)$ имеет вид

$$\rho(s) = -4\sin\frac{\pi s}{\omega}\,\sin\frac{\pi s}{\omega'}\,. \tag{8}$$

Мы делаем естественный вывод: гильбертово пространство для диагонального представления оператора P — это $L_2(\mathbb{R}_+,\rho)$.

Посмотрим теперь, как выглядит недиагональный элемент матрицы M в этом представлении. Обозначим через U интегральный оператор с ядром $\psi(x,s)$, связывающий пространства $L_2(\mathbb{R}_+,\rho)$ и $L_2(\mathbb{R})$. Пусть r и Z задают вейлеву пару в пространстве функций $F(s)$ на всей оси $-\infty < s < \infty$ (в дальнейшем нам надо следить, какие комбинации r и Z имеют смысл в $L_2(\mathbb{R}_+,\rho)$):

$$rF(s) = F(s+\omega'),\qquad Zf = e^{i\pi s/\omega}F(s).$$

Из функционального уравнения (7) получаем, что интегральные операторы $v^{1/2}Ur$ и $v^{1/2}Ur^{-1}$ имеют ядра

$$\psi(x+\omega', s-\omega') = \left(1-\frac{u}{Z}\right)\frac{1}{i}q^{-1/2}u^{-1/2}\psi(x,s),$$

$$\psi(x+\omega', s+\omega') = (1-uZ)\frac{1}{i}q^{-1/2}u^{-1/2}\psi(x,s),$$

откуда

$$q^{1/4}u^{-1/2}v^{1/2}U = U\frac{1}{i}(Z-Z^{-1})(r-r^{-1})^{-1}.$$

Оператор в правой части имеет смысл в пространстве четных функций и самосопряжен в $L_2(\mathbb{R}_+,\rho)$.

Итак, мы получили новое представление для элементов матрицы монодромии:

$$U^{-1}(a+d)U = Z+Z^{-1}, \qquad U^{-1}bU = \frac{\alpha}{i}\,(Z-Z^{-1})\,\frac{1}{r-r^{-1}}\,.$$

Поучительно сравнить эти квантовые формулы с классическими из (6):

$$a+d = 2\operatorname{ch}P, \qquad b = \alpha\,\frac{\operatorname{sh}P}{\operatorname{ch}Q}.$$

Естественно отождествить Z с e^P, а r^{-1} с e^Q, однако $\operatorname{ch}Q$ в классическом случае заменяется на $i\operatorname{sh}Q$, что соответствует сдвигу Q на $i\pi/2$. Решить аналог квадратного уравнения (5) для нахождения представления операторов u и v мне не удалось. Впрочем, для этой работы это не нужно.

§4. Коэффициент отражения

Естественно желание избавиться от меры $\rho(s)$ и найти реализацию операторов P и b в обычном пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Ясно, что эта реализация должна получиться только в подпространстве. Мы покажем, что можно построить соответствующий проектор в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}(I+KS),$$

где K — оператор отражения,

$$KF(s) = F(-s),$$

а оператор S является умножением на множитель $S(s)$, такой, что

$$\overline{S(s)} = S(-s) = S^{-1}(s).$$

Этот множитель естественно назвать коэффициентом отражения.

Для вывода заметим, что меру $\rho(s)$ можно факторизовать в виде

$$1/\rho(s) = M(s)M(-s),$$

где

$$M(s) = \mathrm{const}\, e^{-2i\pi s(s-\omega'')}\gamma(2s-\omega'');$$

здесь const можно выбрать так, что выполняется соотношение

$$\overline{M(s)} = M(-s),$$

если использовать соотношения (11), (13) из приложения. Явный вид этого множителя не будет существенным для нас в дальнейшем.

Из функционального уравнения (7) следует, что

$$M(s+\omega') = M(s)\frac{1}{i}(Z - Z^{-1}), \tag{9}$$

$$M(s-\omega') = M(s)i(q^{-1}Z - qZ^{-1})^{-1}. \tag{10}$$

Введем оператор

$$V = U\frac{1}{M(s)}.$$

Его образ состоит из функций $F(s)$, удовлетворяющих уравнению

$$F(-s) = S(s)F(s),$$

где

$$S(s) = \frac{M(s)}{M(-s)},$$

и, таким образом, лежащих в подпространстве

$$\Pi L_2(\mathbb{R}),$$

которое и является естественным гильбертовым пространством для нулевой моды P.

Оператор $b^{-1} = q^{1/4}u^{1/2}v^{-1/2}$ проносится через V при использовании соотношений (9), (10):

$$b^{-1}V = U(r - r^{-1})(Z - Z^{-1})^{-1}\frac{1}{M(s)} = V\left(r^{-1} + \frac{1}{Z - Z^{-1}}\, r\,\frac{1}{Z - Z^{-1}}\right).$$

Именно эта формула была предложена в [4] из квазиклассических соображений. Здесь мы дали ее полный квантовый вывод.

Итак, мы построили естественное квантовое пространство для нулевых мод P и Q. Заметим, что в других работах, [14], [15], предложена другая реализация гильбертова пространства для нулевых мод и коэффициент отражения выражается через классическую Γ-функцию. Факторизация типа (8) меры $\rho(s)$ имеет смысл для этого коэффициента отражения. Однако вид оператора Q остается неопределенным. Было бы интересно установить более тесный контакт между этими подходами.

§5. Эволюция

В работе [4] показано, что при дискретном сдвиге времени

$$t \to t + \pi$$

нулевые моды P и Q преобразуются простым образом:

$$P \to P, \qquad Q \to P + Q.$$

Это связано с тем, что дискретная эволюция функций $\hat{f}$ и $\hat{g}$ соответствует левому и правому движениям, при которых осцилляторные компоненты не меняются.

В терминах u и v эта эволюция выглядит следующим образом:

$$u \to u + v, \qquad v \to u^{-1}v(u+v)^{-1},$$

и мы будем считать, что это верно и в квантовом случае с указанием порядка множителей. Найдем соответствующий оператор эволюции K:

$$K^{-1}uK = u + v, \qquad K^{-1}vK = u^{-1}v(u+v)^{-1}.$$

Проще вычислить оператор K^{-1}:

$$(u+v)K^{-1} = K^{-1}u, \qquad Ku^{-1}vK^{-1} = K^{-1}vu.$$

Этот порядок множителей имеет смысл и в квантовом случае.

Используя функциональное уравнение (7), нетрудно показать, что унитарный оператор K^{-1} имеет ядро

$$K^{-1}(x,y) = e^{2\pi ixy}\gamma(x-y-\omega'').$$

Покажем, что $\psi(x,s)$ является собственной функцией оператора K. Имеем

$$K^{-1}\psi = \int e^{2\pi ixy}\gamma(x-y-\omega'')\gamma(y+s-\omega'')\gamma(y-s-\omega'')e^{-i\pi(y-\omega'')^2}\,dy = I(x,s).$$

Интеграл в правой части берется с использованием одного из вариантов так называемого β-интеграла (см., например, [13]).

Начнем с того, что по свойству отражения функцию $\psi(x,s)$ можно переписать в виде

$$\psi(x,s) = c(s)\,\frac{\gamma(x+s-\omega'')}{\gamma(s-x+\omega'')}\,e^{2\pi isx},$$

где

$$c(s) = \beta e^{-i\pi s^2}.$$

Теперь используем интегральное представление (15) (см. приложение):

$$\frac{\gamma(x-y-\omega'')}{\gamma(s-y+\omega'')} = \frac{c}{\gamma(s-x+\omega'')}\int\frac{\gamma(s-x+\omega''+z)}{\gamma(z+\omega'')}\,e^{2\pi iz(x-y)}\,dz.$$

Далее по (17) имеем

$$\int\gamma(y+s-\omega'')e^{2\pi i(x-z-s)}\,dy = c\,\frac{1}{\gamma(z-x+s+\omega'')},$$

так что множители $\gamma(s-x+\omega''-z)$ сокращаются. В результате

$$I(x,s) = c^2c(s)\,\frac{e^{2\pi is^2}}{\gamma(s-x+\omega'')}\int\frac{e^{2\pi iz(x+s)}}{\gamma(z+\omega'')}\,dz = c^2e^{2\pi is^2}\psi(x,s),$$

если использовать (16). Итак, функция Кашаева $\psi(x,s)$ является собственной функцией оператора K^{-1} с собственным значением $c^2e^{2\pi is^2}$. Постоянный множитель c^2 можно опустить при описании оператора эволюции, которая в нашем представлении — просто умножение на $e^{-2\pi is^2}$, так что

$$K^{-1}ZK = Z, \qquad K^{-1}rK = e^{2\pi is^2}e^{-2\pi i(s+\omega')^2}r = q^{1/2}e^{i\pi s/\omega}r = q^{1/2}Zr.$$

Именно эта эволюция была получена в [4].

§6. Заключение

Итак, мы показали, что естественное включение нулевых мод в матрицу монодромии оператора $\widehat{L}_1$ дает описание гильбертова пространства и эволюции для квазимомента P.

§7. Приложение

Свойства модулярного квантового дилогарифма подробно описаны в статье [13] (а также во многих других местах). В нашей работе мы используем помимо функционального уравнения (7) следующие свойства.

Соотношения отражения

$$\gamma(z)\gamma(-z) = \beta e^{i\pi z^2}, \qquad \beta = e^{(i\pi/12)(\tau+1/\tau)}. \tag{11}$$

Положение первого полюса

$$\gamma(z+\omega'') = \frac{c}{z}, \qquad c = -\frac{2}{2\pi i\beta}\, e^{-i\pi/4}. \tag{12}$$

«Вещественность»

$$\overline{\gamma(z)} = \frac{1}{\gamma(\bar{z})}\,. \tag{13}$$

Асимптотика

$$\gamma(z) \to 1 \tag{14}$$

в секторе $-\pi/4 < \arg z < \pi/4$.

Интегральное тождество

$$\frac{\gamma(t+a)}{\gamma(t+b)} = \frac{c}{\gamma(b-a-\omega'')} \int \frac{\gamma(b-a-\omega''+z)}{\gamma(z+\omega'')}\, e^{2\pi iz(t+a+\omega'')}\, dz, \tag{15}$$

предел при $b \to \infty$

$$\gamma(t+a) = c \int \frac{e^{2\pi iz(t+a+\omega'')}}{\gamma(z+\omega'')}\, dz \tag{16}$$

и его обращение

$$\int \gamma(t+a) e^{-2\pi its}\, dt = c\frac{e^{2\pi is(a+\omega'')}}{\gamma(s+\omega'')}\,. \tag{17}$$

Литература

[1] J.-L. Gervais, J. Schnittger, *The many faces of the quantum Liouville exponentials*, Nuclear Phys. B, **413** (1994), 433–457; `http://arxiv.org/abs/hep-th/9308134`.

[2] J. Teschner, *A Lecture on the Liouville vertex operators*, Internat. J. Modern. Phys. A, **19** (2004), May, suppl., 436–458; `http://arxiv.org/abs/hep-th/0303150`.

[3] O. Babelon, *Universal exchange algebra for Bloch waves and Liouville theory*, Comm. Math. Phys., **139**:3 (1991), 619–643.

[4] L. D. Faddeev, A. Y. Volkov, *Discrete evolution for the zero-modes of the quantum Liouville model*, J. Phys. A, **41** (2008), no. 19, 194008; `http://arxiv.org/abs/0803.0230`.

[5] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Liouville model on the lattice*, in: Lecture Notes in Phys., vol. 246, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 166–179.

[6] В. Г. Дринфельд, *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера*, Докл. АН СССР, сер. физ., **283**:5 (1985), 1060–1064.

[7] Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, *Квантование групп Ли и алгебр Ли*, Алгебра и анализ, **1** (1989), 178–206.

[8] R. M. Kashaev, *On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmuller theory*, `http://arxiv.org/abs/math/0008148`.

[9] В. В. Фок, Л. О. Чехов, *Квантовые пространства Тейхмюллера*, ТМФ, **120**:3 (1999), 511–528; `http://arxiv.org/abs/math/9908165`.

[10] S. E. Derkachov, L. D. Faddeev, *3j-symbol for the modular double of $SL_q(2, R)$ revisited*, `http://arxiv.org/abs/1302.5400`.

[11] R. M. Kashaev, *The quantum dilagarithm and Dehn twists in quantum Teichmuller theory*, in: Integrable structures of Exactly Solvable Two-Dimansional Models of Quantum Field Theory (Kiev, 2000), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 35, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, 211–221.

[12] L. D. Faddeev, *Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group*, Lett. Math. Phys., **34**:3 (1995), 249–254; `http://arxiv.org/abs/hep-th/9504111`.

[13] A. Y. Volkov, *Noncommutative hypergeometry*, Comm. Math. Phys., **258**:2 (2005), 257–273; `http://arxiv.org/abs/math/0312084`.

[14] A. B. Zamolodchikov, A. B. Zamolodchikov, *Conformal bootstrap in Liouville field theory*, Nuclear Phys. B, **477**:2 (1996), 577–605; `http://arxiv.org/abs/hep-th/9506136`.

[15] G. Jorjadze, G. Weigt, *Zero mode problem of Liouville field theory*, `http://arxiv.org/abs/hep-th/0207041`.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: faddeev@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
13 января 2014 г.