А. Н. Варченко, Ходжевы свойства связности Гаусса–Манина, *Функц. анализ и его прил.*, 1980, том 14, выпуск 1, 46–47

Функциональный анализ и его приложения,
т. 14, вып. 1, 1980, 46—47.

УДК 513.60 + 517.9

ХОДЖЕВЫ СВОЙСТВА СВЯЗНОСТИ ГАУССА — МАНИНА

А. Н. Варченко

Пусть f: $\mathbf{C}^n$, $0 \to \mathbf{C}$, 0 — голоморфная функция, имеющая в 0 изолированную критическую точку. Каждая голоморфная $(n-1)$-форма при ограничении ее на $f^{-1}(t)$ $(t \in \mathbf{C})$ определяет класс $(n-1)$-мерных когомологий. При $t \to 0$ этот класс, зависящий от t, разлагается в ряд по дробным степеням t. Рассматривая совокупность первых членов этих рядов для всех голоморфных $(n-1)$-форм, можно определить две фильтрации — весовую и ходжеву — на пространстве, сопряженном к пространству $(n-1)$-мерных гомологий, исчезающих при $t \to 0$ в точке $0 \in \mathbf{C}^n$. По-видимому, всегда эти две фильтрации определяют на указанном пространстве смешанную структуру Ходжа (ССХ). Эта гипотеза доказана для всех функций двух переменных, для квазиоднородных функций, а также для функций вида $f(x_1, \ldots, x_n) + g(y_1, \ldots, y_k)$, если она уже доказана для функций f и g. В этих случаях указанная выше ССХ совпадает со ССХ, определенной Стинбринком в [8].

1. Определения. Зафиксируем два числа $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$, положим $B = \{x \in \mathbf{C}^n \mid \|x\| < \varepsilon\}$, $T = \{t \in \mathbf{C}^1 \mid |t| < \eta\}$, $T' = T \setminus 0$, $X = B \cap f^{-1}(T')$, $X(t) = B \cap f^{-1}(t)$ $(t \in T')$. f: $X \to T'$ — гладкое расслоение. Положим $H^{n-1} = \bigcup\limits_t H^{n-1}(X(t), \mathbf{C})$. Обозначим через f^*: $H^{n-1} \to T'$ естественную проекцию. f^* обладает естественной структурой голоморфного расслоения, в этом расслоении имеется каноническая связность ∇, называемая связностью Гаусса — Манина [1]. Оператор монодромии M связности Г.—М. целочислен, его собственные числа — корни из 1, размер жордановых клеток $\leqslant n$ (см. [2]). Для любой голоморфной n-формы ω ограничение на $X(t)$ формы ω/df определяет голоморфное сечение в f^*, обозначаемое через $s(\omega)$. Из [1] следует, что $s(\omega) = \sum\limits_{\alpha, k} t^\alpha (\ln t)^k A_{k, \alpha}(t)$, где $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\alpha > -1$, $\exp(-2\pi i\alpha)$ — собственные числа оператора M, $A_{k, \alpha}$ — ковариантно постоянные сечения расслоения f^*. Положим $\alpha(\omega) = \{\min \alpha \mid \exists k \mid A_{k, \alpha} \neq 0\}$, $s_{\text{главн}}(\omega) = t^{\alpha(\omega)}(A_{0, \alpha(\omega)} + \ldots + (\ln t)^{n-1} A_{n-1, \alpha(\omega)})$. Определим две фильтрации в каждом слое f^*. *Весовая фильтрация* $0 \subset W_0 \subset \ldots \subset W_{2n-2} = H^{n-1}$ — стандартная фильтрация, связанная с оператором M. Пусть f^*_λ: $H^{n-1}_\lambda \to T'$ — подрасслоение f^*, слоями которого являются инвариантные подпространства оператора M, отвечающие собственному числу λ. Весовая фильтрация определяется отдельно для каждого f^*_λ. Если $\lambda \neq 1$, то весовая фильтрация определяется свойствами: а) $NW_i\ (f^*_\lambda) \subset W_{i-2}\ (f^*_\lambda)$, б) N^l: $W_{n-1+l}(f^*_\lambda)/W_{n-2+l}(f^*_\lambda) \to W_{n-1-l}(f^*_\lambda)/W_{n-2-l}(f^*_\lambda)$ — изоморфизм для любого $l \geqslant 0$ (N — логарифм оператора $\lambda^{-1} M$). Если $\lambda = 1$, весовая фильтрация определяется так же, но номера всех подпространств $W(f^*_1)$ увеличены на 1. Полагаем $W_l = \bigcup\limits_\lambda W_l(f^*_\lambda)$. *Фильтрация Ходжа*... $\supset F^j \supset F^{j+1} \supset \ldots$ определяется условием: F^j в каждом слое порождается значениями всех сечений $s_{\text{главн}}(\omega)$, где ω — произвольная голоморфная n-форма с $\alpha(\omega) \leqslant n-1-j$. Можно показать, что $\forall m, j$ W_m, F^j — *голоморфные подрасслоения в* f^*; W_m — *инвариантно относительно* ∇, *фильтрация, индуцированная в* W_m/W_{m-1} *фильтрацией Ходжа, инварианта относительно* ∇.

2. Теорема. 1. *При* $n = 2$ *фильтрации* W, F *образуют ССХ в слоях* f^*. 2. *Фильтрации* W, F *образуют ССХ в слоях* f^*, *если* f — *квазиоднородная функция*. 3. *Если весовая и ходжева фильтрации образуют ССХ для ростков* f: $\mathbf{C}^n$, $0 \to \mathbf{C}$, 0, g: $\mathbf{C}^k$, $0 \to \mathbf{C}$, 0 *голоморфных функций с изолированными критическими точками, то весовая и ходжева фильтрации образуют ССХ для ростка* $f(\cdot) + g(\cdot)$: $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^k$, $0 \times 0 \to \mathbf{C}$, 0.

3. Замечания. а) По-видимому, п. 1 теоремы справедлив при любом n. б) ССХ из пп. 1, 2 совпадает со ССХ, введенной Стинбринком в [8]. По-видимому, это всегда так. в) Можно показать, что для ССХ из теоремы N^l является изоморфизмом веса $(-l, -l)$ чистых структур Ходжа на $(\bigcup\limits_{\lambda \neq 1} W_{n-1+l}(f^*_\lambda) + W_{n-2+l})/W_{n-2+l}$ и на $(\bigcup\limits_{\lambda \neq 1} W_{n-1-l}(f^*_\lambda) + W_{n-2-l})/W_{n-2-l}$, а также на $(W_{n+l}(f^*_1) + W_{n+l-1})/W_{n+l-1}$ и на $(W_{n-l}(f^*_1) + W_{n-l-1})/W_{n-l-1}$. г) П. 2 теоремы легко следует из [4]. д) Доказательство п. 3 основано на теореме Фубини для комплексных осциллирующих интегралов (см.

[1]). е) Для доказательства п. 1 разрешаются особенности функции f, используется теорема о полустабильной редукции [5], коэффициенты в разложении сечения $s(\omega)$ представляются формами на дивизорах особого слоя, изучаются эти формы. В частности, оказывается, что коэффициент при $t^{\alpha(\omega)}$, если $\alpha(\omega) < 0$, представляется голоморфной формой с не более чем логарифмическими полюсами. Отсюда следует, что (при любом n) комплексный показатель особости ростка f равен весу разрешения особенностей функции f, если этот вес $\leqslant 0$ (определения см. в [1], [6], [7]).

4. Полином Бернштейна. Разложения в ряд сечений $s(\omega)$ тесно связаны с полиномом Бернштейна критической точки функции f. Наличие указанной выше ССХ влечет, например, такие следствия для полинома Бернштейна. Если фильтрации F, W образуют ССХ, то всякий k-кратный корень приведенного полинома Бернштейна меньше $n-k$. При $n = 2$ приведенный полином Бернштейна $\widetilde{B}(s)$ делится на $(s-\alpha)^2$ тогда и только тогда, когда $\alpha < 0$ и оператор M имеет жорданову клетку с собственным числом $\exp(-\alpha\, 2\pi i)$.

5. ССХ вдоль страта $\mu = \mathrm{const}$. Пусть f_s: $\mathbf{C}^n, 0 \to \mathbf{C}, 0$ — ростки голоморфных функций, гладко зависящие от параметра $s \in [0, 1]$. Предположим, что число Милнора ростка f_s конечно и не зависит от s. Предположим, что $\forall s \in [0, 1]$ весовая и ходжева фильтрации образуют ССХ. Тогда комплексный показатель особости (см. [1]) ростка f_s не зависит от s, более того, для любых целых p, m и собственного числа λ оператора монодромии (число λ не зависят от s, см. [3]) размерность пространства $W_m((f_s)^*_\lambda) \cap F^p(f_s)$ не зависит от s.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 22 июня 1979 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Malgrange B., Ann scient. Ecole Norm. Sup. (4) **7** (1974), 405—430. 2. Brieskorn E., Manuscripta Math. **2** (1970), 103—160. 3. Le Dung Trang, Ramanujam C. P., Amer. J. Math. **98** (1976), 67—68. 4. Steenbrink J. H. M., Compositio Math. **34** (1977), 211—223. 5. Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B., Lecture Notes in Math. **339**, Berlin, Springer-Verlag (1973). 6. Васильев В. А., Функц. анализ **13**, вып. 4 (1979), 1—12. 7. Варченко А. Н., Функц. анализ **10**, вып. 3 (1976), 13—38. 8. Steenbrink J. H. M., Nordic Summer School, Symposium in Math., Oslo, August 1976, 5—25.