*ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1994, том 339, № 6, с. 754 - 756*

## ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

*УДК 517.9:62-50*

# СУЖЕНИЕ АФФИННЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

**© 1994 г. В. И. Елкин**

Представлено академиком П.С. Краснощековым 29.11.93 г.

Поступило 30.11.93 г.

Рассматриваются системы вида

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{y}) + f(\mathbf{y})\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} \in M \subset R^n, \quad \mathbf{u} \in R^r; \qquad (1)$$

здесь $M$ – фазовое пространство, являющееся областью, $\mathbf{f}_0$ – гладкое векторное поле, $f$ – $(n \times r)$-матрица, столбцы которой $\mathbf{f}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, r$, – гладкие векторные поля, и rank $f$ = const. Введем категорию $AS$, объектами которой являются системы (1) (аффинные управляемые системы), а морфизмами – гладкие отображения фазовых пространств, переводящие фазовые траектории одной системы в фазовые траектории другой системы.

Вопрос об изоморфизмах (эквивалентности) в категории $AS$ рассматривался в работах [1, 2], об автоморфизмах – в [3], об эпиморфизмах (фактор-системах) – в [4]. Здесь рассматривается вопрос об мономорфизмах (подсистемах) в категории $AS$. Подсистема представляет собой сужение структуры исходной управляемой системы. Иначе говоря, подсистема определяет часть фазовых траекторий системы.

В первом разделе работы дается определение подсистемы и приводится условие существования подсистем; во втором разделе вводятся некоторые типы подсистем; в последних двух разделах рассматриваются приложения понятия подсистемы.

1. В фазовом пространстве $M$ рассмотрим гладкое элементарное $m$-мерное многообразие $N$ и некоторую его карту $(V, \kappa)$. (Это означает, что $\kappa$ – диффеоморфизм области $V \subset R^m$ на $N$, называемый параметризацией $N$.) В области $V$ рассмотрим аффинную управляемую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in V \subset R^m, \quad \mathbf{v} \in R^s. \qquad (2)$$

Будем говорить, что система (2) является подсистемой системы (1), если $\kappa$ – морфизм системы (2) в систему (1).

Итак, множество фазовых траекторий подсистемы (2) представляет собой по существу (в координатах $x^1, \ldots, x^m$) часть фазовых траекторий системы (1), лежащих на многообразии $N$.

Частным случаем подсистемы является эквивалентная система: подсистема (2) является эквивалентной системе (1), если $M = N$ и $\kappa^{-1}$ – морфизм системы (1) в систему (2).

Если для некоторой карты $(V, \kappa)$ многообразия $N$ существует подсистема (2) системы (1), то будем говорить, что система (1) допускает сужение на $N$, а $N$ – называть $P$-многообразием системы (1). Произвольное гладкое многообразие не является, вообще говоря, $P$-многообразием системы (1). Условия существования $P$-многообразий удобно сформулировать в дифференциально-геометрических терминах.

Распределением $D$ (аффинным распределением $A$) на многообразии $N$ называется отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\mathbf{y} \in N$ линейное подпространство $D(\mathbf{y}) \subset TN_\mathbf{y}$ (аффинное подпространство $A(\mathbf{y}) \subset TN_\mathbf{y}$). Аффинное распределение $A$ называется регулярным, если существует семейство гладких векторных полей $\xi_k(\mathbf{y}) = (\xi_k^1(\mathbf{y}), \ldots, \xi_k^n(\mathbf{y}))$, $k = 0, 1, \ldots, l$, $\mathbf{y} \in N$, для которых

$$\operatorname{rank} \left\| \xi_k^i(\mathbf{y}) \right\|_{k=1,\ldots,l}^{i=1,\ldots,n} = \text{const}, \quad \mathbf{y} \in N,$$

причем

$$A(\mathbf{y}) = \xi_0(\mathbf{y}) + \operatorname{span}\{\xi_k(\mathbf{y}), k = 1, \ldots, l\}.$$

Система (1) порождает в области $M$ регулярное аффинное распределение $F$: $\mathbf{y} \in M \to F(\mathbf{y}) = \mathbf{f}_0(\mathbf{y}) + \operatorname{span}\{\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{y}), \alpha = 1, \ldots, r\} \subset TM_\mathbf{y}$, которое будем называть ассоциированным аффинным распределением системы (1). Кроме того, свяжем с системой (1) распределение

$$\operatorname{span}F: \mathbf{y} \in M \to \operatorname{span}F(\mathbf{y}) = \operatorname{span}\{f_\alpha(\mathbf{y}), \alpha = 0, 1, \ldots, r\} \subset TM_\mathbf{y},$$

и распределение

$$L_F: \mathbf{y} \in M \to \operatorname{span}\{f_\alpha(\mathbf{y}), \alpha = 1, \ldots, r\} \subset TM_\mathbf{y}.$$

Система (1) называется строго аффинной, если $F(\mathbf{y}) \neq L_F(\mathbf{y})$, $\forall y \in M$.

*Вычислительный центр Российской Академии наук, Москва*

Теорема 1. *Многообразие $N$ тогда и только тогда является $P$-многообразием системы* (1), *когда на $N$ существует такое регулярное аффинное распределение $A$, что $A(\mathbf{y}) \subset F(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in N$.*

2. Целесообразно отыскивать и использовать на практике подсистемы, имеющие достаточно простую структуру и в то же время определяющие достаточно широкое множество фазовых траекторий. Здесь рассматриваются два подобных типа подсистем – тривиальные и почти-тривиальные подсистемы.

Систему (2) назовем тривиальной, если

$$\operatorname{rank}\left\| g^i_\beta(\mathbf{x}) \right\|^{i=1,\dots,m}_{\beta=0,\dots,s} =$$
$$= \operatorname{rank}\left\| g^i_\beta(\mathbf{x}) \right\|^{i=1,\dots,m}_{\beta=1,\dots,s} = m, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Легко видеть, что каждая тривиальная система (2) эквивалентна системе $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{w}$, $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{w} \in R^m$.

Существование тривиальных подсистем системы (1) тесно связано с существованием так называемых интегральных многообразий ассоциированного аффинного распределения $F$. Многообразие $N \subset M$ называется интегральным, если $TN_\mathbf{y} \subset F(\mathbf{y})$, $\forall \mathbf{y} \in N$.

Теорема 2. *Система* (1) *допускает сужение на многообразие $N$, причем среди соответствующих подсистем имеется тривиальная система, тогда и только тогда, когда $N$ является интегральным многообразием ассоциированного аффинного распределения $F$ системы* (1).

Проблема существования и нахождения интегральных многообразий для распределений была поставлена еще в XIX веке И. Пфаффом, который рассматривал эту проблему в двойственной форме для систем уравнений Пфаффа. Э. Картан разработал алгоритм решения этой проблемы [5]. Если $F$ не является распределением, то очевидно, что интегральные многообразия $F$ суть интегральные многообразия распределения $L_F$, проходящие через точки $\mathbf{y} \in M$, в которых $L_F(\mathbf{y}) = F(\mathbf{y})$.

Рассмотрим другой тип подсистем. Систему (2) назовем почти-тривиальной, если

$$\operatorname{rank}\left\| g^i_\beta(\mathbf{x}) \right\|^{i=1,\dots,m}_{\beta=0,\dots,s} = m,$$
$$\operatorname{rank}\left\| g^i_\beta(\mathbf{x}) \right\|^{i=1,\dots,m}_{\beta=1,\dots,s} = m-1, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Каждая почти-тривиальная система (локально) эквивалентна одной из канонических форм, число которых конечно [1].

Существование почти-тривиальных подсистем системы (1) связано с существованием так называемых почти-интегральных многообразий ассоциированного аффинного распределения $F$, т.е. таких многообразий $N$, которые удовлетворяют условиям

$$TN_\mathbf{y} \subset \operatorname{span} F(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in N,$$
$$TN_\mathbf{y} \not\subset L_F(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in N.$$

Теорема 3. *Пусть система* (1) *является строго аффинной. Если система* (1) *допускает сужение на многообразие $N$, причем среди соответствующих подсистем имеется почти-тривиальная, то $N$ является почти-интегральным многообразием ассоциированного аффинного распределения $F$. Если $N$ является почти-интегральным многообразием аффинного распределения $F$, то система* (1) *локально допускает сужение на $N$, причем среди соответствующих подсистем имеется почти-тривиальная.*

3. Рассмотрим следующую задачу терминального управления для системы (1). Заданы точки $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1 \in M$. Требуется найти такое управление $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и соответствующую фазовую траекторию $\mathbf{y}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, что $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}_1$.

Пусть система (2) является подсистемой системы (1), причем соответствующее $P$-многообразие $N$ проходит через точки $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1$. Тогда очевидно, что исходная задача терминального управления сводится к аналогичной задаче для системы (2) по переводу точки $\mathbf{x}_0 = \kappa^{-1}(\mathbf{y}_0)$ в точку $\mathbf{x}_1 = \kappa^{-1}(\mathbf{y}_1)$. Отметим роль специальных $P$-многообразий и соответствующих подсистем, введенных в предыдущем пункте. Если известно интегральное многообразие $N$, проходящее через точки $y_0, y_1$, то задачу терминального управления можно считать решенной. Действительно, в этом случае согласно теореме 2 существует тривиальная подсистема (2). Отсюда вытекает, что любая кусочно-гладкая кривая $y(t)$, лежащая на интегральном многообразии $N$, является фазовой траекторией системы (1), так как кривая $\mathbf{x}(t) = \kappa^{-1}(\mathbf{y}(t))$ является фазовой траекторией системы (2). Следовательно, для решения задачи терминального управления достаточно взять любую кусочно-гладкую кривую, лежащую на $N$ и проходящую через точки $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_1$. Соответствующее управление $\mathbf{u}(t)$ можно определить из уравнений (1).

Если известно почти-интегральное многообразие ассоциированного аффинного распределения $F$, проходящее через заданные точки $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1$, то задача терминального управления для системы (1) также существенно упростится (хотя и не в такой степени, как в случае интегрального многообразия). Действительно, согласно теореме 3 эта задача сводится к аналогичной задаче для почти-тривиальной системы. С другой стороны, каждая почти-тривиальная система эквивалентна одной из канонических форм [1], причем, как можно показать, для каждой из них задача терминального управления решается элементарными средствами.

4. При постановке той или иной задачи управления, связанной с системой (1), из практических соображений на фазовые переменные могут быть наложены ограничения вида

$$\varphi^k(\mathbf{y}) = 0, \quad k = 1, \ldots, b. \tag{3}$$

С помощью определенного сужения можно произвести редукцию к системе, имеющей меньшую размерность и не имеющей ограничений на фазовые переменные типа равенств.

Пусть $N$ – множество точек $\mathbf{y} \in M$, удовлетворяющих (3). Система (2), к исследованию которой сводится исследование системы (1) с ограничениями (3), является подсистемой, соответствующей максимальному $P$-многообразию $\hat{N}$ среди всех $P$-многообразий, принадлежащих $N$. Если $P$-многообразий, принадлежащих $N$, не существует, то система (1) не имеет фазовых траекторий, принадлежащих $N$.

Построение многообразия $\hat{N}$ осуществляется с помощью следующего итерационного процесса. Пусть $N$ – многообразие. Рассмотрим отображение $F|_N$: $\mathbf{y} \in N \to F|_N(\mathbf{y}) = F(\mathbf{y}) \cap TN_{\mathbf{y}}$ и множество точек $N_1 = \{\mathbf{y} \in N: F|_N(\mathbf{y}) \neq \varnothing\}$. Если $N_1 \neq \varnothing$, то $P$-многообразий, принадлежащих $N$, не существует. Пусть $N_1 \neq \varnothing$. Если $N_1 = N$ и $F|_N$ – регулярное аффинное распределение, то $\hat{N} = N$. Пусть $N_1 \neq N$ и пусть $N_1$ – многообразие. Тогда с $N_1$ производится та же процедура, т.е. рассматривается отображение $F|_{N_1}$, множество $N_2 = \{\mathbf{y} \in N_1: F|_{N_1}(\mathbf{y}) \neq \varnothing\}$ и т.д. В результате возникает конечная последовательность многообразий $N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_d$, где $N_0 = N$. Алгоритм заканчивается на шаге $d + 1$ в одном из двух случаев. В первом $N_{d+1} = \varnothing$ и, следовательно, $P$-многообразий, принадлежащих $N$, не существует. Во втором случае $N_d = N_{d+1} = \hat{N}$. (Если $N_d$ состоит из одной изолированной точки, то эта точка является фазовой траекторией системы (1), т.е. $P$-многообразием нулевой размерности.) Указанный алгоритм выполним, вообще говоря, лишь локально.

На построенном многообразии $\hat{N}$ лежат все фазовые траектории системы (1), удовлетворяющие (3). Если $\dim \hat{N} > 0$, то соответствующая подсистема (2) обладает следующим свойством: если $\mathbf{y}(t)$ – фазовая траектория системы (1), принадлежащая $\hat{N}$, то $\mathbf{x}(t) = \kappa^{-1}(\mathbf{y}(t))$ – фазовая траектория системы (2), и наоборот, если $\mathbf{x}(t)$ – фазовая траектория системы (2), то $\mathbf{y}(t) = \kappa(\mathbf{x}(t))$ – фазовая траектория системы (1) (где $\kappa$ – параметризация многообразия $\hat{N}$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93–01–00615).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елкин В.И.* // АиТ. 1985. № 9. С. 31 - 41.
2. *Елкин В.И.* // ДАН. 1988. Т. 302. № 1. С. 18 - 20.
3. *Елкин В.И.* // ДАН. 1991. Т. 316. № 1. С. 30 - 32.
4. *Елкин В.И.* // ДАН. 1993. Т. 332. № 5. С. 560 - 562.
5. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978. 83 с.