В. Н. Судаков, Феномен Вайцзеккера и каноническое определение гауссовых мер Лебега–Рохлина, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2009, том 364, 200–234

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 364, 2009 г.

В. Н. Судаков

ФЕНОМЕН ВАЙЦЗЕККЕРА И КАНОНИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССОВЫХ МЕР ЛЕБЕГА–РОХЛИНА

1. Гауссовские и другие пространства Лебега–Рохлина

1.1. Гауссовские меры и гауссовские случайные величины

Термин "гауссовский" в теории вероятностей обычно используется для характеризации математических объектов двух видов. Во-первых, особого рода вероятностных (*гауссовских*) распределений на подмножествах векторных или, реже, аффинных пространств и самих таких пространств с мерами, возможно, рассматриваемых с точностью до естественно возникающей эквивалентности (*линейного изоморфизма* mod 0 таких вероятностных пространств) – *гауссовских вероятностных пространств*. Во-вторых, в определённом смысле сопряжённых с ними объектов: *гауссовских случайных величин* и *гауссовских пространств случайных величин* – векторных пространств таких случайных величин, их *характеристических функционалов*, гауссовских хаосов различных порядков и размерностей) и т.п. со своими соотношениями эквивалентности – изоморфизмом структур гильбертова пространства или конгруентностью (изометрией) его подмножеств, например, GB- и GC-подмножеств [1] гильбертова пространства. Это пространство, которое может быть при желании интерпретировано как пространство $\mathcal{G}_0$ гауссовских центрированных случайных величин g, разделяющее точки пространства Лебега–Рохлина элементарных событий $(\Omega,\ \mathfrak{F},\ \mathsf{P})$, которое в этом случае становится гауссовским пространством Лебега–Рохлина $(\Gamma, \mathcal{F}, \gamma)$. На гауссовских пространствах случайных величин совпадают топология сходимости по вероятности и любая L^p-топология ($p < \infty$).

С определением конечномерных гауссовских мер проблем нет: явные выражения для плотностей в принципе дают ответы на боль-

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-91331-ННИО (русско-немецкий). Научной школой НШ 632.2008.1. Программой фундаментальной исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики" .

шинство вопросов или помогают переформулировать их в том или ином удобном для изучения виде. Одна из целей настоящей работы – обсудить начальные определения *бесконечномерных* гауссовых мер, определения, использующие только необходимые для гауссовых мер математические структуры.

Как обычно, $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ – колмогоровское вероятностное пространство, которое дополнительно предполагается неатомическим пространством Лебега–Рохлина (неатомическим ЛР-пространством). Дополнительное требование можно сформулировать как *полноту пространства с мерой по Рохлину*, см. [2–5], включающая требование сепарабельности; не смешивать с полнотой σ-алгебры. Иными словами, предполагается, что для некоторого (и тогда для любого) базиса $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...\}, B_k \in \mathfrak{F}$, рассматриваемого вероятностного пространства $\operatorname{mod} 0$ инъекция

$$\pi\colon \Omega \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \pi(\omega) = (\mathbf{1}_{B_1}(\omega), \mathbf{1}_{B_2}(\omega), \dots) \tag{1}$$

измерима относительно $\mathsf{P} \circ \pi^{-1}$. Сепарабельные не-ЛР-меры в точности так же патологичны и патологенны, как неизмеримые по Лебегу подмножества единичного отрезка внешней меры единица. Неатомическое пространство Лебега–Рохлина изоморфно как пространство с мерой отрезку $[0,1]$ с лебеговской мерой, но, конечно, бессмысленно говорить об изоморфизме других возможных структур, не присутствующих на каноническом носителе меры, например, структуры сепарабельного банахова пространства, часто используемой для констатации свойства Лебега–Рохлина, или, скажем, структуры порядка единичного отрезка. Можно говорить только об изоморфизме структур пространств с мерой.

Пусть $\mathcal{G} \subset L^2(\Omega,\, \mathfrak{F},\, \mathsf{P})$ обозначает в дальнейшем некоторое $\operatorname{mod} 0$ разделяющее точки Ω (т.е. такое, что порождаемое им разбиение $\zeta_{\mathcal{G}}$ – это $\operatorname{mod} 0$ разбиение ε на точки) замкнутое гауссовское содержащее константы подпространство пространства случайных величин $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, g – элемент пространства $\mathcal{G}$, и $\mathcal{G}_0$ – подпространство пространства $\mathcal{G}$, состоящее из центрированных гауссовских величин ($\dim \mathcal{G}/\mathcal{G}_0 = 1$). В дальнейшем мы будем говорить, что какое-то свойство объекта S выполняется $\operatorname{mod} 0$, если оно выполняется для каждого объекта S', тождественного $\operatorname{mod} 0$ объекту S, т.е совпадающего с ним после удаления (сохраняющего обязательные структуры) некоторого подмножества или некоторых подмножеств меры 0. Изоморфизм $\operatorname{mod} 0$ двух объектов означает изоморфизм тех или иных их структур после удаления из рассматриваемых вероятностных пространств некоторых подмножеств нулевой меры. Например, $\operatorname{mod} 0$ изоморфизм двух измеримых разбиений пространства Лебега–Рохлина или $\operatorname{mod} 0$ изоморфизм двух векторных пространств гауссовских случайных величин. Почти всегда мы будем отождествлять различные $\operatorname{mod} 0$ изоморфные *версии* вероятностного пространства или объекта, с ним связанного. “Почти совпадающие” случайные величины на поточечно фиксированном вероятностном пространстве с мерой можно, допуская некоторую вольность, называть версиями одной “$\operatorname{mod} 0$ определённой” случайной величины или функцией, заданной на понимаемом с точностью до выбора $\operatorname{mod} 0$ версии вероятностном пространстве. При этом распределение вероятностей значений этой случайной величины (или вектора) остаётся корректно определённым и без изменения.

1.2. Проективный предел гауссовских конечномерных распределений и трансформация неатомического вероятностного пространства в гауссово ЛР-пространство

Распределение $\mathcal{L}(\mathbf{g})$ случайного гауссовского центрированного вектора $\mathbf{g} = (g_1(\omega), g_2(\omega), ..., g_n(\omega))$, $\quad \omega \in (\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ – это образ $\mathsf{P} \circ \mathbf{g}^{-1}$ меры P при отображении $\mathbf{g}$, т.е. гауссовская мера в n-мерном векторном пространстве (точнее, в пространстве $\mathbb{R}^n$ с учётом выбранного базиса). Последнее замечание становится существенным, если мы заботимся о каноничности построения гауссовской меры, определяющей закон распределения вероятностей значений случайного гауссовского вектора $\mathbf{g}$. Никаких выделенных координат на гауссовском пространстве нет (но выделена евклидова структура, и тем самым выделен класс ортонормированных базисов). Замкнутая линейная оболочка векторов g_k – это “конечномерный центрированный гауссовский хаос порядка 1”, канонически порождающий, в частности, гауссовское конечномерное центрированное распределение на *евклидовом пространстве*, т.е. в частности линейную структуру и евклидову метрику.

Общий (счётномерный) случай, т.е. случай бесконечномерного распределения $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ гауссовского хаоса $\mathcal{G}$ [30] или $\mathcal{G}_0$ приносит заметные усложнения. Понятно, что сепарабельное гильбертово пространство, каковым является пространство $\mathcal{G}_0$, не может быть снабжено инвариантной относительно ортогональных поворотов гауссовской мерой (единичная нагрузка в нуле – единственная такая мера), и поэтому теперь инвариантное относительно гильбертовых поворотов распределение случайного вектора $\mathcal{G}_0$ не реализуется как гауссовская инвариантная относительно вращений мера на каком-то гильбертовом пространстве. Мы должны задать (гауссовскую инвариантную относительно вращений) меру на некотором расширении гильбертова пространства H, на котором могут быть доопределены становящимися линейными функции из $\mathcal{G}_0$. Но инвариантных относительно вращений расширений (кроме гомотетий) гильбертова пространства не бывает, а канонически определяемых нет подавно. Нам во всяком случае требуется задать на вероятностном пространстве с мерой $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ структуру векторного пространства, которая могла бы превратить это пространство с мерой в гауссовское. При этом если мера P была мерой Лебега–Рохлина, то от добавления линейной структуры это свойство не нарушится. Будем называть такую процедуру линеаризацией. В конечномерном случае линеаризация включает описанное задание на Ω евклидовой структуры. В частности, такая линейная структура возникает в связи с описанными свойствами пространства $\mathcal{G}_0$.

Как пояснялось выше, возникающая мера γ выражает закон распределения случайного гауссовского вектора $\mathcal{G}_0$. Общий способ нахождения совместного распределения компонентов бесконечномерного гауссовского вектора состоит в нахождении существующего, как доказано, проективного предела совместных распределений конечных наборов элементов пространства $\mathcal{G}_0$. Такой предел по известной теореме Колмогорова о согласованной системе конечномерных распределений существует для любого параметризованного множества случайных величин. Однако, этот предел в общем случае не обязательно обладает ЛР-свойством. В нашем случае ЛР-свойство гарантируется метризуемостью “параметрического множества” – пространства $\mathcal{G}_0$ (расстояние индуцируется из $L^2(\mathsf{P})$) и сепарабельностью $\mathcal{G}_0$, что, к примеру, не имеет места для континуального множества независимых гауссовских случайных величин. Наиболее удобно осуществлять “стандартную” линеаризацию пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, ограничиваясь использование конечномерных гауссовских распределений совместными распределениями конечных наборов элементов ортонормированного базиса, фиксированного в пространстве $\mathcal{G}_0$. В этом случае определяемая гауссовская мера γ возникает как произведение гауссовских мер на произведении прямых $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Мы опишем построение по произвольному гауссовскому хаосу [6, 30] первого порядка, $\operatorname{mod} 0$ разделяющему точки Ω, точнее, по замкнутому (под)пространству $\mathcal{G}_0 \subset L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ гауссовских *центрированных* случайных величин, *гауссовского пространства* $(\Gamma, \mathcal{F}, \gamma)$ Лебега–Рохлина (т.е. вероятностного), *канонически* (для каждого $\mathcal{G}_0$) $\operatorname{mod} 0$ изоморфному как пространство Лебега–Рохлина пространству $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, причём линейные структуры любых двух линеаризаций $\operatorname{mod} 0$ совпадают (пересечение двух линеаризаций – снова векторное пространство полной меры), а гауссовское пространство случайных величин $\mathcal{G}_0$ после "изоморфной" замены аргумента превращается в пространство *линейных* функционалов на возникающем векторном пространстве Γ с гауссовской мерой соответствующей размерности, т.е. размерности пространства $\mathcal{G}_0$. Такую процедуру назовём линеаризацией вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ гауссовским линейным центрированным пространством функций $\mathcal{G}_0$. При этом формально различающиеся методы линеаризации приводят для каждого $\mathcal{G}_0$ к $\operatorname{mod} 0$ одному и тому же результату. Неопределённость в описании возникающей линейной структуры такова же, как неопределённость продолжения конечно-аддитивной гауссовской меры на алгебре цилиндрических подмножеств гильбертова пространства, инвариантной относительно ортогональных преобразований, до счётно-аддитивного белого шума или неопределённость восстановления гауссовой меры по её ядру или по эллипсоиду рассеивания (см. далее). Особенно просто устроен класс линеаризаций "стандартного типа", определяемой фиксацией ортонормированного базиса в пространства $\mathcal{G}_0$ и использующий только совместные распределения конечных подмножеств этого базиса. (Однако, пользуясь определением проективного предела мер можно избежать прямого использования свойства ортогональности.) В случае $\dim \mathcal{G}_0 = \infty$ пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ переходит в произведение $\gamma = \gamma^0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ стандартных одномерных гауссовских мер, $\mathcal{G}_0$-канонически изоморфное мере P. Подчеркнём: такой стандартным образом канонически (без использования посторонних структур) получаемый носитель гауссовской меры вовсе не является наименьшим носителем: таковой вообще не существует. Пересечение всех таких линейных носителей совпадает с нулевой меры ядром рассматриваемого гауссовского ЛР-пространства $\mathcal{H}_\gamma$ (см. ниже), а пересечение не более чем счётного их числа само является линеаризацией. Возникающую гауссовскую ЛР-меру можно более коротко описывать как существующий ввиду ЛР-свойства проективный предел семейства гауссовских распределений на конечномерных линейных пространствах: совместных распределениях конечных наборов элементов базиса пространства $\mathcal{G}_0$ (см. [4, 6]). Подробнее вопрос о линейных гауссовских структурах на пространствах Лебега–Рохлина и о продолжении линейных (измеримых или нет) функционалов будет с дополнительными комментариями рассмотрен дальше в разделе 4.

Если процедура линеаризации применяется к конечномерному гауссовскому центрированному распределению, т.е. если пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ – это конечномерние гауссовское вероятностное пространство (Ω – векторное пространство, $\mathsf{P} = \gamma$ – гауссовская мера, а пространство $\mathcal{G}_0$ – это сопряжённое с ним векторное пространство, то стандартная линеаризация возвращает к исходной центрированной конечномерной гауссовской мере, определённой на единственно возникающем естественном наименьшем линейном носителе. В том случае, когда процедура линеаризации применяется к бесконечномерной гауссовой мере в сепарабельном банаховом пространстве B, то поскольку такая мера γ обладает свойством Лебега–Рохлина, стандартная каноническая линеаризация сводится к фиксации полной последовательности независимых линейных γ-измеримых (!) (*возможно*, непрерывных) функционалов, определяющих отображение $\pi\colon B \to \times_k \mathbb{R}_k$ ($\mathbb{R}_k = \mathbb{R}$) и тем самым стандартный образ $\gamma \circ \pi^{-1}$ на произведении числовых прямых. Если, например, B – гильбертово пространство, то в сопряженном с ним пространстве B' всегда найдётся (ортонормированный, если требуется) *базис* из независимых относительно γ линейных функционалов.

1.3. Проективный предел: появление ядра гауссовской меры и эллипсоида рассеивания

Определяющие проективный предел операторы гомоморфизмов допредельных евклидовых гауссовских пространств $\pi_{\alpha,\beta}$ попутно задают морфизмы почти тривиальной категории гильбертовых (включая евклидовые) пространств, относительно которых определённые на этих пространствах гауссовские меры оказываются стандартными. Единичные шары при этом также определяют свой “проективный предел”, следы которого на каждом допредельном пространства суть единичные шары этих евклидовых пространств. Легко проверить (и хорошо известно), что мера таких шаров равномерно при увеличении размерности стремится к нулю, и предельный объект (эллипсоид концентрации $\mathcal{E}_\gamma$) вовсе имеет нулевую меру относительно проективного предела γ конечномерных гауссовских мер. Да и всё гильбертово пространство $\mathcal{H}$ (“ядро” возникающей гауссовской бесконечномерной меры, для которого эллипсоид концентрации является единичным шаром), также имеет нулевую гауссовскую меру.

1.4. "Неколмогоровские" определения

В комментарии нуждаются сами фундаментальные понятия "меры" и "гауссовости". Для удобства изложения условимся о терминах, связанных с этими понятиями, поскольку определения, дававшиеся понятию *меры* и тем более *гауссовской меры* разными авторами, резко различаются между собой не только формально, но и по существу (см. раздел 3). Прежде, чем говорить о гауссовости, вспомним, как определялось в своё время понятие вероятностной меры коллективом анонимных крупных (в основном, повидимому, французских, но, возможно, и американских) математиков, публиковавшим свои труды под ставшим знаменитым именем Nikolas Bourbaki[1], намерением которого было ревизовать *всю* математику и добиться, в частности, унификации терминологии. (Последнее – прекрасная и даже отчасти реализованная, но вряд ли осуществимая полностью идея.) Акцент с самого начала был поставлен на формализованном понятии математической структуры, которым автор настоящего текста не вдаваясь в подробности пользуется. Так вот, понятие вероятностной меры (и тем более общее понятие гауссовской меры) г-ном Bourbaki не определялось вовсе и просто для него не существовало, как, повидимому, и всей теории вероятностей. Нет, понятие меры в серии трудов г-на Bourbaki подробно определено, но в том виде, который трудно использовать для построения теории вероятностей, по крайней мере в уже тогда практически общепринятом колмогоровском варианте. Дело в том, что меры по Bourbaki – это объекты, определяемые как *линейные функционалы* на некоторых *векторных пространствах функций* (на другом языке – *радоновы меры на локально-компактных пространствах*; см. ниже). Автор определяет и понятие "*абстрактной меры*", которое означает линейный функционал на произвольном пространстве функций с некоторыми всё же постулируемыми свойствами. Фундаментальное и интуитивно важнейшее понятие события исчезает (почти как в корреляционной теории). Колмогоровские

---

[1]Некоторые математики заявили, что никакого Bourbaki нет. В ответ г-н Bourbaki немедленно публично объявил, что сами эти некоторые (например, профессор Boas) не существуют. Но какие могли быть сомнения? Автору этой статьи сам г-н Bourbaki в 1966 году подарил свою книгу [7] с дружеской надписью "*A Monsieur V. Sudakov Hommage de l'auteur. N. Bourbaki*". Мне известны и другие обладатели ценных для математика автографов г-на Bourbaki, например, профессор А. М. Вершик. – В.С.

(и уж тем более рохлинские) пространства элементарных событий $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ определять следуя Bourbaki непросто и неестественно. Но если не оценивать полезность концепции Bourbaki только с точки зрения её адекватности нуждам теории вероятностей, можно, кажется, понять содержательные цели, преследовавшиеся г-ном Bourbaki, хотя сегодняшняя теория вероятностей в системе понятий Bourbaki вся остаётся за бортом. Да и другие области математики, как и физики, такие, как математическая статистика, целые разделы математической статистической физики, эргодическая теория, частично дескриптивная теория множеств, концепция смешанных стратегий в теории игр и другие пострадают ещё больше. (Но, к примеру, не пострадает мера Хаара на локально-компактных группах.) Лебегова теория меры, современная теория вероятностей по Колмогорову, вся теория вероятностных пространств Лебега–Рохлина, теория борелевских пространств уж не нужны больше!

Точные формулировки определений *Bourbaki* и некоторых других неожиданных определений приведены в разделе 3.

Эта притча – о желательности и важности определения математических понятий *без привлечения посторонних структур*, необязательных в контексте обсуждаемого раздела математики или, по крайней мере, в контексте обсуждаемого понятия.

1.5. Колмогоров и Рохлин. Идея и её реализация

Если говорить всерьёз, то можно думать, что потребовавшая от её авторов значительной работы концепция меры г-на Bourbaki при всей своей громоздкости во многом была направлена на исключение возможных патологий и парадоксов, нередко возникающих в “безграничной” теории меры. Замечательный специалист по гауссовским мерам Б. С. Цирельсон называл такую теорию меры $\tau\varepsilon\rho\breve{\alpha}\tau o\lambda o\gamma\acute{\iota}\alpha$, т.е. “наукой о монстрах”. (Цирельсон употреблял удачный “древнегреческий” термин именно с таким русским переводом). Из-за отсутствия всяких ограничений в определении вероятностной меры Колмогоров не смог полным образом определить систему условных мер на элементах недискретного измеримого разбиения вероятностного пространства (что не всегда и возможно). О трудностях с определением условного математического ожидания пишет он сам (см. [8, стр. 6]). Идея построения системы условных мер на элементах измеримых разбиений вероятностных пространств была высказана в 1940 году самим Колмогоровым (см. [2, 3]). Без всякого привлечения дополнительных структур эта идея ещё в том же сороковом году была реализована учеником А. Н. Колмогорова В. А. Рохлиным, который ввёл ключевое понятие *полноты* сепарабельного пространства с мерой. Он выделил исключающий патологии класс вероятностных пространств – пространств Лебега, или полных вероятностных пространств по терминологии Рохлина (не путать с полнотой σ-алгебр), пространств Лебега–Рохлина, или ЛР-пространств по современной терминологии. Этот класс охватывает для сепарабельных вероятностных пространств *все* непатологические случаи и исключает, как можно полагать, *все* возиожные патологии. К патологиям следует отнести явления вроде вероятностных мер на неизмеримых по Лебегу подмножествах прямой, несуществования проективных пределов последовательностей сепарабельных вероятностных пространств, т.е. в сущности *несправедливости даже счётного варианта теоремы Колмогорова* о продолжения согласованной системы "конечномерных" (без предположения линейности или ЛР-свойства!) распределений до меры, несуществования (тривиальной для дискретных разбиений произвольного вероятностного пространства) канонической системы условных мер на элементах измеримого разбиения сепарабельного вероятностного пространства, невозможности выделения эргодических компонентов автоморфизмов вероятностных пространств, отсутствие полного непрерывного аналога теоремы Фубини и мн. др. В пространствах Лебега–Рохлина имеет место естественная биекция между $\operatorname{mod} 0$ под-σ-алгебрами и измеримыми $\operatorname{mod} 0$ разбиениями, а также каноническая биекция автоморфизмов ЛР-пространства и автоморфизмов его "метрической структуры" по Рохлину ("структурных изоморфизмов" по Колмогорову) такого пространства, т.е. естественным образом метризованной σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Сравнивая один результат В. А. Рохлина с близким (более слабым) результатом фон Неймана 1932 года о разложении автоморфизмов на эргодические компоненты, Колмогоров в своём отзыве на диссертацию В. А. Рохлина отмечает: "Изложение Рохлина **имеет преимущество методологической чистоты: в первоначальных работах Неймана мера рассматривалась в пространствах с метризуемой топологией**" (см. [3, с. 431]).

Громадный авторитет А. Н. Колмогорова, его идей и методов, как и относительная формальная простота колмогоровского (использующего теорему Радона–Никóдима) определения слабого варианта условных вероятностей и математических ожиданий, а с другой стороны – несколько лет полного неучастия В. А. Рохлина в научной жизни в первой половине 40-х годов (германский плен), привели к тому, что ныне в большинстве случаев специалисты по теории вероятностей всё же гораздо чаще пользуются формально более простой, но менее наглядной и гораздо менее содержательной концепцией условных вероятностей и условного математического ожидания, опирающейся на теорему Радона–Нико́дима, чем системой условных вероятностных мер по В. А. Рохлину на элементах измеримых разбиений непатологических вероятностных пространств. Часто мало наглядное понятие измеримости относительно под-σ-алгебры довлеет над эквивалентным для ЛР-пространств более наглядным понятием измеримости функции относительно измеримого разбиения (постоянство на $\mathrm{mod}\,0$ каждом элементе разбиения, т.е. свойство быть "функцией от функции"), а уж понятие радоновой меры (целиком основывающееся на привлечении "посторонних" топологических структур) почти вытеснило более красивое и привлекательное для профессионала более мощное и практически всегда пригодное общее понятие вероятностного пространства Лебега–Рохлина. Здесь прекрасной иллюстрацией может служить Теорема Вайцзеккера (H. v. Weizsäcker) с нашим добавлением (см. раздел 4), подчёркивающая возникающие из-за внедрения неканонических структур трудно преодолимые нежелательные обстоятельства (неединственность продолжения линейных функционалов с ядра $\mathcal{H}_\gamma$ гауссовской меры γ), которые отсутствуют в "чистой" (т.е. рохлинской) теории меры. Другим хорошим примером служит пример Талаграна (M. Talagrand) см. [11, с. 86; 12, с. 181] гауссовской меры γ на некотором банаховом пространстве X, воспроизводящее ядро $\mathcal{H}_\gamma \subset X$ которой (см. ниже) увеличивается при некотором банаховом же расширении пространства X, что адептам "чистой" теории вероятностей кажется патологией и невозможно при каноническом определении гауссовской меры, когда обязательно *сепарабельное* воспроизводящее ядро $\mathcal{H}_\gamma$ определяется в теории Лебега–Рохлина без привлечения чужих структур.

Цитированное выше замечание Колмогорова ясно выражает мнение Колмогорова о **нежелательности привлечения в теории меры неканонических** (т.е. посторонних) **структур**. В основополагающей работе [8, с. 5] Колмогоров также пишет: "**...чтобы... обосновать теорию вероятностей, следовало ещё освободить теорию меры и теорию интегрирования от геометрических элементов...**". Напомним, что определения упоминавшихся GB и GC множеств, на первый взгляд использующих геометрию, на самом деле зависят только от геометрии гильбертова пространства, канонически связанной с гауссовой мерой.

Основанную на других идеях аксиоматику меры Лебега на единичном отрезке в 1942 году предложили П. Р. Халмош и Дж. фон Нейман [13]. У. Амброс, П. Халмош и С. Какутани в 1941–42 годах (см. [14]) предложили свою версию теоремы о существовании условных мер (оказавшуюся, как заметил в 1949 году П. Халмош [15], несостоятельной).

2. Гауссовы меры: конечномерные и другие

2.1. Конечномерные гауссовские распределения: элементарная теория

Перейдём теперь к главной теме этой работы – гауссовским мерам. Напомним некоторые привычные и не очень определения гауссовских объектов у разных авторов, начав с конечномерных распределений, чтобы было с чем сравнивать общий случай.

С определением конечномерной гауссовой меры (“нормального распределения”) проблем не возникает, отметим только, что здесь хорошо служит координатное описание плотности невырожденной гауссовской меры в конечномерном координатном пространстве. Гауссовские же случайные величины – это те, распределение вероятностей значений которых одномерное нормальное. При этом (наглядном и поэтому наиболее понятном непрофессионалу) способе может, однако, создаться впечатление, что для констатации факта гауссовости случайной величины на вероятностном пространстве требуется структура *числовой* прямой $\mathbb{R}$. Как определить гауссовость меры на одномерном векторном пространстве E (не на числовой прямой $\mathbb{R}^1$) – этот простой вопрос на лекциях в университете никогда не обсуждается. Для многомерного (конечномерного) случая либо рассматриваются невырожденные гауссовские распределения в евклидовых пространствах, либо пользуются характеристическим функционалом, либо свойством гауссовости всех линейных функционалов на рассматриваемом *векторном* пространстве с мерой. Таким образом, исходным объектом является произвольное конечномерное векторное пространство с борелевской вероятностной мерой на нём, которая при выполнении дополнительных условий называется (центрированной) гауссовской. Для бесконечномерного случая вопрос о носителях меры становится актуальным и далеко нетривиальным.

Центрированные гауссовские меры γ на конечномерном векторном пространстве E часто задаются своими характеристическими функционалами, определёнными на векторном пространстве $\mathcal{G}_0$ *линейных* гауссовских функционалов на E, т.е. преобразованиями Фурье:

$$\chi_\gamma(g) \coloneqq \int \exp(i\langle\omega, g\rangle)\ \gamma(d\omega) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\, q_\gamma(g)\Big), \tag{2}$$

где q_γ – ковариационная квадратичная форма гауссовой меры γ, т.е. *ограничение квадрата* $L^2(\gamma)$*-нормы*, возникающей на однозначно определённом векторном пространстве $\mathcal{G}_0 \subset L^2(E, \gamma)$, *алгебраически* сопряженном с E. Ранг этой квадратичной формы определяет размерность гауссовской меры, при этом такой способ задания охватывает любые центрированные конечномерные, а не только невырожденные гауссовские меры в конечномерном векторном пространстве E. Например, для $\gamma = \delta_0$ тождественно $\chi_\gamma(g) \equiv 1$. Задать на пространстве линейных измеримых функционалов характеристический функционал гауссовской меры означает, в частности, задать "слабое распределение", т.е. согласованную систему совместных распределений конечных наборов линейных функционалов – элементов пространства $\mathcal{G}_0$. Действительно, совместное распределение $\mathcal{L}(\vec{g})$ нескольких гауссовских линейных функционалов $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ однозначно определяется заданием распределений всевозможных линейных комбинаций этих функционалов: $\mathcal{L}(\vec{g}) = \mathrm{N}\ (0, G(\vec{g}))$, где $G(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ – матрица Грама (скалярных произведений) этих элементов евклидова пространства. В конечномерном случае любая неотрицательная квадратичная форма q на векторном пространстве E' определяет некоторую гауссовскую меру γ на пространстве E: ту, для которой $q = q_\gamma$.

Но в случае бесконечномерного $\mathcal{G}_0$ для слабого распределения, задаваемого по аналогии с конечномерным случаем структурой (сепарабельного) гильбертова пространства на $\mathcal{G}_0$, описание соответствующего сопряжённого с $\mathcal{G}_0$ в аналогичном смысле векторного пространства с гауссовской мерой менее тривиально и ещё будет нами обсуждаться.

Плотность по некоторой лебеговой мере λ на конечномерном векторном пространстве E

$$p_{\gamma,\lambda}(\omega) \coloneqq \frac{d\gamma}{d\lambda}(\omega) \tag{3}$$

распределения невырожденнной центрированной гауссовской меры γ, определённой на борелевских подмножествах конечномерного векторного пространства E (производная Радона–Нико́дима), имеет вид

$$p_\gamma(\omega) = C_{\gamma,\lambda} \exp\Big(-\frac{1}{2}\, Q_\gamma(\omega)\Big), \tag{4}$$

где $C_{\gamma,\lambda}$ – нормирующий множитель, который зависит только от λ и для того случая, когда λ является стандартной мерой Лебега на евклидовом пространстве E относительно нормы $\|\omega\|^2 = q_\gamma(\omega)$, находится по формуле $C_{\gamma,\lambda} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}\dim E}$. Положительную квадратичную форму Q_γ, возникающую на гауссовском векторном вероятностном пространстве E, называют квадратичной формой концентрации (или рассеивания) гауссовской меры γ, а подмножество (единичный шар гильбертова пространства $\mathcal{H}_\gamma$)

$$\mathcal{E}_\gamma = \{\omega \in \mathcal{H}_\gamma : Q_\gamma(\omega) \leqslant 1\} \tag{5}$$

называют эллипсоидом концентрации (рассеивания) этого гауссового распределения (эллипсом при $\dim E = 2$; термин впервые возник в теории артиллерийской пристрелки). Если лебегова мера λ согласована с некоторой евклидовой структурой на пространстве E, т.е. единичный куб имеет единичную λ-меру, а $Q_\gamma(\omega) = (R_\gamma\omega, \omega)_E$, где R_γ – некоторый положительный самосопряженный линейный оператор, действующий в пространстве E, то

$$C_\gamma = (2\pi)^{-\frac{1}{2}\dim E}(\det R_\gamma)^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Если квадратичная форма концентрации Q_γ совпадает с квадратом заданной на пространстве E евклидовой нормы и мера γ центрированная, то гауссовскую меру $\gamma = \gamma_E^0$ называют стандартной (относительно евклидовой структуры на E). Хотя казалось бы, что формулы, определяющие плотность невырожденной конечномерной гауссовской меры, не понадобятся для бесконечномерных гауссовских распределений ввиду отсутствия меры Лебега, но тем не менее и в бесконечномерном случае определяемая по корреляционной квадратичной форме q_γ на $\mathcal{G}_0$ двойственная квадратичная форма концентрации Q_γ (возникающая на некотором подпространстве $\mathcal{H}_\gamma \subset E$ нулевой γ-меры) порождает тем самым уже упоминавшееся выше очень важное для теории гауссовских распределений (пред)гильбертово (в собственной норме) подпространство $\mathcal{H}_\gamma$, часто называемое ядром гауссовской меры γ, а единичный шар этого (пред)гильбертова пространства $\mathcal{E}_\gamma$ называют эллипсоидом рассеивания меры γ. Свойство "полной" гильбертовости, т.е. полноты нормированного пространства $\mathcal{H}_\gamma$, как читатель, возможно, догадался и как это следует из рассмотрения канонической линеаризации (см. ниже), соответствует свойству Лебега–Рохлина гауссовской меры γ.

2.2. Бесконечномерное – не конечномерное.

Минимальные линейный и топологический носители [16], категория гауссовских мер, лебеговский тип условных гауссовских мер на элементах разбиения на радиальные лучи, классическая форма изопериметрического неравенства, GB и GC-свойства *всех* ограниченных подмножеств гауссовского пространства $\mathcal{G}_0$ случайных величин, нетривиальное подпространство квазиинвариантных сдвигов $\mathcal{H}_\gamma$, оно же подпространство барицентров измеримых подмножеств положительной гауссовской меры и пространство барицентров условных распределений на элементах всевозможных измеримых разбиений – это неполный перечень тех моментов, тех нетривиальных особенностей (сама размерность – уж не в счёт), которые отличают класс конечномерных гауссовских распределений от бесконечномерных. С некоторыми из них мы ещё познакомимся ниже подробнее.

Особенность конечномерных гауссовских мер – существование точного (минимального) линейного носителя. Корректно по гауссовской мере определяется понятие размерности конечномерной гауссовской меры, но не размерность её первоначального линейного носителя – векторного пространства, на подмножествах которого мера определена. Точный носитель меры (это для конечномерных гауссовских распределений векторное подпространство) своей конечной размерностью определяет свою топологию и σ-алгебру подмножеств, на которых мера определена. Совокупность конечномерных векторных пространств с центрированными гауссовскими мерами естественным образом составляет *категорию* (см., например, [17, с. 83]) конечномерных гауссовских пространств, в которой морфизмы – это гомоморфизмы гауссовских конечномерных пространств, включающие гомоморфизмы линейных структур на их носителях ("гауссовские гомоморфизмы"). Не все эти понятия сохраняются для бесконечномерных (даже сепарабельных; других мы не рассматриваем) гауссовских мер. Например, теряет смысл понятие минимального линейного носителя. Само общее определение основного объекта – гауссовской меры – перестаёт быть простым и очевидным и дробится (вспомним теорему Вайцзеккера и пример Талаграна, упоминавшиеся выше (см. 1.4). Не будучи точно определённым, бесконечномерное гауссовское распределение не расширяет автоматически категорию конечномерных гауссовских распределений. С другой стороны, каждую конечномерную гауссовскую меру можно рассматривать как маргинальную для бесконечномерной, как бы эту последнюю ни определять (но не наоборот). Это наблюдение тем более стимулирует естественное желание расширить категорию конечномерных гауссовских распределений, корректно присоединив к ней бесконечномерную гауссовскую меру, хотя не сразу понятно, на каком пространстве она должна быть определена. Конечномерная гауссовская мера имеет тип лебеговской меры той же размерности и автоматически оказывается мерой Лебега–Рохлина, но с типом бесконечномерной дело сложнее. Достаточно вспомнить, что хотя у конечномерных гауссовских мер условные меры на лучах имеют лебеговский тип, т.е. эквивалентны как меры одномерной мере Лебега на полупрямой, для измеримого разбиения ζ_{rad} векторного ЛР-пространства с центрированной (других мы здесь не рассматриваем) бесконечномерной гауссовской мерой γ на радиальные лучи условные меры на лучах суть δ-меры [1]. (Например, для *почти каждого элемента* $\omega=(\omega_1,\ \omega_2,\dots)$ счётного произведения числовых прямых $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, снабжённого счётным произведением

$$\gamma_{\mathbb{N}}^0=\bigotimes_{k=1}^{\infty}\gamma_k^0 \tag{7}$$

стандартных одномерных гауссовских мер, выполняется равенство

$$\lim\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ x_k^2=1, \tag{8}$$

чем на $\gamma_{\mathbb{N}}^0/\zeta_{\mathrm{rad}}$-почти каждом луче и определяется точное положение такой “условной” δ-меры. Отсюда, в частности, вытекает, что бесконечномерная гауссовская мера и во многих других отношениях кардинально отличается от конечномерных. Например (как хорошо известно) образ бесконечномерной гауссовской меры при нетождественной гомотетии сингулярен относительно исходной меры. Для бесконечномерной гауссовской меры свойства GB и GC прекомпактных подмножеств $K\subset G$ пространства случайных величин $\mathcal{G}_0$ нетривиальны (GB-свойство – это конечность с вероятностью 1 случайной величины $\sup K$, а GC-свойство означает непрерывность выборочных функций семейства гауссовских случайных величин K как функций на K относительно индуцированной вложением $K \subset G_0$ метрики [1]). Эти свойства зависят только от внутренней геометрии множества K как подмножества гильбертова пространства, а для конечномерной гауссовой меры все ограниченные подмножества обладают обоими этими свойствами. На GB, но не GC-подмножествах гауссовского пространства случайных величин проявляется феномен детерминированной (неслучайной) конечной ненулевой осцилляции выборочных функций, а в конечномерном пространстве гауссовских случайных величин осцилляция в канонической метрике всегда равна нулю. Изопериметрическое неравенство [18, 19] для гауссовских мер

$$\Phi^{-1}(\gamma(A + \varepsilon\mathcal{E}_\gamma)) - \Phi^{-1}(\gamma(A)) \geqslant \varepsilon, \tag{9}$$

где $\varepsilon \geqslant 0$, $\mathcal{E}_\gamma \subset \mathcal{H}_\gamma$ – эллипсоид рассеивания гауссовской меры γ, а Φ – функция Лапласа, доказанное для любых сепарабельных гауссовских мер, гораздо менее тривиально для мер бесконечномерных, даже по формулировке. Для бесконечномерного гауссовского распределения объединение $\mathcal{H}_\gamma$ барицентров всех его измеримых подмножеств имеет нулевую меру, как и совпадающее с ядром $\mathcal{H}_\gamma$ гауссовой меры γ) множество всех элементов, сдвиги на которые не меняют типа меры γ [1, 12]. Разбиение гауссовского пространства с мерой на параллельные сдвиги пространства $\mathcal{H}_\gamma$ неизмеримо [12], и его измеримая оболочка – тривиальное разбиение ν. (Для конечномерных распределений множество $\mathcal{H}_\gamma$ совпадает с наименьшим носителем γ, и соотношение эквивалентности, определяющее упомянутое фактор-пространство, тоже тривиально, ведь маргинальное распределение на этом фактор-пространстве это δ_0.)

Разобраться с некоторыми возникающими здесь трудностями – наша ближайшая цель.

Подчеркнём, что топологическая (возникающая автоматически при любом определении гауссовости) структура конечномерного линейного носителя меры γ формально порождается его алгебраической структурой, и подавно структура евклидова или какого бы то ни было “чужого” нормированного пространства для *определения* и описания конечномерных гауссовских мер на нём не требуются. В то же время обычно при определении термина “бесконечномерная гауссовская мера” эта определяемая мера оказывается заданной на заранее “подготовленном” для неё гильбертовом, банаховом или локально-выпуклом векторном топологическом пространстве, обычно предполагается радоновой и определяется с участием сопряжённого с ним пространства. Таким образом достигается цель точно определить “какую-нибудь” гауссовскую меру. (Немного ниже приводится относящаяся к делу реплика Б. С. Цирельсона, усматривавшего в некоторых подобных определениях “неуважение к гауссовской мере”). С другой стороны, возникает необходимость включить в определение гауссовские меры, возникающие на таких векторных топологических не локально выпуклых пространствах, как пространство L^0 *всех* случайных величин [20] и других подобных.

В конечномерном гауссовском пространстве естественная (борелевская) σ-алгебра подмножеств канонически определяется не только по топологической структуре конечномерного векторного пространства или по структуре “координатного пространства”, но и непосредственно по алгебраической структуре векторного пространства. В бесконечномерных пространствах *функций* на некотором “параметрическом” множестве T (тоже естественно интерпретируемых как “координатные просторанства” $\mathbb{R}^T$) σ-алгебра, порождаемая цилиндрическими подмножествами, также описывается без привлечения топологических понятий. Однако, понятие “параметрическое множество” не относится к структуре гауссовской меры, кроме того случая, когда за параметрическое множество принимают множество *всех* линейных функционалов. Осуществление желания и в общем случае бесконечномерной (сепарабельной) гауссовской меры *каноническим* образом указать пространство (т.е. множество), несущее рассматриваемую *произвольную* гауссовскую меру теперь требует некоторых новых рассуждений. Без априорного введения посторонних для обсуждаемой категории гауссовских мер или неканонически задаваемых структур непросто определить заранее канонический линейный носитель меры даже для сепарабельного случая (например, гильбертово пространство, локально-выпуклое метризуемое пространство, сепарабельное векторное метрическое пространство, польское пространство, координатное пространство функций, заданных на несчётном множестве т.п.). Конечно, в более сложных ситуациях, когда приходится рассматривать одновременно более одной гауссовской меры или иметь дело с преобразованиями гауссовских мер при тех или иных классах отображений, все эти перечисленные структуры могут входить в формулировку само́й той или иной рассматриваемой проблемы, но сейчас речь идёт об определении гауссовской меры как таковой. Про популярное определение гауссовской меры γ как вероятностной меры на σ-алгебре подмножеств векторного пространства E, получающейся пополнением σ-алгебры, порождённой функционалами из векторного пространства F, находящегося в двойственности с E и имеющими каждый гауссовское распределение с нулевым средним, хорошо сказал Б. С. Цирельсон [21]: "Такая γ может быть во многих отношениях патологической и не заслуживает поэтому названия гауссовской меры". Определение *произвольного* гауссовского бесконечномерного распределения словами: "Пусть рассматривается вероятностная мера на (таком-то) топологическом пространстве..." невозможно. В отличие от конечномерного случая фиксированной размерности, теперь не существует *наименьшего* векторного (под)пространства с такой гауссовской мерой на нём (см. далее). Возникает проблема и с описанием σ-алгебры, хотя само определение пространства Лебега–Рохлина может быть дано и в терминах только σ-алгебры, на которой задаётся мера и происходит пополнение этой σ-алгебры [23].

3. Примеры необычных определений гауссовых и других мер

3.1. Меры на координатных пространствах

Не будем повторяться, напоминая определения гауссовой меры на координатном пространстве, опирающиеся на теорему Колмогорова о продолжении согласованной системы конечномерных распределений до меры (см., например, монографию И. А. Ибрагимова и Ю. А. Розанова [24] – одну из первых на обсуждаемую тему). Отметим только, что если параметрическое множества T более чем счётной мощности, то возникающая по теореме Колмогорова вероятностная мера на σ-алгебре $\mathfrak{C}$, порождаемой цилиндрическими множествами, не сепарабельна и поэтому заведомо не *не является мерой Лебега–Рохлина*, и без дополнительной проверки [22] нельзя гарантировать для такой "гауссовой" меры на $\mathbb{R}^T$ возможность выделения (тем более единственного) подмножества полной внешней меры, на котором индуцируется мера Лебега–Рохлина. Таково, например, никак не обладающее ЛР-свойством (несепарабельное) континуальное произведение одномерных стандартных гауссовских мер. Это "плохое" (не ЛР) обобщение на случай непрерывного параметра конечной или счётной последовательности независимых стандартных одномерных гауссовских распределений. ("Правильное" обобщение – стандартный гауссовский белый шум.) Легко привести и противоположный пример: винеровский процесс на отрезке $[0,1]$, задаваемый согласованной системой конечномерных распределений или своей корреляционной функцией, когда возникающая из определения винеровского процесса по теореме Колмогорова мера на пополненной цилиндрической σ-алгебре $\mathfrak{C}$ подмножеств $\mathbb{R}^{[0,1]}$ не является сепарабельной, т.е. мерой Винера (ЛР-мерой) на пространстве $\mathbb{R}^{[0,1]}$, но сепарабельное полное по собственной метрике(неизмеримое относительно σ-алгебре $\mathfrak{C}$, но это не важно) подпространство непрерывных функций $\mathbf{C}\,[0,1]$ этого континуального произведения прямых имеет полную внешнюю меру, и на нём-то и возникает *настоящая*, т.е. ЛР винеровская мера γ_W.

Прежде чем перейти к описанию гауссовских мер без использования неканонических структур, посмотрим, каким подчас неожиданным образом определялась гауссовская мера, да и мера вообще, некоторыми другими математиками.

3.2. Несколько неожиданных определений

Начнём с нестандартного определения общего понятия меры. Помимо ссылки в разделе Литература приводятся некоторые цитаты прямо здесь, в тексте.

1. **По Бурбаки.** Упоминавшееся выше определение меры по Бурбаки как линейного функционала на локально-компактном пространстве дословно таково:

> **“Определение меры**
> Пусть X – локально-выпуклое пространство, $\mathcal{K}(X)$ – векторное пространство функций на X с компактным носителем. *Вещественной мерой* на X называют линейную форму
> $$f \mapsto \mu(f) = \int f\ d\mu \tag{10}$$
> на $\mathcal{K}(X)$, удовлетворяющую условию: для каждого компактного множества $K \subset X$ существует такое число $a_K \geqslant 0$, что для каждой функции $f \in \mathcal{K}(X)$, носитель которой содержится в K, выполняется неравенство
> $$|\ \mu(f)| \leqslant a_K \sup|\ f(x)|. \tag{11}$$
> Это условие выполняется, когда линейная форма μ на $\mathcal{K}(X)$ такова, что $\mu(f) \geqslant 0$ для любой функции $f \geqslant 0$ из пространства $\mathcal{K}(X)$; такая мера μ называется *положительной*”.

(N. Bourbaki, fascicule XIII, ÉLEMENTS DE MATHÉMATIQUE. Livre VI intégration. Definitions du chapitre III. Paris, 1965) [7].

Колмогоровское пространство элементарных событий в такое определение не укладывается, как и многие другие математические модели, например, упомянутые в первом разделе этой статьи.

2. **По Невё.** Ещё одно своеобразное определение гауссовой меры, принадлежащее известному в нашей стране своей книгой "Математические основания теории вероятностей", Москва, 1969 [26] французскому математику Жаку Невё (J. Neveu):

> "Гауссовская мера на пространстве с мерой $(\mathrm{M}, \mathfrak{M}, \mu)$" ($\mu$ – некоторая не обязательно конечная мера) – "это изоморфизм гильбертова пространства $L^2(\mathrm{M}, \mathfrak{M}, \mu)$ в гауссовское подпространство пространства $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$." Здесь P – вероятностная мера). Оригинальный текст: "Une mesure gaussienne sur un espace mesuré ... est un isomorphisme de l'espace hilbertien dans un espace gaussien, sous-espace d'un espace ...". "В частности, когда пространство $(\mathrm{M}, \mathfrak{M}, \mu)$ – это одно из пространств $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега, соответствующую гауссовскую меру называют броуновской".

(J. Neveu, Processus aléatoires Gaussiens, p. 63, Montréal, 1968) [27].

Как можно понять, "гауссовская мера на пространстве с мерой" – это на более современном языке "слабое распределение" ("обобщённый случайный процесс" или "согласованная система конечномерных распределений"), задаваемое характеристическим функционалом на пространстве $L^2(\mathrm{M}, \mathfrak{M}, \mu)$, переносимым с помощью изоморфизма с гауссовского подпространства-образа, но никак не "броуновская мера" в привычных терминах. В частности, процесс (с ортогональными приращениями) броуновского движения моделируется винеровской мерой на пространстве непрерывных функций на полупрямой. А *гауссовская мера по Neveu НА пространстве натуральных чисел со считающей мерой μ на нём* оказывается счётным произведением стандартных гауссовских мер $N(0,1)$ и задаётся *на* пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (что то же самое, *на* σ-алгебре, порождённой координатными функционалами). Читатель согласится, что терминология Neveu неудачна. Принятое как в 60-е годы, так и теперь употребление в подобном контексте предлога "sur" можно проследить, например, по одному из заголовков на обложке только что цитировавшейся книги [7]

N. Bourbaki: “MESURES SUR LES ESPACES LOCALEMENT COMPACTS”. Да и в самой книге [27] J. Neveu пишет: “mesures *sur* un espace mesurable”. Кажется странным, что гауссовская мера по Neveu непонятно где задана, она вовсе не счётно-аддитивная мера, и никак это не комментируется, в отличие, скажем, от теории “абстрактного винеровского пространства”, появившейся приблизительно тогда же [28]. Впрочем, будь лучше сформулированной, сама идея J. Neveu была бы вполне хороша, она была современной, появилась когда серьёзная теория гауссовских мер только начала возникать.

3. **По Фернику.** Некоторые крупные специалисты по случайным гауссовским функциям, предпочитали исключать в своих исследованиях гауссовских случайных векторов (произвольной размерности, т.е. случайных функций) само понятие гауссовской *меры.* Вот как иногда это делалось.

> “Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ – вероятностное пространство и $(\mathrm{E}, \mathfrak{B})$ – векторное измеримое пространство. Говорят, что измеримое отображение X пространства $(\Omega, \mathfrak{A})$ в $(\mathrm{E}, \mathfrak{B})$ – *гауссовский вектор* со значениями в E, если оно обладает следующим свойством:
> Для любой пары (X_1, X_2) независимых копий отображений X и для каждой пары s, t таких вещественных чисел, что $s^2 + t^2 = 1$, пара
> $$(sX_1 + tX_2, tX_1 - sX_2) \tag{12}$$
> представляет собой пару независимых копий X”.
>
> (X. Fernique. Regularité des trajectoires des fonctions aleatoires Gaussiennes. Lecture Notes in Mathematics, v. 480 p. 6, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975) [29].

Такое на первый взгляд неожиданное определение подчас оказывалось полезным инструментом и в само́й теории гауссовских мер (трудности с построением которой были для профессионалов понятны), однако, не связанным с обсуждаемыми здесь вопросами.

4. **И другие.** Вспомним ещё распространённое определение гауссовской меры, упомянутое в первом разделе этой статьи (см. 2.2) и прокомментированное Б. С. Цирельсоном [21], а также другие обсуждавшиеся выше определения, использующие неканонические для гауссовой меры структуры вроде структур банахова или локально выпуклого пространства, координатного пространства, возникающего

как континуальное произведение числовых прямых $\mathbb{R}^T$, где $T\subset\mathbb{R}$ – параметрическое множество гауссовского случайного процесса. Гауссовость всегда определяется по гауссовским распределениям линейных функционалов. Наконец, вспомним способ задания гауссовской меры на банаховом пространстве, основывающийся на упомянутой выше идее "абстрактного винеровского пространства". Под этим понимается задание на некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (превращающемся в дальнейшем в ядро $\mathcal{H}_\gamma$ возникающей гауссовой меры γ) некоторой более слабой нормы $\|\,\cdot\,\|_B$ (B пока просто символ), удовлетворяющей условиям так называемой "измеримости нормы". Пополнение $\widehat{\mathcal{H}}^B$ пространства $\mathcal{H}$ по этой норме и является тем сепарабельным банаховым пространством, на борелевской σ-алгебре которого возникает гауссовская мера γ как продолжение конечно-аддитивной "стандартной гауссовской "цилиндрической" меры" на $\mathcal{H}$ (белого шума, сказали бы мы теперь). Распределения линейных функционалов относительно этой стандартной цилиндрической меры на $\mathcal{H}$ все гауссовские, а значит таковы и распределения относительно продолженной меры. Изложение этой теории можно найти в [28]. В качестве исходного примера послужило ядро винеровской меры в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Это пространство $\mathcal{H}=H_W$ функций f, аннулирующихся в нуле, с гильбертовой нормой

$$\|f\|_H=\left(\int\limits_0^1 (f'(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

"Абстрактное (здесь классическое) винеровское пространство" – это описанное ядро винеровской меры $\mathcal{H}$, снабжённое кроме указанной гильбертовой структуры ещё и "измеримой" нормой $\|\cdot\|_C$ (равномерной нормой), индуцированной на $\mathcal{H}$ надпространством $\widehat{C}=\mathbf{C}([0,1])$, которое восстанавливается пополнением пространства $\mathcal{H}\cap\mathbf{C}$ и на котором, в частности, сосредоточена винеровская гауссовская мера γ_W. Таким образом, определение гауссовской меры жёстко привязано к неканоническому свойству банаховости и "измеримости нормы". В общей ситуации проблема проверки "измеримости нормы" не обсуждается.

Использование при задании гауссовской меры неканонических средств (например, полная поэлементная фиксация пространства, на котором задаётся мера, как это обычно предполагается при рассмотрении гауссовской меры на сепарабельном банаховом пространстве) может существенно повлиять на определяемый объект, так что даже такие казалось бы присущие самому понятию “гауссовская мера” (и полностью определяемые каноническими параметрами) объекты как ядро $\mathcal{H}_\gamma$ оказываются зависящими от совершенно неканонических деталей. Например, как показал М. Талагран [21], ядро гауссовской меры, первоначально определённой на некотором *банаховом* пространстве, может зависеть от пространства, на котором эта мера будет рассматриваться в дальнейшем, и может увеличиваться при расширении этого пространства [6, с. 86], в то время как привычно думать, что ядро гауссовской меры полностью определяется только структурой самой меры. Другой интересный пример – обсуждаемая далее теорема Х. ф. Вайцзеккера о неоднозначности продолжении линейных функционалов с ядра бесконечной гауссовской меры. (Обе теоремы используют канторову гипотезу континуума). В примере Талаграна банахово пространство не сепарабельно, и мера не обладает ЛР-свойством (такие меры лучше не относить к гауссовским, о чём говорил Цирельсон). В теореме Вайцзеккера $\operatorname{mod} 0$ изоморфные как пространства с мерами гауссовские пространства с мерами не отождествляются, и они не “пристраиваются” к категории конечномерных гауссовских вероятностных пространств. Всё это подчёркивает своеобразие и сложность структуры самой гауссовской меры как объекта теории и тем более вызывает интерес к *каноническому* (не зависящему от посторонних структур) её определению.

4. Ещё одно определение гауссовской меры

Обсудим наше каноническое определение центрированного гауссовского пространства Лебега–Рохлина $(\Gamma, \mathfrak{F}, \gamma)$. (ЛР-свойство обязательно: если его не предполагать, то не будут исключены патологические неизмеримые полной внешней меры линейные подпространства и нарушатся важные свойства вроде полноты по естественно возникающей норме предгильбертова пространства $\mathcal{H}_\gamma$, составленного из всех векторов пространства $E = E_\gamma$, порождающих квазиинвариантые сдвиги). В отличие от обычного ЛР-пространства теперь дополнительно должны канонически присутствовать структуры векторного пространства и сопряжённого с пространством $\mathcal{H}_\gamma$ пространства линейных измеримых функционалов E'_γ. В наших естественных терминах канонически определяемое гауссовское пространство Лебега–Рохлина определяется неоднозначно, но “стандартное канонически определяемое гауссовское ЛР-пространство” определяется однозначно.

4.1. Линейность носителя

Гауссовская мера в нашем понимании этого термина – это всегда мера на некотором векторном пространстве, возможно, определённом с точностью до “линейной” $\bmod 0$ эквивалентности. Это означает, что изоморфными считаются такие два линейные пространства с гауссовскими мерами, которые $\bmod 0$ изоморфны как пространства Лебега–Рохлина, причём как линейные пространства они изоморфны после возможного удаления подмножеств нулевой меры, если в результате такого удаления не портится линейная структура. Таким образом, в каждом из этих пространств выделяются изоморфные линейные подпространства полной меры, $\bmod 0$ изоморфные при том же изоморфизме как ЛР-пространства. Результат такой операции можно называть пересечением двух гауссовских исходных ЛР-пространств. Запрет искажать линейную структуру исключает, например, удаление подпространства $\mathcal{H}_\gamma$ (нулевой меры) – гауссовского ядра; при этом все распределения следов линейных функционалов остаются гауссовскими) или хотя бы удаление нулевой точки. (Мы не рассматриваем гауссовские меры на группах). Кроме того, в теории вероятностей понятие гауссовского пространства случайных величин (в других терминах – гауссовского случайного процесса, гауссовской случайной функции на параметрическом множестве) встречается не реже понятия гауссовского бесконечномерного распределения. Поэтому представляется естественным определение произвольной (центрированной) *гауссовской* меры Лебега–Рохлина сформулировать, начав с некоторого стандартного вида векторного пространства $\mathcal{G}_0 \subset L^2(\mathsf{P})$ гауссовских случайных величин, определённых на недискретном пространстве Лебега–Рохлина $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. Любые два таких подпространства одной размерности совмещаются как пространства случайных величин (т.е. с учётом распределений) под воздействием на одно из них оператором, сопряжённым с некоторым автоморфизмом ЛР-пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$.

4.2. Гауссовская линеаризация пространства Лебега–Рохлина

Речь пойдёт о линеаризации (наведении структуры векторного пространства), индуцируемой с помощью выделенного гауссовского подпространства $\mathcal{G}_0 \subset L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ – ортогонального константам подпространства дефекта единица гауссовского хаоса [30] степени 1,

$\mathrm{mod}\,0$ разделяющим точки Ω (т.е. порождаемое семейством функций $\mathcal{G}_0$ измеримое разбиение $\zeta_{\mathcal{G}_0}$ ЛР-пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ – это разбиение ε на точки: $\zeta_{\mathcal{G}_0} = \varepsilon$). Все упомянутые объекты, в том числе само пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ и измеримые разбиения этого вероятностного ЛР-пространства идентифицируются с точностью до $\mathrm{mod}\,0$ эквивалентности (что не касается линейной структуры, всегда определяемой поточечно).

Выполнение условия $\zeta_{\mathcal{G}_0} = \varepsilon$ влечёт максимальность (нерасширяемость) в классе ортогональных константам гауссовских подпространств самого́ гауссовского подпространства $\mathcal{G}_0$, так как возможность расширения в этом классе подпространств гауссовского подпространства $\mathcal{G}_0$ (с сохранением гауссовости) влекла бы существование в таком гауссовском расширении $\widehat{\mathcal{G}_0} \supset \mathcal{G}$ отличного от константы элемента $g' \in \widehat{\mathcal{G}_0}$, ортогонального $\mathcal{G}_0$, т.е. случайной величины g' из $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, независимой относительно расширяемого подпространства $\mathcal{G}_0$, что возможно лишь при условии $g' \notin \mathcal{G}_0$. Итак, речь пойдет о линеаризации пространства Лебега–Рохлина $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ разделяющим $\mathrm{mod}\,0$ точки гауссовским пространством случайных величин $\mathcal{G}_0$ или, что то же самое, определяемым формулой (3) характеристическим функционалом, рассматриваемым на гауссовском пространстве $\mathcal{G}_0$.

4.3. Конечномерный случай

Рассмотрим сперва почти очевидный конечномерный случай. В случае конечномерного подпространства $\mathcal{G}_0 \subset (\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ (пусть $\dim \mathcal{G}_0 = d$), т.е. когда обсуждается возникновение d-мерной гауссовской меры, речь идёт об описании "закона совместного распределения вероятностей значений" случайного d-мерного вектора $\mathcal{G}_0$, значения которого $\mathcal{G}_0(\omega)$ определяются элементом $\omega \in \Omega$, выпадающим в результате разыгрывания эксперимента со случайным исходом $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$. Независимо от размерности $d = \dim \mathcal{G}_0$, распределение $\mathcal{L}(\mathcal{G}_0)$ случайного вектора $\mathcal{G}_0$ (рассматриваемого и как параметрическое множество) можно получить как возникающую по теореме Колмогорова вероятностную меру на цилиндрической σ-алгебре подмножеств векторного пространства $\mathbb{R}^{\mathcal{G}_0}$, задаваемую системой конечномерных распределений *всевозможных* конечных наборов $\bar{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ случайных величин из $\mathcal{G}_0$:

$$\mathcal{L}(g_1, g_2, \ldots, g_n; \mathsf{P}) = \mathsf{P} \circ (g_1, g_2, \ldots, g_n)^{-1}, \tag{14}$$

(иначе говоря, проективным пределом семейства согласованных конечномерных *со свойством* ЛР распределений). Получив меру $\widehat{\gamma}$ на цилиндрической σ-алгебре $\mathfrak{C}$ пространства $E = \mathbb{R}^{\mathcal{G}_0}$, заметим, что эта мера является проективным пределом (согласованной) системы конечномерных распределений, каждое из которых сосредоточено на векторном подпространстве размерности не превосходящей d. Отсюда следует, что найдётся d-мерное векторное подпространство $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{G}_0} \subset \mathbb{R}^{\mathcal{G}_0}$ полной внешней меры, и определяемая тем самым на $\Gamma_{\mathcal{G}_0}$ мера Лебега–Рохлина $\gamma_{\mathcal{G}_0}$ является гауссовской, а линейные на этом гауссовском пространстве (координатные) *функционалы* $g \in \mathcal{G}_0$ и их конечные наборы имеют те же распределения, что и "одноимённые" *элементы* $\mathcal{G}_0$ (т.е. случайные величины) и их конечные наборы относительно меры P.

Ещё проще можно описать $\operatorname{mod} 0$ изоморфное построенному векторному пространству Лебега–Рохлина $(\Gamma, \mathcal{F}, \gamma)$ d-мерное гауссовское вероятностное координатное пространство, выбрав в евклидовом пространстве $\mathcal{G}_0$ ортонормированный в норме L^2 базис $\mathcal{B} = (g_1^0,\ g_2^0, \dots,\ g_d^0)$ и, как это обычно делается при построении совместного распределения нескольких случайных величин, отобразить $\pi_{\mathcal{B}}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Результат не зависит от выбранных версий случайных величин g_k. Образ $\mathsf{P} \circ \pi_{\mathcal{B}}^{-1}$ меры P – искомая гауссовская ЛР-мера $\gamma_{\mathcal{G}_0}$ на d-мерном евклидовом с выделенным базисом векторном пространстве, представленная как произведение стандартных одномерных гауссовских распределений, $\operatorname{mod} 0$ изоморфная мере P и тем самым индуцирующая на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$ структуру конечномерного координатного векторного гауссовского ЛР-пространства. Впрочем, построенное вероятностное пространство автоматически обладает ЛР-свойством как любая вероятностная борелевская мера на конечномерном евклидовом, т.е. польском пространстве. Вместо ортонормированного базиса можно было использовать любой базис или даже любое конечное полное подмножество соответствующего координатного пространства, но использование ортонормированного базиса приводит к стандартной гауссовской мере, что часто даёт большие преимущества.

4.4. Общий случай. Выделение ядра

В бесконечномерном случае рассуждение можно провести почти по такой же схеме. Вложение $\mathcal{G}_0$ в $L^2(\mathsf{P})$ (как и определённый на $\mathcal{G}_0$ характеристический функционал

$$\chi(g) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\|g\|^2_{\mathcal{G}_0})\Big) \tag{15}$$

задают гильбертову норму в пространстве $\mathcal{G}_0$, и если $\mathcal{B} = (g_1^0, g_2^0, \dots)$ – какой-нибудь ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathcal{G}_0$, то ввиду выполнения условия $\zeta_{\mathcal{B}} = \varepsilon$ возникает $\operatorname{mod} 0$ мономорфизм

$$\pi_{\mathcal{B}}\colon (\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P}) \to \mathbb{R}^{\mathcal{B}} \equiv \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \tag{16}$$

образ которого и является канонической (с точностью до гауссовского автоморфизма пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathsf{P})$, т.е. с точностью до ортогонального преобразования гильбертова пространства $\mathcal{G}_0$) векторной гауссовской версией этого *пространства Лебега–Рохлина*. Каноническая в указанном смысле гауссовская линеаризация, которую для ортонормированного базиса можно называть *стандартной*, описывается формулой (7). Другие гауссовские векторные версии получаются, если вместо базиса $\mathcal{B}$ использовать произвольное счётное множество элементов пространства $\mathcal{G}_0$, линейная оболочка которого плотна в $\mathcal{G}_0$. Можно изменить рассуждение, использовав вместо базиса $\mathcal{B}$ всё пространство $\mathcal{G}_0$, однако тогда ЛР-свойство даже в конечномерном случае без дополнительных усилий нарушается.

Покажем теперь, как с помощью рассмотренной модели линеаризации пространства Лебега–Рохлина можно сразу выделить ядро $\mathcal{H}_\gamma \subset \Gamma$ возникающего гауссовского пространства с мерой. Прибавим к пространству $\mathcal{G}_0 \subset L^2(\mathsf{P})$ одномерное пространство констант $\{\lambda \mathbf{1}\}$, в результате чего получаем гауссовский хаос $\mathcal{G}$ степени 1, элементами которого являются всевозможные измеримые *аффинные* функционалы на гауссовском (векторном) пространстве $(\Gamma, \mathcal{F}, \gamma)$. Каждой аффинной функции из хаоса поставим в соответствие её барицентр. Множество таких барицентров и составит ядро нашего гауссовского пространства. Другой способ состоит в использовании того, что барицентр произвольного измеримого подмножества носителя гауссовской меры Γ является элементом ядра $N_\gamma \subset \Gamma$. Это следует из того, что барицентр измеримого подмножества $A \subset \Gamma$ положительной меры по определению барицентра является линейным функционалом на пространстве $\mathcal{G}_0$, а ядро $\mathcal{H}_\gamma$ гауссовской меры находится в канонической двойственности с пространством $\mathcal{G}_0$ и тем самым является пространством, составленным из всех линейных функционалов на $\mathcal{H}_\gamma$.

Определение. *Измеримый функционал ℓ на гауссовском пространстве Лебега–Рохлина называется линейным, если он линеен на некоторой (и тогда на любой) стандартной гауссовской линеаризации этого гауссовского пространства). Подчеркнём, что каждая гауссовская ли-*

неаризация – это поточечно определённое векторное пространство (а не объект, понимаемый с точностью до $\mathrm{mod}\,0$ *эквивалентности).*

Линеен на какой-то линеаризации $\Rightarrow$ определён на ядре $\Rightarrow$ линеен на любой линеаризации.

Пересечение не более, чем счётного числа линеаризаций – снова линеаризация, т.е. гауссова мера на некотором не более, чем счётном произведении прямых, которое можно, не умаляя общности, считать пространством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, снабжённым произведением стандартных гауссовских мер (см. формулу (10)). Пересечение *всех* линеаризаций какого-нибудь гауссовского ЛР-пространства – совпадает с ядром $\mathcal{H}_\gamma$ этого пространства. Действительно, при стандартной линеаризации ЛР-меры любой координатный вектор принадлежит ядру. С другой стороны подходящей линеаризацией каждый единичный вектор ядра можно привести в положение координатного функционала; при любой линеаризации ядро сохраняется. Каждый элемент пространства $\mathcal{H}_\gamma$ соответствует квазиинвариантному сохраняющему тип меры) сдвигу, и поэтому сдвиг меры на такой вектор не изменяет ядра как подпространства. Ядро $\mathcal{H}_\gamma$ – это множество барицентров условных мер на элементах измеримых разбиений.

4.5. О сопряжённых изоморфизмах

Остановимся на понятии *изоморфизм* для бесконечномерных (счётномерных) гауссовых мер. Прежде, чем обсуждать не всегда эквивалентные структуры различных версий гауссовских пространств Лебега–Рохлина, полезно отметить, что для любой такой версии основой всегда служит эллипсоид рассеивания $\mathcal{E}_\gamma \subset \mathcal{H}_\gamma$, который является единичным шаром этого гильбертова пространства. Будет правильным сказать, что эллипсоид рассеивания несёт *полную информацию* о *самой* мере, а всё остальное относится к пространству, несущему эту меру. Построение таких пространств полной меры может как использовать, так и не использовать канонические структуры. Например, гауссова мера в бесконечномерном сепарабельном банаховом пространстве, очевидно, не относится к канонически определяемым гауссовским вероятностным пространствам. В конечномерной ситуации положение дел проще: гауссова центрированная мера в конечномерном банаховом пространстве может рассматриваться как несущая дополнительную банахову структуру канонически определённая гауссова мера соответствующей размерности. У любых двух гауссовских мер Лебега – Рохлина одинаковой размерности их ядра совпадают (изоморфны как гильбертовы пространства). Естественно, из определения канонического построения должно бы вытекать, что с точностью до изоморфизма существует только одно гауссовское бесконечномерное ЛР-пространство, построение которого описано выше. Однако, поскольку изоморфизм линейных структур слишком ограничительное требование, определим изоморфизм гауссовских ЛР-пространств как полный изоморфизм (т.е. изоморфизм всех причастных структур) их *стандартных* линеаризаций. Это определение охватывает и конечномерные гауссовские пространства. Из сказанного выше вытекает и естественное определение морфизма для категории гауссовских пространств, включающей теперь и бесконечномерные гауссовские ЛР-пространства: морфизм гауссовских ЛР-пространств – это морфизм их ядер как гильбертовых пространств. В частности, изоморфизм гауссовских ЛР-пространств индуцирует сопряжённые изоморфизмы соответствующих гауссовских подпространств, но и изоморфизм гауссовских пространств случайных величин (таких, как $\mathcal{G}_0$), разделяющих точки, индуцирует $\operatorname{mod} 0$ изоморфизм пространств Лебега–Рохлина, на которых определены эти случайные величины. Это следует из известной теоремы о взаимодействии изоморфизмов гауссовских пространств $\mathcal{G}_0'$ и $\mathcal{G}_0''$ с одной стороны и сопряжённых с ними $\operatorname{mod} 0$ изоморфизмов их ЛР-пространств с вероятностной мерой. Из этой теоремы единственности вытекает, что можно изучать какую-нибудь одну версию, например, произведение счётного числа одномерных стандартных гауссовских мер, где сразу видно, что координатные функционалы определены полностью на векторном пространстве Лебега–Рохлина полной меры (на всём пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

Теорема о сопряжённых изоморфизмах верна не только в обсуждавшемся выше гауссовском варианте. Как известно из теории пространств Лебега–Рохлина, для двух разделяющих точки пространств E' и E'' измеримых функций на пространствах Лебега–Рохлина изоморфизм этих пространств, сохраняющих распределения соотносимых друг с другом функций, сопряжён с $\operatorname{mod} 0$ изоморфизмом этих пространств Лебега–Рохлина. Для гауссовых пространств одинаковой размерности получается, что все они в этом смысле изоморфны друг другу и как пространства *гауссовских функций*, и – сопряжённым образом – $\operatorname{mod} 0$ как пространства функций на изоморфных пространствах Лебега–Рохлина. Действительно, выбрав в каком-нибудь гауссовском сепарабельном пространстве функций $\mathcal{G}_0$ ортонормированный базис (или, что то же самое, рассматривая в качестве версии пространства Лебега–Рохлина произведение стандартных гауссовских мер в количестве, равном размерности $\mathcal{G}_0$, т.е. конечном или счётном), мы можем рассматривать это пространство $\mathcal{G}_0$ как пространство, полученное замыканием линейной оболочки координатных функционалов, гауссовских функций относительно произведения стандартных гауссовских мер, которое является пространством Лебега–Рохлина и одновременно векторным пространством. В силу сказанного, любое той же размерности, что и $\mathcal{G}_0$, гауссовское пространство функций, разделяющее точки, допускает в точности такую же версию. Понятно, что не все элементы $\mathcal{G}_0$ определены в каждой точке пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, но по полному равноправию элементов $\mathcal{G}_0$ с одинаковой нормой для каждого элемента $\mathcal{G}_0$ найдётся такая версия, при которой этот элемент будет определён как линейный функционал на линейном множестве полной меры.

4.6. Определение гауссовской меры, не использующее неканонических структур

Рассмотрим подробнее переход от характеристического функционала к конечномерной гауссовской мере. Пусть $\mathcal{G}_0$ – конечномерное гауссовское пространство, $\mathcal{G}_0 \subset L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, порождающее σ-алгебру $\mathfrak{A}$ (иначе говоря, разделяющее $\operatorname{mod} 0$ точки множества Ω). (Если $\mathcal{G}_0$ не разделяет точки, следует перейти к (неатомическому) факторпространству Ω по разбиению $\zeta_{\mathcal{G}_0}$.) Тем самым $\operatorname{mod} 0$ определена измеримая биекция $\Omega \to \mathcal{G}_0$ в конечномерное векторное пространство $\mathcal{G}$ и, следовательно, в силу биекции, структура векторного пространства задаётся на некоторой версии пространства Лебега–Рохлина $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$. Подобную процедуру можно осуществлять и с бесконечномерным гауссовским подпространством $\mathcal{G}_0 \subset L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ (разделяющим $\operatorname{mod} 0$ точки Ω), совместное распределение конечных комбинаций элементов которого предоставляет характеристическая функция $\chi\colon \mathcal{G}_0 \mapsto \mathbb{C}$ этого подпространства (см. формулу (1)), где $q_\gamma(g)$ – это квадрат $L^2(\mathsf{P})$-нормы элемента $g \in \mathcal{G}_0$.

Представляется весьма естественным определение гауссовского бесконечномерного распределения, начинающееся с рассмотрения какого-нибудь замкнутого гауссовского подпространства $\mathcal{G}_0$ пространства $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, порождающего σ-алгебру $\mathfrak{A}$, где вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ *предполагается пространством Лебега–Рохлина.* Как (в более общей ситуации) доказывается в теории пространств Лебега–Рохлина, с группой автоморфизмов гауссовского гильбертова пространства $\mathcal{G}_0$ (группой ортогональных операторов) сопряжена группа автоморфизмов специального вида ("гауссовские автоморфизмы") пространства Лебега–Рохлина $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$. В конечномерном случае гауссовские автоморфизмы векторного пространства с гауссовской мерой – это ортогональные операторы (сопряженные с ортогональными операторами, действующими в сопряженном евклидовом пространстве).

Особенность рассматриваемого бесконечномерного случая состоит в том, что оператор, сопряженный с ортогональным оператором в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_0$, должен действовать в *векторном пространстве E с гауссовской мерой*, которое как пространство с мерой $\mathrm{mod}\,0$ канонически изоморфно исходному пространству $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$, т.е. наделено дополнительно структурой пространства Лебега– Рохлина и определено с точностью до $\mathrm{mod}\,0$ эквивалентности. Выберем конкретную удобную для нас версию пространства E. Для этого в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}_0$ выберем какой-нибудь ортонормированный базис $(g_1,\ g_2, \dots)$. Естественным образом выбор ортогонального базиса в $\mathcal{G}_0$ (состоящего из независимых случайных величин) вкладывает пространство Ω в векторное пространство $\Gamma = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, причём мера P превращается $\mathrm{mod}\,0$ в произведение $\gamma^0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ последовательности стандартных одномерных гауссовских мер γ^0.

Поточечно (независимо от версии) определено ядро $\mathcal{H}_\gamma \subset \Gamma$ как подмножество линейной версии. Координатные функционалы такого пространства Γ определены на каждом элементе векторного пространства Γ, т.е. линейны на линейном множестве полной меры. Поскольку каждую точку g пространства $\mathcal{G}_0$ гауссовских случайных величин после умножения на нормирующий множитель можно считать одним из элементов некоторого ортонормированного базиса, видно, что измеримый линейный функционал, аннулирующийся на ядре $\mathcal{H}_\gamma \subset \Gamma$, эквивалентен чисто нулевому функционалу. Это означает, что *каждый измеримый линейный на линейном подмножестве полной меры функционал определяется своими значениями на ядре.* И наоборот, *каждый линейный непрерывный функционал на ядре имеет* $\mathrm{mod}\,0$ *единственное измеримое продолжение на всё линеаризованное пространство Лебега–Рохлина* $(\Gamma, \mathfrak{F}, \gamma)$.

Можно доказать и более сильное утверждение, относящееся к не обязательно предполагающимся измеримыми линейным функционалам.

Теорема 1 (Теорема о единственности линейного продолжения).

Пусть ℓ – линейная функция на (векторном) гауссовском пространстве Лебега– Рохлина, аннулирующаяся на ядре $\mathcal{H}_\gamma \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ этого пространства. Тогда ℓ измерима и равна нулю почти всюду.

Доказательство. Рассмотрим нашу гауссовскую меру и фиксируем аннулятор N_ℓ функции ℓ. Пусть $\hat{\omega}$ произвольный элемент пространства с мерой, не принадлежащий гиперплоскости $\{\ell = 0\}$. Пусть $\hat{\ell} = \mathrm{span}\,(\hat{\omega})$. Рассмотрим разбиение $\zeta_{\hat{\omega}}$ пространства с мерой на прямые, параллельные прямой $\hat{\ell}$ и докажем, что оно измеримо. Действительно, оно является пределом последовательности измельчающихся измеримых разбиений. Функция ℓ линейна на прямой $\hat{\ell}$. Чтобы теперь доказать теорему о продолжении, докажем, что фактически $\zeta_{\hat{\omega}} = \varepsilon$. С этой целью докажем, что условные меры на элементах разбиения $\zeta_{\hat{\omega}}$ суть δ-меры. Воспользуемся формулой (8), описывающей условные меры на элементах разбиения ζ_{rad}, и получим, что на почти каждом элементе разбиения $\zeta_{\hat{\omega}}$ содержится не более одной точки, удовлетворяющей соотношению (8). Тем самым оказывается, что подмножество $\ell^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ имеет нулевую меру, т.е.

$$\gamma^0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \circ \ell^{-1} = \delta_0. \tag{17}$$

□

Очень интересно отметить, что для упоминавшихся ранее определений гауссовской меры, предполагавших использование *неканонических структур* и не отождествлявших $\mathrm{mod}\,0$ изоморфных пространств с мерой, аналог только что доказанной теоремы *не верен*, как это показал Х. ф. Вайцзеккер (H. v. Weizsäcker). Дело в том, что при определении гауссовой меры на ЛР-пространстве почти каждый элемент этого пространства (кроме элементов, принадлежащих $\mathcal{H}_\gamma$) "необязателен" и может быть удалён переходом к не содержащему этот элемент векторному подпространству полной меры, между тем как из банахова пространства "элемента не выкинешь", тем более, что для сохранения линейности пространства элемент пришлось бы выкидывать вместе с дополнением к некоторому измеримому подпространству дефекта единица.

Теорема (Х. ф. Вайцзеккер). *В предположении справедливости канторовской гипотезы континуума для каждой гауссовой меры γ на сепарабельном банаховом пространстве X с бесконечномерным ядром* *этой меры $\mathcal{H}_\gamma \subset X$ существует такой γ-неизмеримый линейный функционал ℓ на X, что $\mathcal{H}_\gamma \subset \{\ell = 0\}$.*

Иначе говоря, продолжение с сохранением линейности на всё пространство X линейного непрерывного функционала, заданного на бесконечномерном ядре $\mathcal{H}_\gamma$ гауссовой меры, всегда *неединственно.*

Доказательство Теоремы Вайцзеккера. (Передано в редакцию профессором Вайцзеккером.) Без доказательства принимаем, что для каждого конечного подмножества $F \subset X$ линейная оболочка F и $\mathcal{H}_\gamma$ имеет нулевую γ-меру.[2] По свойству счётной аддитивности аналогичное утверждение справедливо и для счётного F. Можно считать X сепарабельным. Мощность множества компактных подмножеств пространства X равна мощности континуума, т.е. согласно канторовой континуум-гипотезе первой несчётной мощности. Поэтому мы можем перенумеровать все компактные подмножества положительной γ-меры как $\{K_\alpha\}$, где α пробегает множество всех счётных порядковых чисел. Используя трансфинитную индукцию, выберем такие векторы x_α, $y_\alpha \in K_\alpha$, что

$$\begin{cases} x_\alpha \notin L_\alpha \\ y_\alpha \notin \operatorname{lin}(L_\alpha \cup \{x_\alpha\}), \end{cases} \tag{18}$$

где L_α – линейная оболочка множеств $\mathcal{H}_\gamma$ и $\{x_\beta, y_\beta\}_{\beta<\alpha}$. Это возможно, так как множества L_α и линейные оболочки множеств $(\mathcal{L}_\alpha \cup \{y_\alpha\})$ имеют нулевую меру и поэтому не содержат K_α, поскольку $\gamma(K_\alpha) > 0$ Дополним теперь множество $\{x_\alpha, y_\alpha\}_\alpha$ до алгебраического базиса $\mathcal{B}$ пространства X, содержащего в качестве подмножества алгебраический базис пространства $\mathcal{H}_\gamma$. Теперь мы можем определить ℓ, произвольно выбирая вещественные значения этого линейного функционала на элементах базиса. Для $b \in \mathcal{B}$ мы полагаем

$$\ell(b) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad b = y_\alpha \text{ для некоторого } \ \alpha \\ 0 & \text{если} \quad b \neq y_\alpha \text{ для всех } \ \alpha. \end{cases} \tag{19}$$

В частности $\ell(h) = 0$ для всех $h \in \mathcal{H}_\gamma$. Функционал ℓ не может быть измеримым: оба множества $\{\ell(\omega) = 0\}$ и $\{\ell(\omega) = 1\}$ имеют непустое пересечение с каждым K_α и, следовательно, с каждым измеримым множеством положительной γ-меры. Тем самым они оба имеют внешнюю меру 1 по мере γ. Поскольку они дизъюнктны, они не γ-измеримы. □

[2] См., например, [12, 3.9.15, с. 146] – В.С.

Литература

1. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* — Труды МИАН **CXLI** (1976), 1–181.
2. В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры.* — Мат. сб. **25(67)**, No. 2 (1949), 107–150.
3. В. А. Рохлин, *Избранные работы.* — МЦНМО, ВКМ, НМУ (1999), 1–196.
4. Н. Мартин, Дж. Ингленд, *Математическая теория энтропии.* Мир, М. (1988).
5. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория.* Наука, М., 1980.
6. В. И. Богачёв, *Основы теории меры.* Т. 2, R&C Москва–Ижевск, 2003.
7. N. Bourbaki, `xiii Éléments de mathématique. Intégration`. Chap. 1, 2, 3 et 4, *Mesures sur les espsces localement compacts.* Hermann, Paris (1965), pp. 1–283;
8. А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей.* 2-е изд. Наука, М., 1974.
9. V. Sudakov, *Gaussian Measures. A Brief Survey.* — Rendiconti dell'Istituto di matematica dell'Universita di Trieste vol. XXVI, 1994, Supplemento. Edizioni LINT Trieste (1994), pp. 289–325.
10. В. Н. Судаков, *Гауссовские случайные процессы и меры телесных углов в гильбертовом пространстве.* — ДАН СССР **197**, No. 1 (1971), 43–45.
11. В. И. Богачёв, *Гауссовские меры.* Наука, Физматгиз, М., 1997.
12. M. Talagrand, *Mesures Gaussiennes sur un espace localement convexe.* — Z. Warscheinlichkeitstheorie und verw. Geb. B. **64** (1983), 181–209.
13. P. R. Halmos. J. v. Neumann, *Operator measures in classical mechanics.* II. — Ann. Math. **33** (1932), 582.
14. W. Amrosse, P. R. Halmos. S. Kakutani, *The decompositions of measures.* II. — Duke Math. J. **9** (1942), 29–32.
15. P. R. Halmos, *On a theorem of Dieudonne.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35**, No. 1 (1949), 38–42.
16. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* ТВiМС, Киев, 1995.
17. А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия.* Наука, М., 1986.
18. В. Н. Судаков, Б. С. Цирельсон, *Экстремальные свойства полупространств для сферически инвариантных мер.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **41** (1974), 14.
19. B. Cirel'son, I. Ibragimov, V. Sudakov, *Norms of Gaussian sample functions.* — Lect. Notes Math. **550**, In: Proc. of the third Japan–USSR Symp. on Probability Theory, Springer-Verlag (1976), pp. 20–41.
20. T. Byczkowsu, *RKHS for Gaussian Measures on Metric Vector Spaces.* — Bull. of the Polish Academy of Sciences, Mathematics **35**, No. 1–2 (1987), 93–104.
21. Б. С. Цирельсон, *Естественная модификация случайного процесса и её приложения.* — Зап. научн. семин. **55** (1978), 35–63.
22. В. Н. Судаков, *Замечания о модификациях случайных процессов.* — Зап. научн. семин. **194** (1992), 150–169.
23. В. Г. Винокуров, Б. А. Рубинштейн, А. Л. Фёдоров, *Пространство Лебега и его измеримые разбиения.* Ташкент, ТашГУ, 1985.

24. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские случайные процессы.* Наука, М., 1970.
25. В. И. Богачёв, *Основы теории меры.* Т. 1, R&C Москва–Ижевск. 2003.
26. Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей.* Мир, М., 1969.
27. J. Neveu, *Processus aléatoires Gaussiens.* — Université de Montréal (1971), 1–228.
28. Х.-С. Го, *Гауссовские меры в банаховых пространствах.* Мир, М., 1979.
29. X. Fernique, *Regularite des traéctoires des fonctuons aléatoires Gaussiennes.* — Lect. Notes Math. **480**, Ecole dété de probabilityés Springer-Verlag (1975).
30. M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces.* Springer-Verlag, 1991.

Sudakov V. N. Weizsäcker phenomenon and Gaussian Lebesgue–Rokhlin space.

The notion of “Gaussian Lebesgue–Rokhlin space” is introduced. The definition is canonical, i.e., is given without use of topological and others irrelevant mathematical structures. The object under discussion completes the cathegoty of finite-dimensional Gaussian vector spaces. Some non-trivial examples are considered and historical comments are given.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: sudakov@pdmi.ras.ru

Поступило 10 декабря 2008 г.