В.Е.Корепин

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОКРЫТИЯ И КВАЗИКРИСТАЛЛЫ

I. Введение.

Речь пойдет о покрытии евклидова пространства с помощью конечного числа многогранников (без пересечений). Причем это покрытие не является периодическим (не переходит в себя ни при каких сдвигах). Однако любая конечная часть покрытия встречается во всем покрытии бесконечное количество раз. Это свойство естественно назвать локальным изоморфизмом Конвэя (J. Conway). Иногда эти покрытия обладают дополнительными симметриями. Прежде всего, может существовать дискретная группа поворотов, переводящая покрытие в себя. Разрешенный набор таких дискретных групп в случае квазипериодических покрытий шире, чем соответствующий набор в случае периодических покрытий. Например, в случае R^3 дискретные группы периодических покрытий не могут содержать элементов пятого порядка [I], а дискретные группы квазипериодических покрытий-могут [2 - 9]. Другой возможный тип симметрии квазипериодических покрытий-это инфляция и дефляция. Оказывается, что исходные многогранники (которыми покрыто R^n) можно разрезать на части и из этих частей склеить новые многогранники (не меняя их положения в пространстве) так, что получится новое покрытие пространства, отличающееся от старого лишь растяжением масштаба [2 - 4].

Впервые интерес к квазипериодическим покрытиям возник в рамках математической логики [I0]. После того как Пенроуз открыл непериодическое покрытие плоскости ромбами и другими фигурами (например, двумя "цыплятами") [2 - 4], интерес сместился в сторону геометрических аспектов проблемы. Важную роль в теории квазипериодических покрытий сыграли J. Conway [4] и N.G. de Bruijn [5]. В работе [5] было показано, что квазипериодические покрытия получаются из периодических при проектировании из пространства большого числа измерений. При этом оказалось, что действие модулярной группы $GL(n, \mathbb{Z})$ решетки Γ в R^n после проектирования приводит к появлению группы инфляций [I3]. В работе [6, 7] было построено квазипериодическое покрытие трехмерного пространства с помощью двух ромбоидов (параллелепипедов специального вида), было показано, что оно получается проектированием. Повороты, относительно которых это покрытие переходит в себя, составляют группу икосаэдра. Отметим, что обычные кристаллы, ко-

торые представляют собой периодическое покрытие пространства, не могут обладать икосаэдрической группой [I]. Большую роль сыграло экспериментальное открытие сплава $Al_{0.86}\,Mn_{0.14}$ [II], обладающего икосаэдрической симметрией. В работах [8, 9] было предложено теоретическое объяснение структуры этого сплава с помощью проектирования из шестимерного пространства. В работе [7] метод проектирования применялся также для квазипериодического покрытия пространства большего числа измерений R^n. В работах [I2, I3] была подробно изучена структура икосаэдрического покрытия и его преобразования Фурье с помощью проектирования, локальный изоморфизм Конвэя получил свое объяснение в рамках метода проектирования.

Поясним основную идею настоящей работы. Пусть Γ – решетка в R^n, рассмотрим фундаментальную область F (ф.о.), которая является связанным многогранником. Пусть E_m – это m-мерное подпространство в R^n, оно покрыто многогранниками $\mathcal{M}_g = E_m \cap F(\gamma)$ (пересечение ф.о. с E_m). Это покрытие образует сетку G, дуальную к квазипериодическому покрытию Q. Возьмем вершину многогранника $\mathcal{M}_g$ и рассмотрим все многогранники $\widetilde{\mathcal{M}}_g$, смежные по данной вершине. Каждому из этих многогранников соответствует ровно одна точка решетки γ. (Многограннику соответствует фундаментальная область F, а она содержит одну точку решетки.) Спроектируем эти точки на E_m и натянем на их проекции выпуклую оболочку. Образуется многогранник $\mathcal{M}_g$ – квазипериодического покрытия Q. Если проделать это со всеми вершинами сетки G (все вершины многогранников $\mathcal{M}_g$), то получится квазипериодическое покрытие Q пространства E_m. Таким образом можно, например, обобщить Пенроузовские покрытия плоскости. Пенроуз покрывал плоскость с помощью двух специальных ромбов с углами $\pi/5$ и $2\pi/5$. Это покрытие можно обобщить на покрытие плоскости следующим набором параллелограммов. Пусть $\{\vec{d}_j\}$, $j=1,2,\dots,n$ $(n>2)$ – набор непараллельных друг другу векторов на плоскости. На каждую пару векторов $\vec{d}_k, \vec{d}_\ell$ можно натянуть параллелограмм

$$F_2 = \lambda_k \vec{d}_k + \lambda_\ell \vec{d}_\ell\,, \quad 0 \leq \lambda_{k,\ell} < 1. \qquad (I.I)$$

Здесь λ_k и λ_ℓ вещественные числа. Фиксированный набор векторов определяет C_n^2 параллелограммов. Оказывается, что этим набором можно покрыть всю плоскость без пересечений квазипериодическим образом. Ромбы Пенроуза получаются в следующем

частном случае: возьмем пять векторов на плоскости вида $\sqrt{5}$. Они порождают 10 параллелограммов. С помощью сдвигов и поворотов они сводятся только к двум различным ромбам. Это и есть ромбы Пенроуза [5] (каждый из них встречается в 5-ти различных ориентациях). Следует отметить, что стороны параллелограммов (I.I), с помощью которых осуществляется покрытие, можно искривить (оставляя на месте вершины параллелограммов и параллельность сторон) см.рис.I

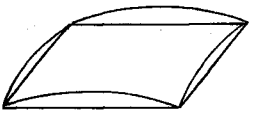

Рис.I

Такими криволинейными параллелограммами так же можно покрыть плоскость. Возможно, это путь к объяснению "цыплят".

Аналогичную конструкцию можно предъявить и в трехмерном пространстве. Сплав *Al Mn* представляет собой покрытие трехмерного пространства двумя ромбоидами (ромбоид - параллелепипед, у которого все грани являются одинаковыми ромбами). Ниже показано, что это покрытие можно обобщить на покрытие трехмерного пространства следующим набором параллелопипедов. Пусть $\{\vec{d}_j\}$, $j=1,2,\dots,n$ $(n>3)$ набор параллельных векторов в пространстве. На каждую тройку векторов $\vec{d}_k, \vec{d}_\ell, \vec{d}_j$ можно натянуть параллелепипед

$$F_3 = \lambda_k \vec{d}_k + \lambda_\ell \vec{d}_\ell + \lambda_j \vec{d}_j, \quad 0 \le \lambda_{k,\ell,j} < 1. \qquad (I.2)$$

Здесь $\lambda_k, \lambda_\ell, \lambda_j$ вещественные числа. Указанный набор векторов порождает C_n^3, вообще говоря, различных параллелепипедов. С помощью этого набора можно осуществить квазипериодическое покрытие пространства. Ромбоиды Маккэя получаются в следующем частном случае. Рассмотрим I2 единичных векторов, направленных из центра икосаэдра в его вершины. Они идут парами. В каждой паре векторы отличаются только знаком. Из каждой пары выберем по одному вектору. Эти шесть векторов порождают 20 параллелепипедов, с помощью сдвигов и повротов они сводятся к двум ромбоидам Маккэя [I3] . Каждый из ромбоидов встречается в десяти различных ориентациях, что приводит к появлению икосаэдрической группы поворотов. Отметим, что параллелепипеды (I.2) так же можно непре-

рывно деформировать, сохраняя вершины и параллельность всех граней.

Эта конструкция переносится и на пространство большего числа измерений. Евклидово пространство R^m может быть покрыто (квазипериодическим образом) с помощью набора C_n^m m-мерных параллелепипедов (параллелотопов). Эти параллелотопы порождаются набором n векторов $(n>m)$ в пространстве R^m $\{\vec{d}_j\}$, $j=1,\dots,n$. Каждый из параллелотопов F_m натягивается на некоторые m векторов, например,

$$F_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{d}_j, \quad 0 \le \lambda_j < 1. \tag{I.3}$$

Отметим, что этим набором параллелотопов можно покрыть пространство R^m не единственным способом. Существуют бесконечно много квазипериодических покрытий с помощью данного набора параллелотопов.

Сделаем другое замечание: в случае $n=m$ мы получаем покрытие пространства R^m с помощью одного параллелотопа, которое несомненно является периодическим и представляет собой обычную решетку (кристалл). Ниже квазипериодические покрытия мы будем называть Q - покрытиями.

В § 2 приведены некоторые свойства периодических покрытий, которые будут использоваться при проектировании. В § 3 строится квазипериодическое покрытие прямой. в § 4 строится квазипериодическое покрытие плоскости. В § 5 строится квазипериодическое покрытие пространства. В § 6 обсуждаются свойства этих покрытий.

2. Периодические покрытия.

Рассмотрим n - мерное евклидово пространство R^n. Пусть $\{\vec{e}_j\}$, $j=1,\dots,n$ набор n линейно независимых векторов в этом пространстве. Рассмотрим всевозможные целочисленные линейные комбинации этих векторов

$$\vec{\gamma} = \sum_{j=1}^{n} n_j \vec{e}_j. \tag{2.I}$$

Они и составляют решетку $\Gamma = \{\vec{\gamma}\}$. Здесь n_j - набор целых чисел. Вектор $\vec{\gamma}$ (2.I) будем называть вектором решетки. Проведем координатные гиперплоскости $P_K(n)$:

$$P_K(n) = n e_K + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq K}}^{n} r_j e_j . \qquad (2.2)$$

Здесь n - целое число (фиксированное), r_j - вещественные числа. По мере того, как r_j независимо изменяется по вещественной оси, вектор в правой части (2.2) пробегает всю плоскость $P_K(n)$. Размерность этой гиперплоскости равна $(n-1)$ (коразмерность I). Изменяя целое число n, мы получим систему параллельных гиперплоскостей. Ориентация гиперплоскости $P_K(n)$ задается вектором $\vec{e}_K$, не принадлежащим к ней. Пересечение двух различных гиперплоскостей $P_{K_1}(n_1)$ и $P_{K_2}(n_2)$ дает гиперплоскость $P_{K_1 K_2}(n_1, n_2)$ размерности $(n-2)$ (коразмерности 2):

$$P_{K_1 K_2}(n_1, n_2) = P_{K_1}(n_1) \cap P_{K_2}(n_2) = n_1 \vec{e}_{K_1} + n_2 \vec{e}_{K_2} + \sum_{j \neq K_1, K_2} r_j \vec{e}_j . \qquad (2.3)$$

Ее ориентация задается двумя векторами $\vec{e}_{K_1}$ и $\vec{e}_{K_2}$. При пересечении m различных гиперплоскостей, образется гиперплоскость размерности $n-m$, (коразмерности m) $P_{\{K_\ell\}}(\{n_\ell\})$, $\ell = 1, \ldots, m$:

$$P_{\{K_\ell\}}(\{n_\ell\}) = \bigcap_{\ell} P_{K_\ell}(n_\ell) = \sum_{\ell=1}^{m} n_\ell \vec{e}_{K_\ell} + \sum_{j \neq 1, \ldots, m} r_j \vec{e}_j . \qquad (2.4)$$

Ее ориентация задается набором m векторов $\vec{e}_\ell$.

Вернемся к системе гиперплоскостей размерности $(n-1)$, рассмотрим всевозможные такие плоскости (2.2). Они рассекают все пространство R^n на объединение параллелотопов (n - мерных), которые сдвигами на векторы решетки (2.I) сводятся к стандартному параллелотопу:

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{e}_j , \quad 0 \leq \lambda_j < 1 . \qquad (2.5)$$

Чтобы покрыть такими параллелотопами все R^n следует сдвигать их на векторы решетки

$$F_n(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{e}_j + \vec{\gamma} . \qquad (2.6)$$

Параллелотоп имеет 2^n - вершин и $2n$ - граней размерности $n-1$. Из них можно выбрать n непараллельных граней. Отметим, что все грани параллелотопа (2.5) (любой размерности) так же являются параллелотопами (в дальнейшем именно это будет использоваться для квазипериодического покрытия). Итак, рассмотрим грань параллелотопа коразмерности I. Ее ориентация задается одним вектором, она является параллелотопом размерности $(n-1)$. Ниже мы будем рассматривать пары таких граней, пересекающихся по грани коразмерности 2 (параллелотоп размерности $n-2$). Важны будут так же наборы из m граней (коразмерности I), пересекающихся по грани коразмерности m ($n-m$ -мерный параллелотоп).

Отметим, что параллелотоп (2.5) является фундаментальной областью (ф.о.). Сдвиги F_n на все вектора решетки (2.I) однократно покрывают все R^n. Это определение ф.о. Фундаментальную область можно выбрать и по-другому. Например, область Дирихле-Вороного [I]. Это набор точек R^n, которые ближе к данной точке решетки $\vec{\gamma}$, чем к остальным точкам решетки. Важную роль играют локально-конечные фундаментальные области. Они определяются так. Замкнем все ф.о., однократно покрывающие R^n (т.е. перейдем от F к $\bar{F}$). Замыкания ф.о. пересекаются друг с другом (по граням меньшей размерности). Зафиксируем $\bar{F}$ и сосчитаем число других $\bar{F}(\vec{\gamma})$, пересекающихся с ней. Если это число N конечно, то ф.о. является локально конечной. Существует конечный набор векторов решетки, переводящий ф.о. в ее "соседей"

$$(\bar{F}+\vec{h}_j)\cap\bar{F}\neq\emptyset\ ;\quad j=1,\dots,N. \qquad (2.7)$$
$$\vec{h}_j\in\Gamma$$

Особенно интересны будут связанные локально-конечные ф.о., являющиеся многогранниками. Важное свойство ф.о. состоит в том, что они содержат ровно одну точку решетки Γ [I4]. Например, параллелотоп (2.5) содержит 0 - это единственная точка решетки. Это позволит ввести функцию

$$\vec{\gamma}(F)\ ,\quad \vec{\gamma}(F)\in F, \qquad (2.8)$$

сопоставляющую точку решетки $\vec{\gamma}$ данной ф.о.. Мы будем использовать так же и обратную функцию

$$F(\vec{\gamma}), \qquad (2.9)$$

сопоставляющую ф.о. данной точке решетки $\vec{\gamma}$. (При этом $\vec{\gamma} \in F(\vec{\gamma})$.) Это будет использоваться при построении Q - покрытий.

Отметим, что параллелотоп (2.5) можно искривить, оставив его фундаментальной областью. Для этого зафиксируем положение всех вершин параллелотопа (2.5) и непрерывно деформируем n - непараллельных граней (размерности $(n-1)$), остальные n - граней получим, сдвигая построенные грани на один из векторов $\vec{e}_j$ (не принадлежащий данной грани). В двумерном случае так получится криволинейный параллелограмм (см.рис.I). Аналогичную конструкцию мы применим в случае квазирешеток.

Важную роль в дальнейшем будет играть замыкание параллелотопа (2.5) ("прямолинейного")

$$\bar{F}_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{e}_j \; ; \quad 0 \leqslant \lambda_j < 1. \tag{2.I0}$$

Набор векторов $\vec{h}_j$ (см.(2.7)) ,переводящий эту ф.о. в ее "соседей", следующий

$$\vec{h}_j = \{\vec{e}_j, -\vec{e}_j\}. \tag{2.II}$$

Замыкания параллелотопов пересекаются между собой по граням меньшей размерности. Рассмотрим, например, два $\bar{F}_n$ (см.(2.I0)),пересекающиеся между собой по грани размерности $(n-1)$. Такие $\bar{F}_n$ отличаются друг от друга сдвигами на один из векторов $\pm e_j$ см.(2.II). С этими двумя ф.о. естественно связать прямую, пересекающую обе ф.о. и их общую грань (например, она может быть направлена вдоль e_j , но это не обязательно, в § 3 мы рассмотрим другую прямую).

Рассмотрим теперь четыре замыкания ф.о. $\bar{F}_n$, имеющие общую грань размерности $(n-2)$ с.(2.3). Центры этих ф.о. F образуют вершины параллелограмма, натянутого (I.I) на векторы $\vec{e}_{k_1}$ и $\vec{e}_{k_2}$. Сами ф.о. переходят друг в друга при сдвиге на векторы этого параллелограмма. С этими четырьмя ф.о. естественно можно связать плоскость (двумерную), пересекающую все четыре ф.о. и их общую грань (эта плоскость может быть натянута, например, на векторы $\vec{e}_{k_1}$ и $\vec{e}_{k_2}$, но этот выбор не обязателен, в § 4 мы выберем плоскость по-другому).

Рассмотрим теперь 2^m замыканий ф.о. $\bar{F}_n(\gamma)$, имеющих общую грань размерности $(n-m)$ см.(2.6), (2.I0). Центры этих ф.о. образуют вершины параллелотопа, натянутого (I.3) на векторы

$\{\vec{e}_\ell\}$, $\ell=1,\dots,m$, а сами ф.о., переходя друг в друга при сдвигах на векторы этого параллелотопа. С этими 2^m ф.о. можно связать пространство R^m, пересекающее все эти ф.о. и их общую грань (например, R^m можно натянуть на векторы $\vec{e}_\ell$, $\ell=1,\dots,m$, но это не обязательно, в § 5 мы вложим пространство R^m в R^n по-другому.

3. Квазипериодические покрытия прямой.

Мы будем строить покрытия, последовательно повышая размерность пространства. Сначала покроем прямую, потом плоскость, затем пространство. Итак, приступим к покрытию прямой E_1 n различными отрезками. Для этого сначала построим одномерную ломаную линию B_1 в R^n, а затем спроектируем ее на E_1. Сначала мы выберем ориентацию прямой E_1 (на вектор направленный вдоль прямой E_1), а потом можем сместить прямую, не меняя ее ориентации (направления вектора E_1). Чтобы зафиксировать направление, проведем прямую E_1 в R^n так, чтобы она пересекалась с решеткой Γ в одной точке (например, в начале координат):

$$\Gamma \cap E_1 = \{0\}. \tag{3.I}$$

Построим теперь ломаную B_1. Сначала укажем счетный набор точек, (вершины ломаной v) через которые она проходит, а потом соединим эти точки отрезками прямой. Рассмотрим те ф.о. (параллелотопы F_n (2.6)), пересечение которых с прямой E_1 не пусто. Каждая из этих ф.о. содержит одну точку решетки $\gamma(F)$, именно через эти точки решетки и будет проходить ломаная B_1

$$v=\gamma(F), \quad F\cap E_1\neq\emptyset. \tag{3.2}$$

Рассмотрим теперь пересечение прямой E_1 с гранью параллелотопа, коразмерности I. Прямая пересекает также оба параллелотопа, смежных на этой грани. Точки решетки, принадлежащие этим ф.о., соединим вектором, это обязательно будет один из векторов $\{\vec{e}_j\}$ (порождающих решетку) см. § 2 (2.II). Поскольку прямая E_1 пересекает две грани ф.о., то каждая точка решетки на ломаной будет соединена с двумя другими. Ломаная B_1 будет непрерывной. На этом завершается построение ломаной B_1. Каждый из отрезков ломаной будет совпадать с одним из векторов $\vec{e}_j$ (или $-\vec{e}_j$) (с точностью до трансляции на вектор решетки).

Спроектируем теперь ломаную B_1 на прямую $\tilde{E}_1$ (не обяза-

тельно совпадающую с прямой E_1). При этом и получится квазипериодическое покрытие прямой $\tilde{E}_1$ n отрезками. Каждый из отрезков d_j будет проекцией одного из векторов $\vec{e}_j$ $d_j = P(\vec{e}_j)$. Проектировать будем параллельно некоторому $(n-1)$ - мерному подпространству $E'_{(n-1)}$. Наложим на ориентацию этого подпространства следующее требование. Пусть $E'_{(n-1)}$ пересекается с решеткой Γ только в одной точке (например, в нуле):

$$E'_{(n-1} \cap \Gamma = \{0\} . \qquad (3.3)$$

Проектор из R_n на R_1 параллельно $E'_{(n-1)}$ обозначим через P. Этот проектор должен сохранять ориентацию. (Пусть по ломаной B_1 передвигается точка с постоянной скоростью. Проекция этой точки на прямую $\tilde{E}_1$ должна все время передвигаться в одну сторону.) Итак, квазипериодическое покрытие прямой $\tilde{E}_1$ построено. В § 6 исследуются его свойства, доказано отсутствие периодичности и доказан локальный изоморфизм Конвэя.

Следует обратить внимание на узор, который образовался на прямой E_1 от пересечения с системой координатных гиперплоскостей (2.2). Рассмотрим сначала систему параллельных гиперплоскостей с фиксированным k. Пересечение прямой E_1 с этими гиперплоскостями приводит к появлению счетного множества точек на этой прямой, расположенных периодически. Каждая точка - это след от пересечения с $(n-1)$ - мерной гиперплоскостью. Пересечение прямой E_1 с другой системой параллельных гиперплоскостей (с другим k) приведет к появлению нового счетного множества точек, расположенных с другим периодом. Всего возникнет n таких множеств, все (вообще говоря) с разными периодами. У объединения всех этих множеств не будет никакого периода. Назовем это объединение сеткой G_1. Мы рассматриваем ситуацию общего положения, когда все эти точки различны. Сетка дуальна квазипериодическому покрытию. Рассмотрим отрезок между двумя соседними точками сетки (ни одна из внутренних точек отрезка, не является точкой сетки). Это след на прямой E_1 от пересечения с внутренностью некоторой ф.о. F_n. Этой ф.о. принадлежит точка $\gamma(F)$, через которую проходит B_1. После проектирования эта точка превращается в одну из вершин квазипериодического покрытия $v = \gamma(F), F \cap E_1 \neq \emptyset$. Таким образом, отрезки сетки G_1 соответствуют точкам квазипериодического покрытия Q_1, а точки G_1 соответствуют отрезкам Q_1. Действительно, каждая точка G_1 - след от пересечения прямой с $(n-1)$ -

мерной гиперплоскостью. Однако, каждая такая гиперплоскость между двумя ф.о. (через которые проходит прямая) порождает отрезок ломаной B_1 (один из векторов $\vec{e}_j$), который после проектирования превращается в один из отрезков d_j покрытия Q_1 .

Отметим, что при построении Q – покрытий можно заменить параллелотоп (2.5) на произвольную локальноконечную ф.о.. При этом получится покрытие прямое с помощью N отрезков $P(h_j)$ см.(2.7). Правда, каждый из этих отрезков можно разрезать на конечное количество меньших отрезков, так, чтобы получилось покрытие прямой с помощью отрезков $d_j = P(\vec{e}_j)$, построенное выше. Дело в том, что $\vec{h}_j$ – это векторы решетки. (Они равны целочисленным линейным комбинациям векторов $\vec{e}_j$). Это покрытие получается из приведенного выше удалением некоторых вершин. В следующих параграфах схема настоящего параграфа будет применена для Q – покрытия плоскости и пространства.

4. Квазипериодическое покрытие плоскости.

Так же как и в предыдущем параграфе, сначала построим двумерную ломаную поверхность B_2 в R^n , а затем спроектируем ее на плоскость E_2 . Пусть плоскость E_2 пересекается с решеткой Γ только

$$E_2 \cap \Gamma = \{0\} \tag{4.I}$$

в одной точке. (Эту плоскость можно так же сместить параллельно самой себе, не меняя ее ориентации.) Укажем счетный набор точек, через которые проходит ломаная поверхность B_2 . Это вершины поверхности v , $v \in B_2$. Любая ф.о., пересекающаяся с плоскостью E_2 содержит ровно одну точку $\gamma(F)$ решетки:

$$v = \gamma(F), \; F \cap E_2 \neq \emptyset . \tag{4.2}$$

Все эти точки v принадлежат поверхности B_2 .

Рассмотрим пересечение плоскости E_2 с гранью параллелотопа коразмерности I. Две ф.о., смежных по этой грани, также пересекаются с E_2 . Точки решетки, принадлежащие этим ф.о., соединим отрезком прямой (один из векторов $\vec{e}_j$), который так же принадлежит поверхности B_2 по определению.

Рассмотрим пересечение плоскости E_2 с гранью параллелотона коразмерности 2. Плоскость E_2 пересекает при этом и че-

тыре ф.о. $F^{(1,2,3,4)}$, смежных с этой гранью.

(Замыкания этих ф.о. $\bar{F}$ пересекаются по упомянутой грани коразмерности 2.) Точки решетки этих ф.о. $\gamma(F)$ соединены между собой векторами (как объяснено выше). Натянем на эти векторы параллелограмм (I.I). Это мы проделаем с каждой гранью коразмерности 2, пересеченной плоскостью E_2. Таким образом мы построили ломаную поверхность B_2. Ее плоские участки являются параллелограммами. Всего C_n^2 - разных параллелограммов, порожденных векторами $\vec{e}_j$.

Спроектируем теперь эту ломаную поверхность B_2 на плоскость E_2 (или на какую-нибудь другую плоскость $\tilde{E}_2$) параллельно некоторому пространству $E'_{(n-2)}$. Пусть это пространство пересекается с решеткой Γ только в одной точке, например, в нуле

$$\Gamma \cap E'_{(n-2)} = \{0\}. \tag{4.3}$$

Проектор из R^n на E_2 параллельно $E'_{(n-2)}$ обозначим P. Он, как и в случае прямой, должен сохранять ориентацию, введенную на B_2. (Векторы на B_2 и их проекции на E_2 сориентированы одинаково.) При проектировании получится квазипериодическое покрытие Q_2 плоскости E_2 (или $\tilde{E}_2$) с помощью C_n^2 параллелограммов. Параллелограммы порождены n векторами $\vec{d}_j = P(\vec{e}_j)$, являющимися проекциями векторов $\vec{e}_j$. Свойства покрытия исследованы в § 6. Рассмотрим векторы $P(\vec{e}_j) = \vec{d}_j$, порождающие параллелограммы. Сохраняя начальную и конечную точку этих векторов, деформируем их непрерывно, превращая отрезок прямой, в отрезок кривой $C(d_j)$ см.рис.2.

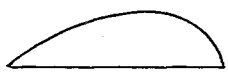

Рис.2

Рассмотрим теперь набор криволинейных параллелограммов (Рис.I), порожденный этими отрезками кривых $C(d_j)$. Ими тоже можно покрыть плоскость квазипериодическим образом, причем покрытие получается из приведенного выше непрерывной деформацией сторон.

Обсудим теперь сетку G_2, дуальную к квазипериодическому покрытию Q_2. Пересечение плоскости E_2 с координатными плоскостями (2.2) приводит к появлению на плоскости системы параллельных линий (они параллельны при фиксированном k см.(2.2)).

Всего возникает n систем параллельных линий, которые рассекают плоскость на многоугольники $\mathcal{M}_g$. Будем считать, что мы провели плоскость E_2 в общем положении так, что в одной точке пересекается не более двух прямых. Внутренность каждого многоугольника $\mathcal{M}_g$ – это пересечение плоскости E_2 с внутренностью фундаментальной области (которой соответствует точка решетки). Эта точка решетки превращается после проектирования в вершину покрытия Q_2. Сторона каждого многоугольника $\mathcal{M}_g$ – это пересечение плоскости E_2 с $(n-1)$ - мерной гранью ф.о., ей соответствует сторона параллелограмма в покрытии Q_2. Вершина каждого многоугольника $\mathcal{M}_g$ – это пересечение плоскости E_2 с $(n-2)$-мерной гранью ф.о., по которой смежны четыре ф.о. $F_n^1, F_n^2, F_n^3, F_n^4$, так же пересекающихся с E_2, см.рис.3

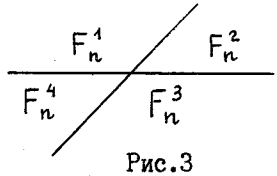

Рис.3

Этой вершине соответствует параллелограмм в Q_2. Дуальность сетки G_2 и покрытия Q_2 – частный случай дуальности двух топологических комплексов.

Преобразование дуальности (переход от сетки к квазипериодическому покрытию) можно использовать для того, чтобы построить квазипериодическое покрытие без проектирования, оперируя только объектами на плоскости. Возьмем на плоскости n векторов и n вещественных чисел q_j. Построим по ним n систем параллельных линий

$$(\vec{x}\,\vec{\varepsilon}_j) + q_j = n_j \,. \tag{4.4}$$

Здесь скобки изначают скалярное произведение, n_j – это n штук независимых целых чисел, каждое из которых изменяется от $-\infty$ до ∞, $\vec{x}$ – координата точки на плоскости. Таким образом мы построили сетку. Внутренности каждого многоугольника соответствуют n целых чисел. Пусть $\vec{x}_0$ – внутренняя точка многоугольника, n целых чисел соответствующих внутренности многоугольника задаются формулой

$$[(\vec{x}_0\,\vec{\varepsilon}_j) + q_j] = n_j \,. \tag{4.5}$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть числа. Вершина ква-

зипериодического покрытия задается формулой $\sum n_j \tilde{\vec{\varepsilon}}_j$ см.(4.5). По каждой стороне сетки G смежны два многоугольника, у которых лишь одно из целых чисел n_j (4.5) отличается на I (остальные совпадают). Соответствующие вершины квазипериодического покрытия соединены одним из векторов $\tilde{\vec{\varepsilon}}_j$. Итак, стороне сетки соответствует сторона квазипериодического покрытия. Вершине сетки соответствует параллелограмм в Q_2.

До сих пор мы рассматривали сетку G_2, образованную прямыми в общем положении. В одной точке не пересекалось более двух прямых. Рассмотрим теперь вырожденный случай, когда в одной точке пересекается три прямых. Этот случай удобно рассматривать как предел невырожденного (см.рис.4)

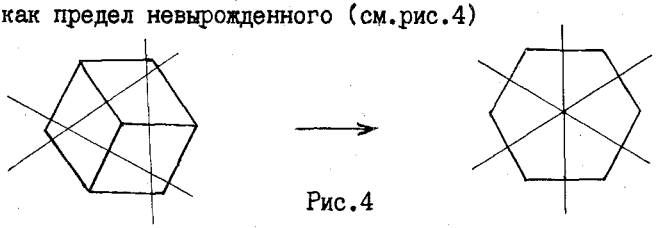

Рис.4

В R_n эта картина соответствует тому, что плоскость E_2 пересекается не с внутренностью ф.о., а лишь с ее гранью меньшей размерности. Пересечению трех линий в одной точке в G_2 соответствует шестиугольник (с параллельными сторонами) в Q_2. Этот шестиугольник получается естественным образом при объединении трех параллелограммов. Можно сказать, что пересечению n линий в одной точке в G соответствует $2n$-угольник в Q. У этого $2n$-угольника стороны попарно параллельны. Вырожденный случай в Q получается из невырожденного выбрасыванием некоторых вершин v.

Вернемся к схеме построения Q-покрытий с помощью проектирования. Заменим параллелотоп в R^n на произвольную локальноконечную ф.о. F. Рассмотрим замыкания этих ф.о. $\bar{F}$. Важную роль играет вопрос о том сколько ф.о. $\bar{F}$ имеют общую грань коразмерности 2. Пусть число этих ф.о. может пробегать значения $m_1,\dots,m_\ell$ (все m_j - целые числа). При построении Q-покрытий с помощью этих ф.о. получится квазипериодическое покрытие E_2 с помощью конечного набора многоугольников (ℓ штук). Это будут m_1-угольник, m_2-угольник, ..., m_ℓ-угольник. У каждого из этих m_j-угольников стороны объединяются в пары. В каждой паре стороны параллельны. Стороны многоугольников - это векторы $P(\vec{h}_j)$ см.(2.7).

Рассмотрим для простоты связанные локальноконечные ф.о., представляющие собой многогранники F. Для них процедуру

построения квазипериодического покрытия Q_2 с помощью проектирования можно сформулировать так. Рассмотрим все пересечения E_2 с $F(\gamma)$. Это многоугольники M_g сетки G_2: $\mathcal{M}_g = E_2 \cap F(\gamma)$. Рассмотрим какую-нибудь вершину одного из многоугольников (это вершина сетки). Рассмотрим все многоугольники смежные по этой вершине. Возьмем точки $\gamma(F)$ решетки, соответствующие этим многоугольникам (многоугольнику соответствует ф.о. $\overset{\circ}{F}$), спроектируем их на E_2 и возьмем их выпукл ую оболочку. Так получится многоугольник покрытия Q_2. Проделаем это со всеми вершинами сетки G_2 и получим покрытие Q_2.

5. Квазипериодическое покрытие пространства.

Обсудим квазипериодическое покрытие m - мерного евклидова пространства E_m. Вложим его в R^n так, чтобы оно пересекалось лишь с

$$E_m \cap \Gamma = \{0\} \tag{5.I}$$

одной точкой решетки . Можно его транслировать, не меняя ориентации. Построим ломаную поверхность B_m. Сначала укажем счетный набор точек, принадлежащий B_m, - вершины поверхности v, потом набор векторов, принадлежащих B_m, затем на эти векторы натянем набор m - мерных параллелотопов, из которых состоит B_m. Рассмотрим ф.о. F_n, которые пересекаются с E_m; точки решетки, принадлежащие этим ф.о., принадлежат B_m по определению (вершины B_m)

$$\{v\} = \{v = \gamma(F) \ \forall \ F \cap E_m \neq \emptyset\}. \tag{5.2}$$

Рассмотрим $(n-1)$ - мерные грани ф.о., пересекающиеся с E_m; по ней смежны две ф.о. (так же пересекающиеся с E_m). Точки решетки этих ф.о. соединим отрезком прямой (один из векторов $\vec{e}_j$). Эти отрезки принадлежат B_m. Рассмотрим грани параллелотопов $b_{(n-m)}$ размерности $(n-m)$. Каждая такая грань принадлежит 2^m различным замыканиям ф.о. $\bar{F}_n(\gamma)$. Пусть

$$E_m \cap b_{(n-m)} \neq \emptyset, \tag{5.3}$$

тогда E_m пересекается и с каждой из $\bar{F}_n(\gamma)$, содержащих $b_{(n-m)}$

. Точки решетки, принадлежащие этим ф.о. $\gamma(F)$, соединены между собой векторами. (Они образуют одномерные грани m - мерного параллелотопа.) Натянем на эти векторы параллелотоп (I.3). Он принадлежит B_m. Поступим так со всеми гранями $b_{(n-m)}$, пересекающимися с E_m. Итак ломаная поверхность B_m построена. Она состоит из C_n^m различных параллелотопов.

Спроектируем эту ломаную поверхность B_m на E_m (или на другое m - мерное пространство $\tilde{E}_m$), получится квазипериодическое покрытие E_m с помощью C_n^m различных параллелотопов, порожденных векторами $\vec{d}_j = P(\vec{e}_j)$. Это покрытие назовем Q_m. Здесь P – проектор из R^n в E_m. Проектировать будем параллельно пространству E'_{n-m}, которое так же обладает свойством

$$E'_{(n-m)} \cap \Gamma = \{0\}. \qquad (5.4)$$

Проектор P должен сохранять ориентацию. Произвольный набор векторов на ломаной поверхности B_m и их проекции должны обладать одинаковой ориентацией. Грани параллелотопов, покрывающих E_m, можно искривить как в предыдущем параграфе.

Полезно обсудить дуальную сетку G_m. След от пересечения E_m с координатной гиперплоскостью решетки Γ см.(2.2) – это $(m-1)$ - мерная гиперплоскость в E_m. Пространство E_m рассечено этими плоскостями на многогранники. Мы предполагаем, что гиперплоскости в общем положении, k - мерная грань многогранника принадлежит не более, чем $(m-k)$ гиперплоскостям. Внутренность каждого многогранника (это пересечение E_m с внутренностью ф.о.) соответствует вершине Q_m квазипериодического покрытия v. Грань многогранника размерности $(m-\ell)$, соответствует ℓ - мерной грани параллелотопов квазипериодического покрытия. Вершины многогранников соответствуют самим m - мерным параллелотопам поверхности B_m. Как легко видеть, при таком сопоставлении включению двух граней разбиения G_m соответствует обратное включение соответствующих граней разбиения Q_m. Это частный случай дуальности двух топологических комплексов. Топологические характеристики разбиения Q_m однозначно фиксируются разбиением G_m. Как и в предыдущем параграфе, сетку можно использовать для построения квазипериодического покрытия без проектирования.

При построении Q- покрытий с помощью схемы проектирования вместо параллелотопа (2.5) можно использовать локально конечную

ф.о. Пусть это будет связанный многогранник F, например область Дирихле-Вороного. Снова вложим E_m в R^n см. (5.I). Рассмотрим сетку G_m - набор многогранников $\mathcal{M}_g$ в E_m. Каждый многогранник - это пересечение E_m с внутренностью $F(\gamma)$, $\mathcal{M}_g = E_m \cap F(\gamma)$. Рассмотрим вершину многогранника $\mathcal{M}_g$. Возьмем все многогранники $\mathcal{M}_g$, имеющие общую вершину. Рассмотрим соответствующие им ф.о. $F(\gamma)$. Спроектируем точки решетки этих ф.о. $v = \gamma(F)$ на E_m. На эти точки натянем выпуклую оболочку. Так получится один из многогранников квазипериодического покрытия Q_m. Проделаем это со всеми вершинами каждого $\mathcal{M}_g$ (т.е. со всеми вершинами G_m), при этом получится квазипериодическое покрытие Q_m.

6. Квазипериодичность.

В этом параграфе мы поясним, почему квазипериодическое покрытие, построенное в § 5, не является периодическим и что любая конечная часть покрытия повторяется во всем покрытии бесконечное количество раз. Для этого спректируем ломаную поверхность B_m на подпространство $E'_{(n-m)}$ параллельно подпространству E_m. Проектор обозначим P'. (Напомним, что проектор из R^n на E_m параллельно $E'_{(n-m)}$ мы обозначим буквой P.) При этом проектировании пространство E_m превращается в точку

$$x = P'(E_m). \tag{6.I}$$

Легко видеть, что проекция B_m на E' равна проекции ф.о. $P'(B_m) = P'(F_n)$ и является компактной. Это некоторый многогранник M в $E'_{(n-m)}$

$$M = P'(B_m) = P'(F_n). \tag{6.2}$$

Рассмотрим проекцию вершин ломаной поверхности B_m на E'; они всюду плотно покрывают многогранник M. Рассмотрим теперь полосу $S = M + E_m$:

$$S = \{\vec{S} \mid \vec{S} = \vec{\mu} + \vec{e},\ \vec{\mu} \in M,\ \vec{e} \in E_m\}. \tag{6.3}$$

Докажем теперь, что все точки решетки Γ, лежащие в полосе $\Gamma \cap S$, принадлежат ломаной поверхности B_m. Напомним, что критерием принадлежности точки решетки к вершинам B_m $\{v\}$ является вопрос о том, пересекается ли ф.о. соответст-

вующая этой точке, с подпространством E_m, $F(\gamma) \cap E_m \neq \emptyset$. При проектировании на $E'_{(n-m)}$ подпространство E_m превращается в точку $x = P'(E_m)$. Вопрос о принадлежности точки решетки γ к вершинам v можно переформулировать в терминах проекции на E'. Это вопрос о том, содержит ли проекция ф.о. данной точки $P'(F(\gamma))$ (она отличается от M (6.I) сдвигом) точку x ($x = P'(E_m)$). Возьмем какую-то точку решетки γ внутри полосы. Спроектируем ее на $E'_{(n-m)}$; точка $P'(\gamma)$ лежит внутри M, это следствие (5.I). Точку $P'(\gamma)$ можно окружить сферой (в E') малого радиуса ε. В этой сфере всюду плотно располагаются точки $P'(v)$ (проекции вершин поверхности B_m). Возьмем какую-нибудь из этих вершин v. Проекция ее ф.о. содержит точку x, $x \in P'(F(v))$. Следовательно, (по непрерывности) и проекция ф.о. точки γ содержит x, $x \in P'(F(\gamma))$ и значит γ является вершиной поверхности B_m, $\gamma = v$. Это показывает, что все точки решетки, принадлежащие полосе S (6.3), являются вершинами поверхности B_m. Скажем по-другому. Рассмотрим $\Gamma \cap S$; ломаная поверхность B_m проходит через все эти точки и ее положение однозначно определено.

Отметим, что набор точек в E_m, $\{P(v)\}$ - вершины Q – покрытия, однозначно фиксирует набор вершин v (точки решетки в R^n). Это следствие того, что $E'_{(n-m)}$ (пространство, вдоль которого проектируем на E_m) может пересекаться лишь с одной точкой решетки. Таким образом, задание Q – покрытия E_m однозначно фиксирует ломаную поверхность B_m. Чтобы доказать, что покрытие $P(B_m)$ не является периодическим, достаточно доказать, что ломаная поверхность B_m не переходит в себя ни при каких сдвигах. Предположим, найдется вектор $\vec{t}$ в R^n такой, что

$$\vec{t} + B_m = B_m. \tag{6.4}$$

Спроектируем это равенство на $E'_{(n-m)}$; т.к. $P'(B_m)$ компактный многогранник, то $P'(\vec{t}) = 0$. Поэтому $\vec{t}$ может быть направлено только вдоль E_m, $\vec{t} = P(\vec{t})$. Следствием (6.4) является

$$v + \vec{t} = v'. \tag{6.5}$$

Вершины B_m должны переходить в вершины при сдвиге, поэтому $\vec{t}$ - вектор решетки $\vec{t} = \vec{\gamma}$. Прямая, проведенная

вдоль $\vec{t}$, пересекает бесконечное множество точек решетки. Это противоречит тому, что $\vec{t} \in E$, поскольку E пересекается с решеткой Γ лишь в одной точке. Итак $\vec{t} = 0$. Поверхность B_m не переходит в себя при сдвигах. Отметим, что набор точек $\{P'(v)\}$ (проекции вершин B_m на E'_m) так же однозначно фиксирует набор $\{v\}$ (и саму B_m). На точках решетки γ проекторы P и P' можно обратить. Существует отображение $\varphi = P(P')^{-1}$, переводящее проекцию вершины из E'_{n-m} в E_m.

Докажем теперь локальный изоморфизм Конвэя. Любая конечная часть покрытия $P(f(B_m))$ повторяется во всем покрытии бесконечное количество раз. Рассмотрим часть ломаной поверхности B_m, которая проектируется на эту конечную часть покрытия. Обозначим эту часть через $f(B_m)$ ($f(v)$ - полный набор вершин, принадлежащих $f(B_m)$) и спроектируем ее на $E'_{(n-m)}$. При этом получится компактное множество $P'(f(B_m))$. В силу направления проектирования (5.I), это компактное множество лежит строго внутри M (6.2). Существует не пустой набор сдвигов в R^n $\{\mathcal{U}\}$, не выводящих $P'(f(B_m))$ из M

$$\mathcal{U} = \{\mathcal{U} \mid P'(f(B_m)) + \mathcal{U} \in M\}. \qquad (6.6)$$

Возьмем какую-нибудь вершину $v_0 \in f(v)$. Найдется вершина поверхности B_m, $v_1 \notin f(v)$ такая, что $P'(v_0) + \mathcal{U} = P'(v_1)$ (следствие того, что $P'(v)$ располагаются всюду плотно в M). Рассмотрим $(P')^{-1}(\mathcal{U})$ - это вектор решетки $(P')^{-1}(\mathcal{U}) = \gamma$. Набор вершин $\tilde{f}(v)$

$$f(v) + (P')^{-1}(\mathcal{U}) = \tilde{f}(v) \qquad (6.7)$$

принадлежит $\Gamma \cap S$, а тем самым принадлежит B_m. Конечная часть ломаной поверхности, опирающаяся на вершины $\tilde{f}(v)$ поверхность $\tilde{f}(B_m) = f(B_m) + (P')^{-1}(\mathcal{U})$, отличается от исходной конечной части $f(B_m)$ лишь сдвигом (т.е. $\tilde{f}$ - это копия f). Проектируя $\tilde{f}(B_m)$ на E_m, получим копию $P(f(B_m))$ конечной части покрытия, сдвинутого на вектор $\varphi(\mathcal{U})$. Это заканчивает доказательство локального изоморфизма Конвэя.

В конце хотелось бы выразить благодарность за дискуссии М.М.Скриганову.

Литература

I. Делоне Б., Падуров Н., Александров А. Математические основы структурного анализа кристаллов., М., I934.

2. Penrose R. Pentaplexity. - Math.Intelligencer, 1979, v.2, p.32-37.

3. Penrose R. The rôle of aestetics in pure and applied mathematical research. - Bull.Inst.Math.Appl., 1974, v.10, N 7/8, p.266-271.

4. Gardner M. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles . - Sci.Am., 1977, v.236, N 1, p.110-121.

5. de Bruijn N.G. Algebraic theory of Peurose's nonperiodic tilings of the plane. - Nederl.Akad.Wetensch.Proc. Ser.A, 1981, v.43, p.39-66.

6. Mackay A.L. Kristallografia 1981, v.26, p.910.

7. Kramer P., Neri R. On Peridic and Nonperidic Space Fillings of E^m Obtained by Projection. - Acta Crystalogr.Sec.A, 1984, v.40, p.580-587.

7. Калугин П.А., Китаев А.Ю., Левитов Л.С. Al Mn -шестимерный кристалл. - Письма в ЖТФ, I986, т.4I, № 3, с.II9-I2I.
Kalugin P.A., Kitayev A.Yu., Levitov L.S. 6-dimensional properties of Al Mn alloy. - J. Physique Lett., 1985, v.46, p.L-601-607.

9. Levine D., Steinhardt P.J. Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures. - Phys.Rev., 1984, v.53, p.2477-2480.

10. Robinson R.M. Seven polygons which permit only nonperiodic tilings of the plane. - Notices.Amer.Math.Soc., 1967, v.14, p.835.

11. Shechtman D., Blech I., Gratia D., Cahn J.W. Mettallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry. - Phys.Rev.Lett., 1984, v.53, p.1951-1953.

12. Elser V. The diffraction pattern of projected structures. - Phys.Rev.B, 1985, v.32, p.4892.

13. Katz A., Duneau M. "Quasiperiodic Patterns and Icosahedral Symmetry" Journal de Physique 1986, v.47, p.181-196.

I4. С к р и г а н о в М.М. Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов. - - Л., I985.

V.E.Korepin. Quasicrystals and quasiperiodic tilings.

The geometrical aspects of quasicrystals are considered. The main attention is paid to the projection method. The important role of the fundamental domain in this method is clarified.