Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 3—5.

УДК 517.944

ВЫРАЖЕНИЕ A^{-1} ЧЕРЕЗ ИТЕРАЦИИ НЕОГРАНИЧЕННОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА A НА АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРАХ

А. В. Бабин

Обозначим через A самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H со всюду плотной областью определения $D(A)$. Потребуем, чтобы при $u \in D(A)$ была выполнена оценка

$$(Au,\ u) \geqslant \rho^2\ (u,\ u), \qquad \rho > 0. \tag{1}$$

В настоящей работе получено выражение $A^{-\varkappa}h$ ($\varkappa \geqslant 1$ целое) через $A^k h$, $k = 0, 1, \ldots$, на множестве векторов, удовлетворяющих условию

$$h \in D(A^k), \qquad \| A^k h \| \leqslant P(k)(2k)!\, R^{-2k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где P — полином. (Как известно, такие векторы называются аналитическими по отношению к оператору $\sqrt{A}$.) Векторы, удовлетворяющие (2), представляют особый интерес в связи с тем, что в случае, когда A — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с аналитическими коэффициентами на компактном многообразии Ω без края, условие (2) эквивалентно аналитичности h на Ω. Выражение A^{-1} через итерации A дает в этом случае явное выражение значения $u(x_0)$ единственного глобального решения дифференциального уравнения $Au = h$ через производные от коэффициентов и правой части уравнения в той же точке x_0. (См. [1], а также примеры, приведенные в конце данной статьи.) Отметим, что применение теории самосопряженных операторов позволило обобщить некоторые результаты [1] на уравнения, не рассматривавшиеся в [1], в частности, на вырождающиеся на границе области эллиптические уравнения.

Если $g \in H$, то выражение $(A^l v, g)$ определяет на $D(A^l)$ линейный функционал, который мы будем обозначать через $A^{l*}g$. Пусть $T_{2\varkappa-1}(t)$ — полином Тейлора степени $2\varkappa - 2$ в нуле функции $\cos t$. Если функции $\chi_\sigma(s)$ $\sigma = 1, 2, \ldots$, одной вещественной переменной удовлетворяют условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |s|)^{2\varkappa-2} |\chi_\sigma(s)|\, ds < \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\sigma(s)\, ds = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} s^{2j} \chi_\sigma(s)\, ds = 0 \tag{3}$$

при $j = 1, \ldots, \varkappa - 1$, то при $h \in D(A^l)$ справедливо тождество

$$(A^{-\varkappa}h, A^{l*}f) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A^{-\varkappa} \cos(s\sqrt{A})\, h\chi_\sigma(s)\, ds, A^{l*}f\right) -$$
$$- \left(\int_{-\infty}^{+\infty} A^{-\varkappa} [\cos(s\sqrt{A}) - T_{2\varkappa-1}(s\sqrt{A})]\, h\chi_\sigma(s)\, ds, A^{l*}f\right).$$

Записав здесь $A^{-\varkappa} \cos(s\sqrt{A})\, h$ в виде спектрального разложения и

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука»
«Функциональный анализ и его приложения», 1977

поменяв затем в первом слагаемом порядок интегрирования по λ и по s, получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $h \in D(A^l)$, последовательность функций χ_σ удовлетворяет условиям* (3) *и условию*

$$\lim_{\sigma\to\infty} \sup_{|\xi|\geqslant\rho} |\tilde{\chi}_\sigma(\xi)| = 0, \quad \text{где} \quad \tilde{\chi}_\sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\xi}\chi_\sigma(s)\,ds, \tag{4}$$

то при всех $f \in H$

$$(A^{-\varkappa}h, A^{l*}f) = -\lim_{\sigma\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\rho^2}^{+\infty} \lambda^{-\varkappa}[\cos(s\sqrt{\lambda}) - T_{2\varkappa-1}(s\sqrt{\lambda})]\,d(E_\lambda A^l h, f)\,\chi_\sigma(s)\,ds.$$

Лемма 2. *Если вектор h удовлетворяет условию* (2), *то функция*

$$(-1)^\varkappa J_\varkappa(s) = \int_{\rho^2}^{+\infty} \lambda^{-\varkappa}[\cos(s\sqrt{\lambda}) - T_{2\varkappa-1}(s\sqrt{\lambda})]\,d(E_\lambda A^l h, f)$$

продолжается до функции переменной $z = s + i\tau$, голоморфной в полосе $|\tau| < R$. При $|z| < R$

$$J_\varkappa(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (A^k h, A^{l*}f)}{(2k+2\varkappa)!} z^{2k+2\varkappa}. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать голоморфность функции $A^{l-\varkappa}\cos(z\sqrt{A})\,h$. Поскольку $|\cos(s+i\tau)|^2 \leqslant \operatorname{ch}^2\tau$, то в силу условия (2) по теореме Фату получаем, что

$$\int_{\rho^2}^{\infty} \lambda^{2\nu} |\cos(s+i\tau)\sqrt{\lambda}|^2\,d(E_\lambda h, h) \leqslant \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^{k+\nu}h\|}{(2k)!}\tau^{2k}\right]^2 < \infty. \tag{6}$$

Поэтому h принадлежит области определения $A^l\cos(z\sqrt{A})$. Голоморфность в полосе $|\tau| < R$ легко непосредственно проверить, воспользовавшись (6) и теоремой Лебега. Формула (5) следует из формулы Тейлора.

Теорема. *Пусть вектор h удовлетворяет условию* (2). *Пусть $\chi_\sigma(s)$ удовлетворяют условиям* (3) *и* (4) *и, кроме того, продолжаются до функций комплексной переменной $z = s + i\tau$, голоморфных в полосе $|\tau| < R$. Тогда решение уравнения $A^\varkappa u = h$ ($\varkappa \geqslant 1$ целое) определяется формулой*

$$(u, A^{l*}f) = (-1)^{\varkappa+1} \lim_{\sigma\to\infty} \lim_{r\to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2b_{2k}(\sigma)\,r^{2k+1}}{(2k+1)!}, \tag{7}$$

где $f \in H$, $l \geqslant 0$,

$$b_k(\sigma) = \frac{d^k}{dw^k}\left[\chi_\sigma J_\varkappa\left(\frac{4R'}{\pi}\operatorname{arc\,th} w\right)\frac{4R'}{\pi(1-w^2)}\right]\Bigg|_{w=0}. \tag{8}$$

Функция $J_\varkappa(z)$ определяется равенством (5), $R' \leqslant R$.

Доказательство. Отображение $\operatorname{th}(\pi z/4R') = w$ конформно переводит полосу $|\operatorname{Im} z| < R'$ в круг $|w| < 1$, а вещественную ось — в интервал $(-1, +1)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\sigma(s) J_\varkappa(s)\,ds = \int_{-1}^{+1} \chi_\sigma J_\varkappa\left(\frac{4R'}{\pi}\operatorname{arc\,th} w\right)\frac{4R'dw}{\pi(1-w^2)}.$$

Так как подынтегральное выражение в правой части голоморфно в круге $|w| < 1$, то формула (7) следует из леммы 1 и формулы Тейлора.

Замечание. В более общем случае, когда выполнена оценка $(Au, u) \geqslant -\rho_1^2(u, u)$, а интервал $|\lambda| < \rho^2$ не содержит точек спектра A,

также имеют место формулы (5), (7), (8). Однако в этом случае на функции χ_σ нужно наложить дополнительное ограничение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \chi_\sigma(s)\,\mathrm{ch}(\rho_1 s)\,ds < \infty$, $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \sup\limits_{\rho\leqslant|\tau|\leqslant\rho_1} |\tilde{\chi}_\sigma(i\tau)| = 0$. Всем ограничениям удовлетворяют, например, функции $\chi_\sigma(s) = \sigma^{-1}\chi_1(\sigma^{-1}s)$, $\tilde{\chi}_1(\xi) = P_\varkappa(\xi)\exp(-\xi^4)$, где полином $P_\varkappa$ степени $2\varkappa - 1$ выбирается так, чтобы были выполнены условия (3). Доказательства проводятся так же, как для положительно определенного оператора.

Приведем примеры уравнений, удовлетворяющих условиям теоремы.

Пример 1. Дифференциальное уравнение в $\mathbf{R}^n$

$$Au(x) = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) + a_0(x)u(x) = h(x), \tag{9}$$

где $\{a_{ij}(x)\}$ — положительно определенная эрмитова матрица, $a_0(x) \geqslant c_0 > 0$. Коэффициенты a_{ij}, a_0 и функция h голоморфны и ограничены в комплексной области $U = \{z = x + iy,\ x, y \in \mathbf{R}^n,\ |y| < d\}$ и $M_h(x) = \sup\limits_{|z|<\delta} |h(x+z)| \in L_2(\mathbf{R}^n)$ при некотором $\delta > 0$. В этом случае $H = L_2(\mathbf{R}^n)$, выполнение условия (2) проверяется при помощи замечания 1.1 работы [1]. В качестве функционала можно взять дельта-функцию $\delta(x - x_0) = A^{l*}f$. (При $l > n/4$ $f \in L_2(\mathbf{R}^n)$.) Формулы (5), (7), (8) дают, таким образом, явное выражение $u(x_0)$ через $A^j h(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots$ Эти формулы локальны, хотя единственное решение $u(x)$ уравнения (9) выделяется глобальным условием принадлежности к пространству Соболева $H_2(\mathbf{R}^n)$, накладывающим ограничения на поведение функции $u(x)$ в бесконечности. Отметим также, что если для двух различных h_1 и h_2 имеют место $A^j h_1(x_0) = A^j h_2(x_0)$, $j = 0, 1, \ldots$, то $u_1(x_0) = u_2(x_0)$.

Пример 2. Вырождающееся уравнение (9), коэффициенты a_{ij} которого образуют положительно определенную матрицу внутри ограниченной области Ω и одновременно обращаются в нуль на ее границе, $a_0(x) \geqslant c_0 > 0$. Предполагается, что a_{ij}, a_0 и h голоморфны в комплексной окрестности замыкания $\overline{\Omega}$ области Ω. (Предполагается также, что оператор A симметричен на множестве бесконечно дифференцируемых в вещественной окрестности Ω функций, т. е. граница достаточно хорошая.) Если x_0 лежит внутри Ω, то в качестве $A^{l*}f$ можно брать $\delta(x - x_0)$.

Приведем пример, показывающий, что не может существовать выражения $A^{-1}h$ через $A^j h$, $j = 0, 1, \ldots$, если в (2) заменить $(2k)!$ на $[(2k)!]^{1+\varepsilon}$. Пусть A — оператор, действующий на функции, периодические с периодом 2π, $Au = -u'' + u$. Очевидно, $A1 = 1$. Как известно [2], при каждом $\varepsilon > 0$ существует бесконечно дифференцируемая $\varphi(t)$, $\varphi(t) = 1$ при $|t| \leqslant 1/3$, $\varphi(t) = 0$ при $|t| \geqslant 2/3$, удовлетворяющая оценке $|A^j\varphi(t)| \leqslant C^j[(2j)!]^{1+\varepsilon}$. Заметим, что $\varphi(Nt) \to 0$ в $L_2(-\pi, \pi)$ при $N \to \infty$. Решение уравнения $Au = 1 - \varphi(Nt) = h$ при достаточно большом N не обращается в нуль. С другой стороны, $A^j h(t) = 0$ при $|t| < 1/3N$.

Московский институт
инженеров транспорта

Поступила в редакцию
14 октября 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бабин А. В., Формула, выражающая решение дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами на многообразии без края через данные задачи, Матем. сб. 101 (1976), 610—638.
2. Мандельбройт С., Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применение, М., ИЛ, 1955.