В. Я. Эйдерман, Э. Маттс, Теоремы единственности для аналитических и субгармонических функций, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 6, 1–88

https://www.mathnet.ru/aa908

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 6

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ И СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© В. Я. Эйдерман, Маттс Эссéн

Оглавление

§0. Введение

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое пространство функций, аналитических в единичном круге $U = \{|z| < 1\}$ комплексной плоскости и пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек из U такая, что $|z_n| \to 1$ при $n \to \infty$. Можно ли найти такие условия на $\{z_n\}$ и на положительные числа $\{\varepsilon_n\}$, стремящиеся к нулю, что для любой функции $f \in \mathcal{F}$ из неравенств

$$|f(z_n)| < \varepsilon_n, \quad n = 1,\ 2, \dots \tag{0.1}$$

Данная работа была написана в течение визитов первого автора в институт Миттаг-Леффлера и в университет Упсалы, поддержанных Королевской академией наук Швеции и университетом Упсалы. Первый автор признателен за поддержку и за гостеприимство, оказанные ему Академией и факультетом математики Упсальского университета. Исследование частично поддержано также РФФИ, грант 01-01-00608, и Министерством образования России, грант E00-1.0-199.

следует, что $f \equiv 0$? (Таким образом, если $\mathcal{F}$ — линейное пространство, $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ и $|f_1(z_n) - f_2(z_n)| < \varepsilon_n$ при всех n, то $f_1 \equiv f_2$.)

Хорошо известные результаты такого типа для целых функций или функций, аналитических в полуплоскости, имеются в книгах Н. Левинсона [Lev] и Р. Ф. Боаса [Bo]. За последние сорок лет было доказано большое количество теорем единственности для различных классов $\mathcal{F}$ функций в круге. Нашим основным объектом является класс H^∞ ограниченных аналитических функций. Этот случай покрывает также более широкий класс N мероморфных функций с ограниченной характеристикой (класс Неванлинны). Действительно, каждую функцию $f \in N$ можно представить в виде $f = f_1/f_2$, где $f_i \in H^\infty$, $\|f_i\| \leqslant 1$, $i = 1, 2$. Поэтому из (0.1) следует, что $|f_1(z_n)| < \varepsilon_n$, и достаточно рассмотреть H^∞ вместо N. Основная цель нашей работы — дать систематизированный обзор известных результатов, а также представить различные методы получения как новых, так и доказанных ранее теорем единственности. Как правило, эти методы работают в более общей ситуации, и представляется разумным продемонстрировать их на простейшем объекте H^∞. В последних параграфах мы кратко рассмотрим также иные классы $\mathcal{F}$, нежели H^∞, и условия, отличные от (0.1) (например, условие $\sum |f(z_n)| < \infty$).

В 1959 г. А. Л. Шагинян [Š] получил следующую теорему.

Теорема 0.1 (Шагинян [Š]). *Пусть $p(t)$ — непрерывная функция на интервале $(0,1)$, причем $p(t) \to \infty$ при $t \to 1$, и пусть Γ — непрерывная кривая в U с концевой точкой $\zeta \in \partial U$. Если $f \in H^\infty$ и*

$$(1 - |z|) \log |f(z)| < -p(|z|), \quad z \in \Gamma, \tag{0.2}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Более короткое доказательство получено Дж. Хвангом, Ф. Шницером и В. Зейделем [HSS]. М. Вуоринен [Vu] отметил, что теорема 0.1 вытекает из более раннего результата М. Хейнса [He, с. 195, теорема 7.1]. Известны разнообразные обобщения теоремы 0.1. Д. С. Рунг [Ru] и А. Ю. Шахвердян [Ša1–Ša5] рассматривали убывание функции f не на кривой, а на некоторых иных подмножествах круга U; имеется ряд аналогов теоремы 0.1 для более широких классов функций (см. §6). Теоремы единственности с условием (0.1) можно также рассматривать как уточнения теоремы 0.1, в которых кривая Γ заменяется последовательностью точек.

Пример $f(z) = \exp\{-P/(1-z)\}$, где $P > 0$, показывает, что мы не можем заменить функцию $p(t) \to \infty$ в (0.2) некоторой постоянной P, не зависящей от f. В этом смысле теорема 0.1 неулучшаема. Этот пример показывает также, что если точки $\{z_n\}$ лежат на фиксированном радиусе или близки к нему, то в (0.1) должно быть $\varepsilon_n \leqslant \exp\{-p_n/(1-|z_n|)\}$, где $p_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Сделаем несколько предварительных замечаний о последовательности $\{z_n\}$. Ясно, что должно выполняться условие

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)=\infty, \tag{0.3}$$

т. е. $\{z_n\}$ не должна быть последовательностью Бляшке (если ряд в (0.3) сходится, то соответствующее произведение Бляшке $B(z)$ равно нулю на $\{z_n\}$, принадлежит H^∞, но не является постоянной в U).

Пусть функция $f \in H^\infty$ имеет бесконечно много нулей. Одного лишь условия (0.3) недостаточно, какими бы малыми ни были заданные положительные числа $\{\varepsilon_n\}$: можно расположить точки $\{z_n\}$ настолько близко к нулям функции f, что условия (0.3) и (0.1) для f выполнены, хотя $f \not\equiv 0$. Таким образом, либо числа $\{\varepsilon_n\}$ должны зависеть не только от модулей $\{|z_n|\}$, но также от распределения точек $\{z_n\}$ в U, либо нужны некоторые дополнительные условия разделения, чтобы устранить чрезмерную концентрацию точек $\{z_n\}$. Если же о последовательности $\{\varepsilon_n\}$ известно только, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то нужны какие-либо дополнительные условия на распределение точек $\{z_n\}$ (например, условия на множество предельных точек последовательности $\{z_n\}$). Мы классифицируем условия единственности следующим образом. В §1 мы предполагаем, что последовательность $\{\varepsilon_n\}$ зависит от того, как распределены точки $\{z_n\}$, но условия разделения отсутствуют. В §2 мы исследуем случай $\varepsilon_n \leqslant \exp\{-P(|z_n|)\}$ при $P(t)(1-t) \geqslant d > 0$. Мы устанавливаем связь между ростом функции $P(t)$ (т. е. малостью чисел ε_n) и условиями концентрации точек $\{z_n\}$. В §3 мы показываем, что результаты §2 являются точными. Случай $P(t)(1-t) \to 0$ при $t \to 1$ изучается в §4. В §5 мы предполагаем лишь, что $f(z_n) \to 0$ при $n \to \infty$. В §6 мы приводим некоторые обобщения, а также краткий обзор близких результатов для классов функций, отличных от H^∞. Наконец, в §7 мы рассматриваем другие условия убывания функции f, отличающиеся от (0.1). Заметим, что известные ранее результаты приводятся не в хронологическом порядке. Например, важные теоремы С. Я. Хавинсона и И. В. Ушаковой излагаются в §2.

В дальнейшем через c мы обозначаем различные постоянные, значения которых могут меняться от строки к строке.

§1. Теоремы единственности без условий разделения

Рассмотрим неевклидово (гиперболическое) расстояние $\widetilde{\chi}(z_1,z_2)$ в U, определяемое равенством

$$\widetilde{\chi}(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\log\frac{1+\chi(z_1,z_2)}{1-\chi(z_1,z_2)}, \quad \text{где } \chi(z_1,z_2)=\left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1z_2}\right|. \tag{1.1}$$

Легко показать, что если $\widetilde{\chi}(z_1, z_2) < \sigma_0$, то

$$c\frac{|z_1 - z_2|}{1 - |z_1|} < \chi(z_1, z_2) < \frac{|z_1 - z_2|}{1 - |z_1|}, \quad c = c(\sigma_0). \tag{1.2}$$

Теорема 1.1 (Шахвердян [Ša4, с. 269]). *Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек из U, удовлетворяющая условию* (0.3), *и такая, что $|z_n| \to 1$ при $n \to \infty$. Если $f \in N$ и*

$$\log|f(z_j)| \leqslant -\frac{1}{1 - |z_j|}\left\{p(z_j) + c\log\frac{1}{\chi(z_j, \{z_n\} \setminus z_j)}\right\}, \tag{1.3}$$

где c — положительная постоянная и $p(z_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то $f \equiv 0$.

Менее сильный результат был позднее получен Н. Даникасом [Da]. В 1998 г. У. К. Хейман [Ha2] доказал более общую теорему, из которой теорема 1.1 вытекает как следствие.

Следуя Хейману, введем числа $\{\eta_j\}$, определяемые равенством

$$\eta_j = \prod\left\{\frac{2|z_j - z_k|}{1 - |z_j|}\right\} = \exp\left\{-\int_0^{(1-|z_j|)/2} \frac{n_j(t)}{t}\,dt\right\}, \tag{1.4}$$

где $n_j(t)$ означает количество точек z_k, удовлетворяющих $0 < |z_k - z_j| < t$, и произведение берется по всем k таким, что $0 < |z_k - z_j| < \frac{1}{2}(1 - |z_j|)$.

Теорема 1.2 (Хейман [Ha2, с. 131]). *Пусть $B(z)$ — произведение Бляшке и $\{Z_i\}$ — последовательность различных точек в U, не являющаяся последовательностью Бляшке (т. е. выполнено условие* (0.3)). *Тогда существует подпоследовательность Бляшке $z_j = Z_{i_j}$, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1 - |z_j|) < \infty, \tag{1.5}$$

со следующим свойством: из нее, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность $\{z_{j_p}\}$, для которой

$$\log|B(z_{j_p})| \geqslant o(1)\log\eta_{j_p} + \frac{o(1)}{1 - |z_{j_p}|}, \tag{1.6}$$

где $\{\eta_j\}$ — числа, определенные в (1.4). *Кроме того, если $f \in N$, то либо $f(z) \equiv 0$, либо найдется подпоследовательность z_{j_p} указанного выше вида, для которой*

$$\log|f(z_{j_p})| \geqslant o(1)\log\eta_{j_p} + \frac{O(1)}{1 - |z_{j_p}|}. \tag{1.7}$$

Приводимые здесь версии теоремы 1.2 и следствия 1.3 ниже несколько сильнее, чем те, которые получены в оригинальной работе Хеймана. Мы дадим новое доказательство этой теоремы, не использующее методы комплексного анализа, такие как вычеты, которые существенны в доказательстве Хеймана. Это новое доказательство дает возможность распространить теорему 1.2 на некоторые классы субгармонических функций в шаре $U \subset \mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$ (см. теорему 6.4).

Приведем вначале следствие теоремы 1.2.

Следствие 1.3 (Хейман [Ha2, с. 132]). *Пусть, как и в теореме* 1.2, *задана последовательность* $\{Z_i\}$, *не удовлетворяющая условию Бляшке. Если* $f \in N$ *и* $f(z) \not\equiv 0$, *то найдется подпоследовательность* $\{z_{j_p}\}$ *такая, что*

$$\log|f(z_{j_p})| \geqslant \frac{1}{1-|z_{j_p}|}\left\{-o\left(\log^+\frac{1}{d_{j_p}}\right)+O(1)\right\}, \tag{1.8}$$

где

$$d_j = \inf_{k\neq j}\left\{\frac{2|z_j-z_k|}{1-|z_j|}\right\}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\log(1/\eta_j) \leqslant n_j(\tfrac{1}{2}(1-|z_j|))\log^+(1/d_j).$$

Из условия (1.5) следует, что

$$n_j(\tfrac{1}{2}(1-|z_j|)) = \frac{o(1)}{1-|z_j|}.$$

Следствие 1.3 вытекает теперь из (1.7). •

Используя неравенства из (1.2), мы видим, что следствие 1.3 дает теорему 1.1 Шахвердяна.

Доказательство теоремы 1.2. Как и в [Ha2], введем семейство „квадратов" Уитни $Q_{m,n}$ в U:

$$Q_{m,n} = \{z = re^{i\varphi} : 1-2^{-m} \leqslant r \leqslant 1-2^{-m-1},\ \pi(n-1)2^{-m} \leqslant \varphi \leqslant \pi n 2^{-m}\},$$
$$m = 1,2,\ldots,\quad n = 1,2,\ldots,2^{m+1}. \tag{1.9}$$

Определим также множества

$$C_{m,n} = \bigcup Q_{i,j},$$

где объединение берется по всем парам i, j, для которых $Q_{m,n} \cap Q_{i,j} \neq \varnothing$. Пусть $\{a_j\}$ — нули функции $B(z)$; тогда

$$B(z) = \prod_i \frac{|a_i|}{a_i} \frac{a_i - z}{1 - \overline{a}_i z} \tag{1.10}$$

и

$$\sum (1 - |a_i|) < \infty. \tag{1.11}$$

Первый этап в доказательстве Хеймана из [Ha2] и в нашем доказательстве теоремы 1.2 аналогичны: для заданной точки z и для $\delta > 0$ мы сводим оценку произведения $B(z)$ к оценке произведения Бляшке по нулям a_i, для которых $|z - a_i| < \delta(1 - |z|)$.

Лемма 1.4. *Пусть $\delta \in (0, 1)$ — фиксированная постоянная, и*

$$B_\delta(z) = \prod_{|z - a_i| > \delta(1 - |z|)} \frac{|a_i|}{a_i} \frac{a_i - z}{1 - \overline{a}_i z}. \tag{1.12}$$

Тогда

$$\log |B_\delta(z)| = \frac{o(1)}{1 - |z|} \quad \text{при } |z| \to 1. \tag{1.13}$$

Доказательство. Нам понадобится тождество

$$\log \left| \frac{z - \zeta}{1 - \overline{\zeta} z} \right| = -\frac{1}{2} \log \left[1 + \frac{(1 - |z|^2)(1 - |\zeta|^2)}{|z - \zeta|^2} \right], \quad z, \zeta \in U. \tag{1.14}$$

Если $|z - a_i| > \frac{1}{2}(1 - |a_i|)$ и $|z - a_i| > \delta(1 - |z|)$, то в силу (1.14) имеем

$$\log \left| \frac{1 - \overline{a}_i z}{z - a_i} \right| < c, \quad c = c(\delta). \tag{1.15}$$

Если $|z - a_i| \leqslant \frac{1}{2}(1 - |a_i|)$ и $|z - a_i| > \delta(1 - |z|)$, то

$$\tfrac{1}{2}(1 - |a_i|) \leqslant 1 - |z| \leqslant \tfrac{1}{\delta} |z - a_i|,$$

и (1.14) опять дает (1.15). Итак, (1.15) выполнено для всех точек z, a_i из U, для которых $|z - a_i| > \delta(1 - |z|)$.

Замечание. Мы могли применить также иной подход, использованный в [Ha2, с. 138] и основанный на принципе максимума для гармонических функций.

Пусть $n(t)$ — количество точек $\{a_i\}$ в $\{|z| < t\}$. В силу (1.11) $n(|z| + \frac{1}{2}(1 - |z|)) = \frac{o(1)}{1-|z|}$ при $|z| \to 1$. Таким образом, для произведения Бляшке $B_\delta^{(1)}(z)$ по нулям $\{a_i\}$, для которых $|a_i| < |z| + \frac{1}{2}(1 - |z|)$, имеем (1.13).

Если $|a_i| \geqslant |z| + \frac{1}{2}(1 - |z|)$, то в силу (1.14) получаем

$$\log \left| \frac{1 - \overline{a}_i z}{z - a_i} \right| < c \frac{1 - |a_i|}{1 - |z|}.$$

Обозначая $B_\delta^{(2)}(z) := B_\delta(z)/B_\delta^{(1)}(z)$, находим

$$\log |B_\delta^{(2)}(z)| > -\frac{c}{1 - |z|} \sum_{|a_i| \geqslant |z| + \frac{1}{2}(1-|z|)} (1 - |a_i|) = \frac{o(1)}{1 - |z|},$$

и лемма 1.4 доказана. •

Вторая часть нашего доказательства теоремы 1.2 существенно отличается от подхода, примененного в [Ha2]. Нам понадобится хорошо известная лемма Безиковича о покрытии (см. [Be], а также лемму 3.2 в книге Н. С. Ландкофа [La, гл. 3]; более общее утверждение, принадлежащее Морсу, имеется в [Gu, с. 6]).

Лемма 1.5 (Безикович). *Пусть E — ограниченное множество в $\mathbb{R}^k$, и для каждой точки $x \in E$ задан евклидов шар $D(x, r(x))$ с центром x и радиусом $r(x)$. Тогда из множества $\{D(x, r(x))\}_{x \in E}$ можно выбрать не более чем счетное семейство шаров $\{D_m\}$ такое, что $E \subset \bigcup_m D_m$ и каждая точка $x \in E$ принадлежит не более чем A_k шарам D_m, где A_k зависит только от размерности k.*

Замечание. Первоначально шары $\{D(x, r(x))\}$ предполагались замкнутыми, но это условие не является необходимым [Gu, гл. 1].

Лемма 1.6. *Пусть $\{a_i\}_1^N$ и $\{z_i\}_1^M$ — заданные точки в шаре $D(w_0, R) \subset \mathbb{R}^k$ и пусть $M > 2A_k LN$, где $L \geqslant 1$ и постоянная A_k зависит только от размерности k. Обозначим через $n_a(D(w, r))$ и $n_z(D(w, r))$ количество точек a_i и z_i в шаре $D(w, r)$ соответственно. Тогда найдется точка z_j такая, что*

$$n_z(D(z_j, r)) \geqslant L n_a(D(z_j, r)) + 1, \quad 0 < r < 2R. \tag{1.16}$$

Доказательство. Обозначим через E множество всех точек $w \in \mathbb{R}^k$, для которых найдется число $r = r(w) \in (0, 2R)$ такое, что

$$Ln_a(D(w,r)) > n_z(D(w,r)) - 1 \geqslant 0. \tag{1.17}$$

Мы получили покрытие множества E семейством шаров $\{D(w, r(w))\}$. В силу леммы Безиковича найдется не более чем счетное подмножество шаров $\{D_i = D(w_i, r(w_i))\}$ такое, что $E \subset \bigcup D_i$ и каждая точка $w \in E$ принадлежит не более чем A_k шарам D_i, где A_k зависит только от k. Ясно, что

$$A_k N \geqslant \sum_i n_a(D_i).$$

В силу (1.17) имеем $n_a(D_i) \geqslant 1$. Следовательно, количество K шаров $\{D_i\}$ не превосходит $A_k N$.

Предположим теперь, что все точки $\{z_i\}$ лежат в E. Тогда

$$\begin{aligned} A_k N &\geqslant \sum_{i=1}^{K} n_a(D_i) > \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{K}(n_z(D_i) - 1) = \frac{1}{L}\left(\sum_{i=1}^{K} n_z(D_i) - K\right) \\ &\geqslant \frac{1}{L}(M - A_k N). \end{aligned}$$

Отсюда следует $M \leqslant A_k(L+1)N \leqslant 2A_k LN$, что противоречит нашему условию. Значит, найдется точка $z_j \notin E$, и лемма 1.6 доказана. •

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1.2. Так как $\{Z_i\}$ не является последовательностью Бляшке, а нули $\{a_i\}$ функции $B(z)$ удовлетворяют (1.11), то найдутся бесконечная последовательность взаимно не пересекающихся множеств $\{C_{m,n}\}$ и последовательность чисел $\{L_m\}$ такие, что

$$2A_2 L_m n_a(C_{m,n}) < n_Z(Q_{m,n}),$$

где A_2 — постоянная из леммы 1.5 и $L_m \to \infty$ при $m \to \infty$. Так как $\sum_{m,n} n_a(C_{m,n})2^{-m} < \infty$, можем считать, что и $\sum_{m,n} L_m n_a(C_{m,n})2^{-m} < \infty$. В каждом таком квадрате $Q_{m,n}$ произвольно выберем $2A_2 L_m n_a(C_{m,n}) + 1$ точек из $\{Z_i\}$. Тем самым мы получим последовательность, которую обозначим $\{z_j\}$. Ясно, что для $\{z_j\}$ условие (1.5) выполнено. Перенумеруем последовательности $\{C_{m,n}\}$ и $\{Q_{m,n}\}$ и обозначим их $\{C_p\}$ и $\{Q_p\}$, причем $Q_p \subset C_p$.

Применим лемму 1.6 к последовательностям $\{a_i\} \cap C_p$ и $\{z_j\} \cap Q_p$ в некотором круге, содержащем C_p. Получим, что каждый квадрат Q_p содержит точку z_j, удовлетворяющую (1.16) с $L = L_p$ для всех r из интервала $(0, (1 - |z_j|)/4)$ (мы использовали тот факт, что $D(z, (1 - |z_j|)/4) \subset C_p$ для всех $z \in Q_p$). Обозначим эту точку через z_{j_p}.

Для заданного p обозначим через $B_p(z)$ произведение Бляшке по точкам $\{a_i\}$, для которых $|z_{j_p} - a_i| < (1 - |z_{j_p}|)/4$ (если таких точек $\{a_i\}$ нет, то (1.6) сразу следует из леммы 1.4). Если $|z - \zeta| < (1 - |z|)/4$, то

$$|1 - \overline{\zeta} z| = |1 - z(\overline{z} + (\overline{\zeta} - \overline{z}))| < 1 - |z|^2 + |\overline{\zeta} - \overline{z}| < \tfrac{9}{4}(1 - |z|),$$

откуда

$$\left|\frac{z - a_i}{1 - \overline{a}_i z}\right| > \frac{1}{9} \cdot \frac{4|z - a_i|}{1 - |z|}, \qquad |z - a_i| < \frac{1}{4}(1 - |z|).$$

Пусть $n_a(t)$ — количество точек $\{a_i\}$ в круге $\{|z - z_{j_p}| < t\}$ и пусть $n_z(t)$ — количество точек $\{z_j\}$ в $\{0 < |z - z_{j_p}| < t\}$. В силу (1.16) с $L = L_p$ получаем

$$n_a(t) \leqslant \frac{1}{L_p} n_z(t), \quad 0 \leqslant t < (1 - |z_{j_p}|)/4.$$

Имеем

$$\log|B_p(z_{j_p})| \geqslant -n_a\left(\frac{1 - |z_{j_p}|}{4}\right)\log 9 + \int\limits_0^{(1-|z_{j_p}|)/4} \log\left(\frac{4t}{1 - |z_{j_p}|}\right) dn_a(t).$$

В силу (1.11) первое слагаемое в правой части есть $o(1/(1-|z_{j_p}|))$. Интегрируя второе слагаемое по частям, получаем (см. (1.4))

$$\int\limits_0^{(1-|z_{j_p}|)/4} \log\left(\frac{4t}{1 - |z_{j_p}|}\right) dn_a(t) = -\int\limits_0^{(1-|z_{j_p}|)/4} \frac{n_a(t)}{t}\, dt$$

$$\geqslant -\frac{1}{L_p}\int\limits_0^{(1-|z_{j_p}|)/4} \frac{n_z(t)}{t}\, dt \geqslant \frac{1}{L_p}\log \eta_{j_p}.$$

Таким образом,

$$\log|B_p(z_{j_p})| \geqslant \frac{1}{L_p}\log \eta_{j_p} + \frac{o(1)}{1 - |z_{j_p}|}.$$

Объединяя эту оценку с леммой 1.4, получаем (1.6).

Для доказательства (1.7) напомним, что каждая функция $f \in H^\infty$ представима в виде

$$\log|f(z)| = \text{Const.} - \int\limits_{\partial U} \frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2}\, d\mu(\zeta) + \log|B(z)|, \tag{1.18}$$

где μ — неотрицательная конечная мера на ∂U. Так как

$$\frac{1 - |z|^2}{|z - \zeta|^2} < \frac{2}{1 - |z|},$$

то (1.6) и (1.18) дают (1.7), что завершает доказательство теоремы 1.2. •

§2. Теоремы единственности с заданной скоростью убывания: случай $P(t)(1-t) \geqslant d > 0$

Пусть $P(t)$, $t \in (0,1)$ — непрерывная функция такая, что

$$P(t)(1-t) \geqslant d > 0. \tag{2.1}$$

Задача состоит в отыскании условий на последовательность $\{z_n\}$, при которых из неравенств

$$\log|f(z_n)| < -P(|z_n|), \quad n = 1, 2 \ldots \tag{2.2}$$

следует, что $f \equiv 0$ для всех $f \in H^\infty$ (или $f \in N$).

Теорема 2.1 (Ушакова [U1]). *Пусть $\{z_k\}$ — последовательность точек, лежащая в секторе, образованном двумя хордами окружности $\{|z| = 1\}$, с вершиной в точке $z = 1$. Пусть выполнено условие* (0.3) *и, кроме того,*

$$\left|\frac{1+z_{k+1}}{1-z_{k+1}}\right| - \left|\frac{1+z_k}{1-z_k}\right| \geqslant d > 0. \tag{2.3}$$

Если $f \in H^\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} |1-z_k|\log|f(z_k)| = -\infty, \tag{2.4}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Позднее И. В. Ушакова [U2] улучшила этот результат.

Теорема 2.1$'$ (Ушакова [U2]). *Пусть последовательность $\{z_k\}$ лежит в круге U, удовлетворяет условиям* (0.3) *и* (2.3) *и $z_k \to 1$. Если $f \in H^\infty$ и выполнено* (2.4), *то $f(z) \equiv 0$.*

Другое улучшение теоремы 2.1 было получено в [U5] (см. теорему 2).

Теорема 2.1$''$(Ушакова [U5]). *Пусть $\{z_k\}$ — последовательность в U, удовлетворяющая* (0.3) *и такая, что $z_k \to 1$ и*

$$\frac{|z_{k+p} - z_k|}{|1-z_k||1-z_{k+p}|} \geqslant pd, \quad d > 0. \tag{2.3$'$}$$

Если $f \in N$ и выполнено (2.4), *то $f(z) \equiv 0$.*

Ушакова получила также обобщение теоремы 2.1 на более общие классы мероморфных функций (см. §6).

Теорема 2.2 (Хавинсон [Hav1, Hav2]). *Предположим, что* $f \in H^\infty$ (*или* $f \in N$), *последовательность* $\{z_k\}$ *удовлетворяет условию* (0.3) *и*

$$\frac{|z_{k+1}| - |z_k|}{(1-|z_k|)(1-|z_{k+1}|)} \geqslant d > 0. \tag{2.5}$$

Если

$$\lim_{k\to\infty} (1-|z_k|)\log|f(z_k)| = -\infty, \tag{2.6}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Например, условие (2.5) выполняется для $z_n = 1 - 1/n$. Если последовательность $\{z_k\}$ лежит в секторе, то условия (2.4) и (2.6) эквивалентны. Но в общем случае теоремы 2.1 и 2.2 так же, как и теоремы 2.1′ и 2.2, не зависят друг от друга. Приведенный выше пример $f(z) = \exp\{-c/(1-z)\}$ показывает, что (2.6) нельзя заменить условием

$$(1-|z_k|)\log|f(z_k)| < -c$$

с положительной постоянной c, не зависящей от f. Тем не менее улучшить условие (2.6) возможно, если предполагать число c зависящим от функции f. Нам понадобятся следующие определения.

Пусть f — мероморфная функция в U и пусть $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — нули и полюсы функции f соответственно. Предположим, что 0 не является ни нулем, ни полюсом функции f. Неванлинновская характеристика функции f определяется равенством (см., например, Хейман [Ha1])

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi + \sum_{|b_i|<r} \log\frac{r}{|b_i|}. \tag{2.7}$$

Из формулы Пуассона–Иенсена ([Ha1], или (2.23) ниже) получаем

$$T_{1/f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^- |f(re^{i\varphi})|\,d\varphi + \sum_{|a_i|<r} \log\frac{r}{|a_i|} = T_f(r) - \log|f(0)|, \tag{2.8}$$

где $\log^- = \log^+ - \log$. Так как $T_f(r)$ является неубывающей функцией переменного r, то для функций f из класса Неванлинны N, т. е. для функций с ограниченной характеристикой, существует предел $\lim\limits_{r\uparrow 1} T_f(r) =: T_f(1)$.

Теорема 2.3 (Мейман [Me]). *Предположим, что последовательность точек* $\{z_k\}$ *удовлетворяет условию* (0.3) *и для некоторого* $\widetilde{\chi}_0 > 0$ *найдется положительное число* M *такое, что каждый неевклидов круг с радиусом* $\widetilde{\chi} \leqslant \widetilde{\chi}_0$ *содержит не более* M *точек из* $\{z_k\}$. *Если* $f \in N$ *и*

$$\limsup_{k\to\infty}(1-|z_k|)\log|f(z_k)| < -2\Bigl(T_{1/f}(1) - \sum_i \log\frac{1}{|a_i|}\Bigr), \tag{2.9}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Замечание. В [Me] Н. Н. Мейман рассматривает области более общего вида, чем единичный круг U.

Может показаться, что пример $f(z) = \exp(-\frac{1+z}{1-z})$ демонстрирует точность постоянной 2 в (2.9): достаточно выбрать точки z_k, лежащие на положительной действительной полуоси. Но каждая такая последовательность $\{z_k\}$, удовлетворяющая условию разделения из теоремы 2.3, должна быть последовательностью Бляшке, т. е. (0.3) не может иметь место. Как мы увидим в §4, правую часть неравенства (2.9) можно заменить нулем.

Теоремы 2.1′, 2.2 и 2.3 не зависят друг от друга. Выбирая $z_n = 1 - 1/n$, мы видим, что условия (2.3) и (2.5) выполнены, хотя количество точек z_n в неевклидовом круге с фиксированным радиусом $\widetilde{\chi}$ и центром $z \in (0,1)$ растет, как $\widetilde{\chi}/(1-|z|)$ при $z \to 1$. С другой стороны, в теореме 2.3 допускается совпадение точек z_n, в то время как при выполнении условий (2.3) или (2.5) точки z_n различны (позже в лемме 4.2 мы покажем, что это преимущество теоремы 2.3 в некотором смысле несущественно). Кроме того, условие (2.9) дает более точную оценку убывания функции f, чем (2.6). Теоремы 2.1, 2.2 и 2.3 были улучшены В. Я. Эйдерманом. Для описания этих результатов введем непрерывную неубывающую функцию $h(t)$ на интервале $[0,\infty)$ с $h(0) = 0$; будем называть h *измеряющей функцией*.

Теорема 2.4 (Эйдерман [Ei2, Ei3]). *Предположим, что*

$$\int_0 \frac{h(t)}{t}\,dt < \infty, \tag{2.10}$$

и последовательность $\{z_k\}$ *удовлетворяет* (0.3). *Обозначим через* κ_D *количество точек* z_n *в круге* D. *Пусть, далее, найдутся числа* $\sigma_0 \in (0,1)$ *и* $M \geqslant 1$ *такие, что для любого круга* $D = D(z,r)$ *с центром* z *и радиусом* r, *для которого* $\sigma := r/(1-|z|) < \sigma_0$, *выполнено условие*

$$\kappa_D \leqslant M\left[\frac{h(\sigma)}{1-|z|} + 1\right]. \tag{2.11}$$

Если $f \in N$ *и выполнено* (2.9), *то* $f \equiv 0$.

Покажем, что теоремы 2.1, 2.2 и 2.3 являются следствиями теоремы 2.4 при $h(t) = t$. Для вывода теоремы 2.2 воспользуемся условием (2.5), из которого следует, что

$$\kappa_D \leqslant c\frac{r}{(1-|z|)^2} + 1. \tag{2.12}$$

Таким образом, (2.11) выполнено. Если имеет место (2.6), то выполнено и (2.9), и в силу теоремы 2.4 имеем $f \equiv 0$. Теорема 2.2 доказана. •

Чтобы вывести теорему 2.1 из теоремы 2.4, заметим, что при $z \in D(\zeta, r)$ справедливы неравенства

$$|1+\zeta| - r < |1+z| < |1+\zeta| + r,$$
$$|1-\zeta| - r < |1-z| < |1-\zeta| + r.$$

Следовательно,

$$R_1 := \frac{|1+\zeta| - r}{|1-\zeta| + r} < \left|\frac{1+z}{1-z}\right| < \frac{|1+\zeta| + r}{|1-\zeta| - r} := R_2.$$

Эти неравенства означают, что образ круга D при конформном отображении $w = (1+z)/(1-z)$ содержится в кольце $R_1 < |w| < R_2$. В силу условия (2.3) это кольцо содержит не более чем $\frac{1}{d}(R_2 - R_1) + 1$ точек $w_k = (1+z_k)/(1-z_k)$. Если $r < \frac{1}{2}|1-\zeta|$, то

$$R_2 - R_1 = \frac{2r(|1+\zeta| + |1-\zeta|)}{(|1-\zeta| - r)(|1-\zeta| + r)} < \frac{8r}{\frac{3}{4}|1-\zeta|^2} = \frac{32r}{3|1-\zeta|^2}.$$

Таким образом, для каждого круга $D(\zeta, r)$ с $r < \frac{1}{2}|1-\zeta|$ имеем

$$\kappa_D < \frac{32r}{3d|1-\zeta|^2} + 1, \tag{2.13}$$

что даже более ограничительно, чем (2.12). Итак, теорема 2.1 является следствием теоремы 2.4. Оценка (2.13) выполняется также для тех кругов $D(\zeta, r)$, которые не содержатся в единичном круге.

Ясно, что теорема 2.3 следует из теоремы 2.4.

Условие разделения (2.11) является точным в следующем смысле [Ei2, Ei3]: условие (2.11) нельзя заменить неравенством

$$\kappa_D \leqslant M\left[\frac{h(\sigma)}{(1-|z|)\alpha(|z|)} + 1\right], \quad M \geqslant 1, \tag{2.14}$$

где $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 1$ (пусть даже сколь угодно медленно). Кроме того, условие (2.10) „почти“ необходимо для справедливости теоремы 2.4. Мы рассмотрим эти вопросы в §3. При $h(t) = t$ теорема 2.4 была получена в [Ei1] как частный случай более общего результата. При этом была исследована также точность условия (2.11).

Из своей теоремы 1.2 Хейман [Ha2, с. 131], вывел следующую усиленную версию теоремы 2.2 Хавинсона: он заменил (2.5) условием (см. (1.4))

$$n_j(t) \leqslant Ct^\alpha/(1-|z_j|)^{1+\alpha}, \quad 0 < t < (1-|z_j|)/2,$$

где C и α — положительные постоянные. В действительности этот результат был получен уже в [Ei2] и [Ei3] как следствие теоремы 2.4 при $h(t) = t^\alpha$. Мы докажем сейчас существенно более общее утверждение.

Пусть $h(t)$ — измеряющая функция, $P(t)(1-t)$ — неубывающая функция при $t \in (0,1)$, и $s(t) := \exp\{-s_0 P(t)(1-t)\}$, где $s_0 \geqslant 1$. Для заданного $t \in (0,1)$ рассмотрим следующее уравнение относительно переменной δ:

$$\frac{1}{h(\delta)} \int\limits_{\delta}^{s(t)} \frac{h(\tau)}{\tau}\, d\tau = P(t). \tag{2.15}$$

Левая часть уравнения (2.15) является строго убывающей функцией переменной δ на интервале $(0, s(t))$ с областью значений $(0,\infty)$. Следовательно, это уравнение имеет единственное решение $\delta = \delta(t) \in (0, s(t))$, причем δ является убывающей функцией переменной t на интервале (0,1).

Теорема 2.5. *Пусть $h(t)$, $P(t)$, $s(t)$ и $\delta(t)$ — определенные выше функции. Пусть $\{Z_i\} \subset U$ не является последовательностью Бляшке, и для любого круга $D(z,r)$ с $\sigma := r/(1-|z|) < s(|z|)$ выполнено неравенство*

$$\kappa_D \leqslant M\left[\frac{h(\sigma)}{h(\delta(|z|))} + 1\right], \quad M \geqslant 1, \tag{2.16}$$

где κ_D — количество точек Z_i в D и $M \geqslant 1$ — фиксированная постоянная. Предположим, далее, что $\{a_k\}$ — нули функции $f \in N$ и при некотором $\varepsilon > 0$ верна оценка

$$\log|f(Z_i)| < -(c+\varepsilon)P(|Z_i|), \tag{2.17}$$

где

i) $c = \dfrac{2}{d}\left(T_{1/f}(1) - \sum\limits_k \log\dfrac{1}{|a_k|}\right)$ *при* $P(t)(1-t) \to d, \quad t \to 1,$

ii) $c = 0$ *при* $P(t)(1-t) \to \infty, \quad t \to 1.$

Тогда $f(z) \equiv 0$.

Замечание. Мы не делаем никаких предположений относительно сходимости интеграла в (2.10).

Используя (2.15), можно записать условие (2.16) в виде

$$\kappa_D \leqslant M\Big[1 + P(|z|)h(\sigma)\Big/ \int\limits_{\delta(|z|)}^{s(|z|)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau\Big]. \tag{2.18}$$

Если $P(t) = 1/(1-t)$, то $s(t) = e^{-s_0}$, и при условии (2.10) мы видим, что условия (2.18) и (2.11) эквивалентны. Поэтому теорема 2.5 обобщает теорему 2.4 (из которой следуют теоремы 2.1, 2.2 и 2.3). Ниже мы приведем другие примеры и следствия теоремы 2.5.

Доказательство теоремы 2.5. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $|Z_{i+1}| \geqslant |Z_i|$. Покажем, что существует подпоследовательность $Z_{i_k} = Z'_k$ со следующими свойствами:

$$\sum_k (1 - |Z'_k|) = \infty, \tag{2.19}$$

$$n'_k(t) = 0, \quad 0 < t < r'_k := \delta(|Z'_k|)(1 - |Z'_k|), \tag{2.20}$$

$$n'_k(t) < \frac{2M}{h(\delta(|Z'_k|))} h\left(\frac{t}{1 - |Z'_k|}\right), \quad r'_k \leqslant t < s(|Z'_k|)(1 - |Z'_k|), \tag{2.21}$$

где $n'_k(t)$ — количество точек Z'_n, для которых $0 < |Z'_n - Z'_k| < t$.

Положим $Z'_1 = Z_1$. Из круга $D(Z'_1, r'_1)$ удалим все точки Z_i, кроме Z'_1. В качестве $Z_{i_2} = Z'_2$ возьмем точку нашей последовательности, лежащую вне этого круга и имеющую наименьший индекс i_2. Так как функция $\delta(t)$ убывает и $|Z'_1| \leqslant |Z'_2|$, то $r'_1 \geqslant r'_2$. Удалим теперь все точки Z_i из круга $D(Z'_2, r'_2)$, кроме Z'_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность $\{Z'_k\}$. Ясно, что соотношение (2.20) выполнено. Докажем теперь справедливость соотношений (2.19) и (2.21). В силу (2.16) каждый круг $D(Z'_k, r'_k)$ содержит не более $2M$ удаленных точек Z_i. Поэтому (2.19) следует из (0.3). Если $t \geqslant r'_k$, то $\sigma := t/(1 - |Z'_k|) \geqslant \delta(|Z'_k|)$ и $h(\sigma)/h(\delta(|Z'_k|)) \geqslant 1$. Из (2.16) следует, что

$$n'_k(t) \leqslant \kappa_D \leqslant 2Mh(\sigma)/h(\delta(|Z'_k|)),$$

и мы получаем (2.21).

Зафиксируем $f \in N$. По теореме 1.2 с $\{Z'_k\}$ вместо $\{Z_i\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_j = Z'_{k_j}\}$ со свойствами (1.5) и (1.6). Пусть $n_0(t)$

— количество точек $\{z_j\}$ в круге $\{|z| < t\}$. Оценим числа η_j, определенные в (1.4) (где введены и величины $n_j(t)$). В силу (2.20), (2.21) и (2.15) имеем

$$\int\limits_0^{s(|z_j|)(1-|z_j|)} \frac{n_j(t)}{t}\,dt$$
$$< \frac{2M}{h(\delta(|z_j|))} \int\limits_{\delta(|z_j|)(1-|z_j|)}^{s(|z_j|)(1-|z_j|)} h\Big(\frac{t}{1-|z_j|}\Big)\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{2M}{h(\delta(|z_j|))} \int\limits_{\delta(|z_j|)}^{s(|z_j|)} \frac{h(t)}{t}\,dt = 2MP(|z_j|).$$

Далее, из (1.5) следует, что $(1-t)n_0(t+\frac{1}{2}(1-t)) \to 0$ при $t \to 1$. Поэтому в случае $s(|z_j|) < 1/2$ получаем

$$\int\limits_{s(|z_j|)(1-|z_j|)}^{(1-|z_j|)/2} \frac{n_j(t)}{t}\,dt < n_0\Big(|z_j| + \frac{1}{2}(1-|z_j|)\Big)\log\frac{1}{2s(|z_j|)}$$
$$\leqslant s_0 n_0\Big(|z_j| + \frac{1}{2}(1-|z_j|)\Big)(1-|z_j|)P(|z_j|) = o(1)P(|z_j|).$$

Таким образом,

$$\log\eta_j > -3MP(|z_j|). \tag{2.22}$$

Для завершения доказательства воспользуемся формулой Пуассона–Иенсена (см., например, [Ha1]):

$$\begin{aligned}\log|f(re^{i\theta})| &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi \\ &+ \sum_{|a_i|<R}\log\left|\frac{R(z-a_i)}{R^2-\bar a_i z}\right| - \sum_{|b_i|<R}\log\left|\frac{R(z-b_i)}{R^2-\bar b_i z}\right|, \quad 0<r<R<1.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Так как $\log(\cdot) = \log^+(\cdot) - \log^-(\cdot) \geqslant -\log^-(\cdot)$, то интеграл в (2.23) ограничен снизу величиной

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\log^-|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$>-\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-r^2}{(R-r)^2}\int_0^{2\pi}\log^-|f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi=-\frac{R+r}{R-r}\left[T_{1/f}(R)-\sum_{|a_i|<R}\log\frac{R}{|a_i|}\right]$$

(см. (2.8)). Переходя к пределу при $R\to 1$, получаем

$$\log|f(z)|\geqslant-\frac{2}{1-|z|}\left[T_{1/f}(1)-\sum_{|a_i|<1}\log\frac{1}{|a_i|}\right]+\log|B(z)|, \tag{2.24}$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке по точкам $\{a_i\}$. Итак, для подпоследовательности $\{z_{j_p}\}$ соотношения (2.24), (1.6) и (2.22) дают

$$\log|f(z_{j_p})|\geqslant-(c+o(1))P(|z_{j_p}|), \tag{2.25}$$

где c — постоянная, определенная в теореме 2.5. Объединяя (2.25) и (2.17), получаем, что $f\equiv 0$, и теорема 2.5 доказана. •

Для важного класса измеряющих функций выражение в (2.18) можно упростить.

Следствие 2.6. *Предположим, что для некоторых чисел $a>0$, $s_0\geqslant 1$ и $0<r_0<1$ выполняется неравенство*

$$\int_0^r\frac{h(t)}{t}\,dt<a\,h(r)\log\frac{1}{r},\quad 0<r\leqslant r_0, \tag{2.26}$$

и что функция $P(t)(1-t)$ не убывает. Пусть, далее, последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условию (0.3), и для каждого круга $D(z,r)$, для которого $\sigma:=r/(1-|z|)<s(|z|)$ с $s(|z|)=\exp\{-s_0P(|z|)(1-|z|)\}$, выполнено неравенство

$$\kappa_D\leqslant M\left[\frac{h(\sigma)}{(1-|z|)h(s(|z|))}+1\right],\quad M\geqslant 1, \tag{2.27}$$

где κ_D — количество точек z_n в D. Если

$$\log|f(z_i)|<-(c+\varepsilon)P(|z_i|)$$

при $\varepsilon > 0$ *и постоянной* c, *определенной в теореме* 2.5, *то* $f \equiv 0$.

Доказательство. Согласно (2.26),

$$P(|z|)h(\sigma)\Big/\int\limits_{\delta(|z|)}^{s(|z|)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau$$
$$> P(|z|)h(\sigma)\Big/\left\{ah(s(|z|))\log\frac{1}{s(|z|)}\right\} = \frac{ch(\sigma)}{(1-|z|)h(s(|z|))}.$$

Поэтому из (2.26) следует (2.18), и можно применить теорему 2.5. •

Например, условие (2.26) выполняется для функций h вида $h(t) = t^{\alpha}$, $\alpha > 0$, или $h(t) = (\log(1/t))^{-p}$, $p > 1$, но не выполняется для таких h, как $h(t) = [\log\frac{1}{t}(\log\log\frac{1}{t})^{p}]^{-1}$, $p > 1$.

Замечание. Из доказательства теоремы 2.5 видно, что для заданной последовательности $\{Z_j\}$, не удовлетворяющей условию Бляшке, достаточно, чтобы условия разделения (2.16), (2.18) или (2.27) выполнялись лишь для кружков $D(Z_j, r_j)$ с центрами в точках $\{Z_j\}$.

Следствие 2.6 иллюстрирует связь между условием разделения (2.27) и условием убывания (2.17): чем быстрее растет $P(t)$ при $t \to 1$, тем слабее условие на κ_D в (2.27) и тем выше скорость убывания в (2.17). В следующем параграфе мы покажем, что в некотором смысле эта связь является точной.

Приведем теперь несколько примеров последовательностей $\{Z_j\}$, удовлетворяющих (2.27) при различных функциях P и h. Исходная последовательность, не удовлетворяющая условию Бляшке, часто будет обозначаться через $\{z_j\}$.

Пример 2.7. Возьмем $h(t) = t$. Предположим, что последовательность $\{z_j\}$ такова, что при $d > 0$ и $s_0 \geqslant 1$ выполнено условие

$$|z_{i+1}| - |z_i| \geqslant d(1-|z_i|)(1-|z_{i+1}|)\exp\{-s_0P(|z_{i+1}|)(1-|z_{i+1}|)\}. \tag{2.28}$$

Для точек $z_i \in D(z, r)$ с $\sigma = r/(1-|z|) < s(|z|)$ справедливы неравенства

$$|z| - s(|z|)(1-|z|) < |z| - r < |z_i| < r + |z| < |z| + s(|z|)(1-|z|).$$

Следовательно, $(1-s(|z|))(1-|z|) < (1-|z_i|) < (1+s(|z|))(1-|z|)$ и в силу (2.28)

$$\kappa_D < M\left[\frac{r}{(1-|z|)^2\exp\{-2s_0(1-|z|)P(|z|+s(|z|)(1-|z|))\}} + 1\right].$$

Таким образом, если $\{z_j\}$ не является последовательностью Бляшке и удовлетворяет условию (2.28) и если для $f \in N$ имеем

$$\log|f(z_j)| < -(c+\varepsilon)P(|z_j| + s(|z_j|)(1-|z_j|))$$

с постоянной c, определенной в теореме 2.5, то $f \equiv 0$.

При $P(t) = 1/(1-t)$ это уточнение теоремы 2.2 Хавинсона.

Пример 2.8 (Хейман [Ha2, с. 133]). Пусть последовательность $\{z_j\}$ такова, что

$$|z_j - z_k| \geqslant d(1-|z_j|)^p, \quad d > 0, \ p > 0, \ j \neq k. \tag{2.29}$$

Тогда при каждом значении j круг $D(z_j, d(1-|z_j|)^p)$ не содержит точек z_k, отличных от z_j. Следовательно, для любого круга $D(z,r)$ с $\sigma < 1/2$ имеем

$$\kappa_D \leqslant M\left[\frac{r^2}{(1-|z|)^{2p}} + 1\right].$$

Положим $h(t) = t^2$, $s_0 = 1$ и $P(t) = \frac{p}{1-t}\log\frac{1}{1-t}$. Тогда $s(t) = (1-t)^p$, и (2.27) примет вид

$$\kappa_D \leqslant M\left[\frac{\sigma^2}{(1-|z|)^{2p+1}} + 1\right] = M\left[\frac{r^2}{(1-|z|)^{2p+3}} + 1\right].$$

Значит, из (2.29) следует (2.27) с функциями $h(t) = t^2$ и $P(t)$, указанной выше, и можно применить теорему 2.5.

В частности, мы видим, что условия Хавинсона (2.5) и (2.6) можно заменить следующими:

$$|z_j - z_k| \geqslant d'(1-|z_j|)^2 \quad \text{при } j \neq k,\ |z_j - z_k| < \tfrac{1}{2}(1-|z_j|), \tag{2.5$'$}$$

где d' — другая положительная постоянная, и

$$\frac{1-|z_k|}{\log\frac{1}{1-|z_k|}}\log|f(z_k)| \to -\infty, \quad k \to \infty.$$

Ясно, что из (2.5) следует (2.5′). Мы ослабили условие (2.5) и усилили условие (2.6). Мы обсудим точность этих результатов в §3.

Следствие 2.9. *Предположим, что последовательность* $\{Q_k(w_k)\}$ *„квадратов" Уитни (здесь* w_k *— центр квадрата* Q_k*) и последовательность точек* $\{z_i\}$ *таковы, что каждый квадрат* Q_k *содержит* M_k *точек из* $\{z_i\}$*, и*

$$\sum_k M_k(1-|z_k|)=\infty$$

(таким образом, $\{z_i\}$ *не является последовательностью Бляшке). Пусть* $\{p_k\}$ *— последовательность положительных чисел, причем* $p_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$*. Рассмотрим два условия разделения, в обоих случаях* $i \neq j$:

(A) *Для любого* k

$$|z_i - z_j| \geqslant \delta(1-|w_k|)\exp\{-p_k\}/\sqrt{M_k} =: \rho_k, \quad z_i, z_j \in Q_k, \ \delta > 0. \tag{2.30}$$

(B) *Для любого* k *найдется отрезок* L_k *такой, что*

$$|z_i^* - z_j^*| \geqslant \delta(1-|w_k|)\exp\{-p_k\}/M_k, \tag{2.31}$$

где z_i, $z_j \in Q_k$, $\delta > 0$ *и* z_i^* *— ортогональная проекция точки* z_i *на* L_k*. Если выполнено* (A) *или* (B)*, то найдутся положительные числа* $\varepsilon_k \to 0$ *со следующим свойством: если* $f \in N$ *и*

$$(1-|z_j|)\log|f(z_j)| < -\varepsilon_k p_k, \quad z_j \in Q_k, \tag{2.32}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что выполнено (A). Без ограничения общности можно считать, что

$$|w_l - w_k| > \tfrac{2}{3}(1-|w_k|), \quad |w_k| < |w_l|.$$

Действительно, если это условие не выполнено, разобьем $\{Q_k\}$ на конечное число подпоследовательностей, каждая из которых имеет указанное свойство. Так как $\{z_i\}$ не удовлетворяет условию Бляшке, то хотя бы одна из соответствующих подпоследовательностей точек из $\{z_i\}$ также не удовлетворяет этому условию.

Пусть числа $m_k > 0$ таковы, что $M_k \geqslant m_k$, $\sum_k m_k(1-|w_k|)=\infty$ и

$$\varepsilon_k' := m_k(1-|w_k|) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Положим $\rho_k' = \sqrt{M_k/m_k}\rho_k$. Выберем $z_{i_1} \in Q_k$ и удалим все точки $z_i \neq z_{i_1}$ из круга $D(z_{i_1}, \rho_k')$. Затем выберем $z_{i_2} \in Q_k \setminus D(z_{i_1}, \rho_k')$, удалим все точки

$z_i \neq z_{i_2}$ из круга $D(z_{i_1}, \rho'_k)$, и т.д. Каждый раз мы удаляем не более чем $c(\rho'_k/\rho_k)^2 = c(M_k/m_k)$ точек z_i (см. (2.30)). Следовательно, мы можем выбрать $c'm_k$ точек z_i, для которых $|z_i - z_j| \geqslant \rho'_k$, и при этом любой круг $D(z,r)$ с $\sigma < 1/2$ содержит не более $1+A(r/\rho'_k)^2$ точек z_i. Поэтому для круга $D = D(z,r)$, пересекающегося с Q_k, имеем (см. (2.30))

$$\kappa_D - 1 < A_1 \frac{r^2 m_k}{(1-|z|)^2 \exp\{-2p_k\}} = A' \frac{\varepsilon'_k r^2}{(1-|z|)^3 \exp\{-2p_k\}}. \tag{2.33}$$

Из этой оценки следует (2.27) с $h(t) = t^2$, $P(t) = p_k/(1-t)$, $s_0 = 1$ и $M = 1$. Действительно, в этом случае $s(t) = \exp\{-p_k\}$, и в силу (2.33) условие (2.27) выполнено.

Здесь функции $P(t)$ и $s(t)$ зависят от k. Но все рассуждение в доказательстве теоремы 2.5 справедливо и в этом случае, поскольку число η_j зависит только от точек z_k в круге $|z - z_j| < \frac{1}{2}(1-|z_j|)$ (см. (1.4)).

Итак, если $z_j \in Q_k$, то в силу следствия 2.6 найдется последовательность $\{\frac{1}{2}\varepsilon_k\}$, стремящаяся к 0 и такая, что

$$(1-|z_j|)\log|f(z_j)| > -\tfrac{1}{2}\varepsilon_k(1-|z_j|)P(|z_j|) > -\varepsilon_k p_k$$

при достаточно больших k. Выбирая в (2.32) соответствующие числа $\{\varepsilon_k\}$, заключаем, что $f \equiv 0$, и в случае (A) доказательство закончено.

В случае (B) положим $\rho_k = \delta(1-|w_k|)\exp\{-p_k\}/M_k$ и $\rho'_k = \rho_k M_k/m_k$. Выберем точку $z_{i_1} \in Q_k$ и удалим все точки $z_j \neq z_{i_1}$ такие, что $|z^*_{i_1} - z^*_j| < \rho'_k$ и т.д. Каждый раз мы удаляем не более чем $\rho'_k/\rho_k = M_k/m_k$ точек z_j (см. (2.30)). Следовательно, можно выбрать m_k точек z_j, для которых $|z^*_i - z^*_j| \geqslant \rho'_k$. Тогда каждый круг $D(z,r)$ с $\sigma < 1/2$ содержит не более чем $1 + r/\rho'_k$ точек z_j. Поэтому

$$\kappa_D - 1 < \frac{r}{\rho'_k} = \frac{Am_k r}{M_k \rho_k} = \frac{A_1 \varepsilon'_k r}{(1-|z|)^2 \exp\{-p_k\}}.$$

Возьмем $h(t) = t$, и пусть, как и прежде, $P(t) = p_k/(1-t)$, $s_0 = 1$. Тогда $s(t) = \exp\{-p_k\}$. Условие (2.27) выполнено с $M = 1$, и случай (B) получается с помощью тех же рассуждений, что и случай (A). Следствие 2.9 доказано. •

Мы вывели теоремы 2.1–2.5 из теоремы 1.2. Но рассуждения такого типа уже не работают при доказательстве теорем 2.1′ и 2.1″: они не покрывают случая, когда последовательность $\{z_n\}$ не содержится в угле Штольца, т. е. когда $|1-z_n|/(1-|z_n|) \to \infty$ при $n \to \infty$. Мы опишем теперь другой подход, основанный на оценках модуля $|f(z)|$ вне исключительного множества. Первый шаг состоит в оценке „размера“ множества $E \subset U$ такого, что в дополнении $U \setminus E$ модуль $|f(z)|$ удовлетворяет некоторой оценке снизу (скажем, $\log|f(z)| > -P(|z|)$). Вторым шагом является отыскание таких условий на последовательность $\{z_n\} \subset U$, из которых следует существование бесконечной подпоследовательности, лежащей вне E. Если в некоторых точках z_n этой подпоследовательности оценка снизу на множестве $U \setminus E$ не выполнена, мы приходим к противоречию, и $f(z) \equiv 0$.

Этот подход применялся Ушаковой, Мейманом, Эйдерманом и др. Он позволит нам обобщить теоремы 2.1′ и 2.1″ Ушаковой, а также рассмотреть случай $P(t)(1-t) \leqslant c < \infty$ и другие условия убывания, обсуждаемые в последующих параграфах.

С функцией $f \in H^\infty(U)$, имеющей нули $\{a_n\}$, $a_n \neq 0$, мы свяжем неотрицательную меру η на замкнутом единичном круге $\overline{U}$, определяемую следующим образом: для любого множества $E \subset \overline{U}$, для которого пересечение $E \cap \partial U$ измеримо, положим

$$\eta(E) = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{e^{i\theta}\in E} \log^- |f(re^{i\theta})|\, d\theta + \sum_{a_n \in E} \log \frac{1}{|a_n|}. \tag{2.34}$$

Заметим, что $\eta(\overline{U}) = T_{1/f}(1)$. (Доказательство существования этого предела приводится в Приложении 1 в конце данного раздела.)

Теорема 2.10 (Говоров–Гришин). *Предположим, что* $f \in H^\infty(U)$ *и* $f(z) \not\equiv 0$. *Для любого* $P > 1$ *найдется система кружков* $D^k(w_k, r_k)$ *такая, что*

$$\log|f(z)| > -A_1 P T_{1/f}(1), \quad z \in U \setminus \bigcup_k D^k, \tag{2.35}$$

$$\sum_k r_k < 1/P \tag{2.36}$$

и каждая точка $z \in \bigcup_k D^k$ *принадлежит не более чем* A_2 *кружкам* D^k *(мы будем называть* A_2 *кратностью этого покрытия). Кроме того,*

$$\eta(D^k) > A_3 P T_{1/f}(1) r_k. \tag{2.37}$$

Здесь A_1, A_2 *и* A_3 *— абсолютные положительные постоянные и* η *— неотрицательная мера на замкнутом единичном круге* $\overline{U}$, *определенная в* (2.34).

Замечание. Теорема 2.10 по существу принадлежит Н. В. Говорову [Go] и независимо А. Ф. Гришину [Gr] (они использовали максимум модуля вместо $T_{1/f}(1)$ в (2.35)). Л. С. Кудина [Ku] распространила ее на функции, субгармонические в шаре. Говоров [Go] получил также характеристики исключительных множеств более точные, чем (2.36); дальнейшее улучшение принадлежит Эйдерману [Ei7]. Последние два свойства кружков D^k не сформулированы в указанных выше работах, но следуют из имеющихся там доказательств (см., например, конец доказательства теоремы 4.4 в [Ei7]).

Применяя теорему 2.10, мы получим обобщение теорем 2.1′ и 2.1″.

Теорема 2.11. *Пусть $\varphi(t)$ — положительная неубывающая функция такая, что*

$$\varphi(t) < at \text{ для некоторого } a \geqslant 1, \quad t > 0. \tag{2.38}$$

Пусть $\{z_j\}$ не является последовательностью Бляшке и удовлетворяет следующему условию: для любого круга $D(z,r)$ с $r < \varphi(|1-z|)/(2a)$ имеем

$$\kappa_D \leqslant M\left[\frac{r}{|1-z|\varphi(|1-z|)} + 1\right], \quad M \geqslant 1 \tag{2.39}$$

(здесь, как и прежде, через κ_D обозначается количество точек z_j в D). Если $f \in H^\infty$ и

$$\varphi(\tfrac{1}{4}|1-z_n|)\log|f(z_n)| \to -\infty \quad \text{при } n \to \infty, \tag{2.40}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Замечание. Полагая $\varphi(t) = t$, мы получаем теорему 2.1′ (см. (2.13)) и теорему 2.1″, поскольку в этом случае из условия 2.3′ следует (2.39).

Лемма 2.12. *Пусть задана функция $f \in H^\infty$ и пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.11. Тогда найдется счетный набор кружков $D^k(w_k, r_k)$ таких, что каждая точка $z \in \bigcup_k D^k$ принадлежит не более чем $3A_2$ кружкам (A_2 — постоянная из теоремы 2.10) и*

$$r_k < (2a)^{-1}\varphi(|1-w_k|),$$

$$\varphi(\tfrac{1}{4}|1-z|)\log|f(z)| > -A_4 T_{1/f}(1), \quad z \in U \setminus \bigcup_k D^k, \tag{2.41}$$

$$\sum_k r_k/\varphi(|1-w_k|) < \infty. \tag{2.42}$$

Доказательство. Положим $Y_n = \{z \in U : 2^{-(n+1)} < |1-z| \leqslant 2^{-n}\}$, $P_n = 2a/\varphi(2^{-n-2})$. Для каждого n возьмем семейство кружков $D^{n,k}(w_{n,k}, r_{n,k})$ из теоремы 2.10 с P_n вместо P. Из этого семейства выберем те кружки $D^{n,k}$, для которых $D^{n,k} \cap Y_n \neq \varnothing$. Покажем, что объединение $\bigcup_{n,k} D^{n,k}$ выбранных кружков удовлетворяет всем условиям леммы.

Так как

$$\sum_k r_{n,k} < 1/P_n = (2a)^{-1}\varphi(2^{-n-2}) < 2^{-n-3},$$

то каждый выбранный кружок пересекает только множества Y_j с $n-1 \leqslant j \leqslant n+1$. Так как для каждого n кратность покрытия $\bigcup_k D^{n,k}$ не превосходит A_2, то каждая точка объединения $\bigcup_{n,k} D^{n,k}$ принадлежит не более чем $3A_2$ кружкам $D^{n,k}$.

Для каждого $D^{n,k}$ имеем $|1-w_{n,k}|>2^{-n-2}$. Следовательно,

$$r_{n,k}<(2a)^{-1}\varphi(2^{-n-2})\leqslant(2a)^{-1}\varphi(|1-w_{n,k}|).$$

Пусть $z\in U\setminus\bigcup_{n,k}D^{n,k}$. Предположим, что $z\in Y_n$. Тогда в силу (2.35)

$$\log|f(z)|>-A_1\frac{2a}{\varphi(2^{-n-2})}T_{1/f}(1)\geqslant -A_1\frac{2a}{\varphi(\frac14|1-z|)}T_{1/f}(1),$$

и неравенство (2.41) доказано.

Установим теперь (2.42). Из (2.37) получаем

$$\begin{aligned}\sum_{n,k}\frac{r_{n,k}}{\varphi(|1-w_{n,k}|)}&\leqslant\sum_n\frac{1}{\varphi(2^{-n-2})}\sum_k r_{n,k}\\&<\sum_n\frac{1}{\varphi(2^{-n-2})}\frac{1}{A_3P_nT_{1/f}(1)}\sum_k\eta(D^{n,k})=\frac{1}{2aA_3T_{1/f}(1)}\sum_{n,k}\eta(D^{n,k})\\&\leqslant\frac{3A_2}{2aA_3T_{1/f}(1)}T_{1/f}(1)=\frac{3A_2}{2aA_3},\end{aligned}$$

и доказательство леммы 2.12 завершено. •

Доказательство теоремы 2.11. Достаточно доказать, что из условий теоремы 2.11 следует существование бесконечной подпоследовательности $\{z_{j_k}\}$, лежащей вне $\bigcup_k D^k$, где D^k — кружки из леммы 2.12. Предположим противное, т.е. все точки z_j для достаточно больших j принадлежат множеству $\bigcup_k D^k$. Разделим кружки $\{D^k\}$ на две группы в зависимости от того, какое из двух неравенств выполнено: $r_k\geqslant|1-w_k|\varphi(|1-w_k|)$ или $r_k<|1-w_k|\varphi(|1-w_k|)$.

В первом случае из (2.39) получаем, что

$$\varkappa_{D^k}\leqslant\frac{2Mr_k}{|1-w_k|\varphi(|1-w_k|)}.$$

Следовательно, для точек z_j в этих кружках имеем

$$\sum(1-|z_j|)\leqslant\sum_k\sum_{z_j\in D^k}(1-|z_j|)<c\sum_k\varkappa_{D^k}|1-w_k|<c_1\sum_k\frac{r_k}{\varphi(|1-w_k|)}<\infty.$$

Каждый кружок D^k с $r_k<|1-w_k|\varphi(|1-w_k|)$ содержит не более чем $2M$ точек z_j (см. (2.39)). Далее, из (2.34) и (2.37) следует, что каждый кружок $D^k\subset U$

содержит по крайней мере один нуль a_n функции $f(z)$. Если $z_j \in D^k$, то $1 - |z_j| < 1 - |a_n| + 2r_k$, и

$$\sum(1 - |z_j|) \leqslant \sum_k \sum_{z_j \in D^k} (1 - |z_j|) \leqslant 2M \left(\sum_k (1 - |a_n| + 2r_k) \right)$$
$$\leqslant 2M \cdot 3A_2 \sum_n (1 - |a_n|) + 4M \sum_k r_k < \infty,$$

так как $\{a_n\}$ — последовательность Бляшке, и в силу (2.42) сумма $\sum_k r_k$ конечна.

Если $D^k \cap \partial U \neq \varnothing$ и $z_j \in D^k$, то $1 - |z_j| < 2r_k$, и

$$\sum(1 - |z_j|) < 2M \cdot 2 \sum_k r_k < \infty.$$

Таким образом, $\{z_j\}$ является последовательностью Бляшке, что противоречит нашим предположениям. Теорема 2.11 доказана. •

Замечание. То же рассуждение проходит и при менее ограничительном условии разделения, чем (2.39). Например, вместо него можно предположить, что

$$\sum_{z_j \in D} (1 - |z_j|) < M \left[\frac{r}{\varphi(|1 - z|)} + (1 - |z|) \right]$$

для любого круга $D(z, r)$ с $r < \varphi(|1 - z|)/(2a)$.

Приложение 1

Чтобы объяснить, почему предел в (2.34) существует, мы покажем, что если функция u субгармонична и ограничена сверху в единичном круге U, то для каждого измеримого множества $E \subset \partial U := \mathbb{T}$ предел

$$\lim_{r \to 1} \int\limits_{\{e^{i\theta} \in E\}} u(re^{i\theta}) d\theta \qquad \text{(A2.1)}$$

существует и определяет меру на $\mathbb{T}$. Действительно, каждую такую функцию можно представить в виде $u = u_1 + u_2$, где

$$u_1(z) = \iint\limits_U \log |(z - \zeta)/(1 - \overline{\zeta} z)| d\mu(\zeta)$$

и

$$u_2(z) = \sup_{z\in U} u(z) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\varphi}|^2}\,d\nu(e^{i\varphi}).$$

Здесь μ и ν — неотрицательные меры. При этом

$$\iint\limits_U (1-|\zeta|^2)\,d\mu(\zeta) < \infty. \tag{A2.2}$$

Чтобы доказать существование предела (A2.1) для $u = u_2$, достаточно установить, что $u(re^{i\theta})$ имеет $(*)$-слабый предел при $r \to 1$. Если $v \in C(\mathbb{T})$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} v(\theta) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,d\nu(e^{i\varphi})\,d\theta$$
$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\nu(e^{i\varphi}) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)v(\theta)}{1+r-2r\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta \to 2\pi \int\limits_{-\pi}^{\pi} v(\varphi)\,d\nu(e^{i\varphi}), \quad r\to 1$$

(мы воспользовались тем, что для равномерно ограниченной сходящейся последовательности измеримых функций предел интегралов от этих функций равен интегралу от предельной функции). Из существования этого предела для всех $v \in C(\mathbb{T})$ следует, что предел в (A2.1) существует при $u = u_2$.

Докажем, что предел в (A2.1) существует и при $u = u_1$. Используя (A2.2), получаем

$$0 \geqslant \int\limits_E u_1(re^{i\theta}) \geqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} u_1(re^{i\theta})\,d\theta = \iint_U d\mu(\zeta) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{re^{i\theta}-\zeta}{1-\bar\zeta re^{i\theta}}\right| d\theta$$
$$= \iint_{\{|\zeta|<r\}} \log r\; d\mu(\zeta) + \iint_{\{r<|\zeta|<1\}} \log|\zeta|\,d\mu(\zeta) \to 0, \quad r\to 1.$$

Тем самым доказательство существования предела (A2.1) закончено. Если $f \in H^\infty(U)$, то предел (A2.1) существует для субгармонических функций u, равных $\log|f|$ или $\log^+|f|$. Так как $\log^- = \log^+ - \log$, то предел в (2.34) существует для всех измеримых множеств $E \subset \mathbb{T}$.

§3. Контрпримеры

Основным результатом данного параграфа является теорема 3.1, показывающая, что условия (2.16) и (2.17) в теореме 3.1 ослабить нельзя. В качестве следствий мы получим утверждения, иллюстрирующие точность некоторых других результатов в §2.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha(t)$ *и* $\beta(t)$ *— положительные функции на интервале* (0,1), *стремящиеся к* 0 *при* $t \to 1-$. *Пусть* $P(t)$, $h(t)$, $s(t)$ *и* $\delta(t)$ *— такие же функции, как и в теореме 2.5. Предположим, далее, что измеряющая функция* $h(t)$ *удовлетворяет следующему условию: для некоторого* $b \in (0,1)$ *и* $r_0 > 0$ *выполнено неравенство*

$$h(t_1)t_1^{-2} \geqslant b\, h(t_2)t_2^{-2} \quad \text{для всех } 0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant r_0. \tag{3.1}$$

Тогда существуют произведение Бляшке $B(z) \not\equiv 0$ *и последовательность* $\{z_i\}$, *не удовлетворяющая условию Бляшке, такие что*

$$\kappa_D \leqslant \frac{h(\sigma)}{\alpha(|z|)h(\delta(|z|))} + 1 \tag{3.2}$$

для любого круга $D(z,r)$ *с* $\sigma =: r/(1-|z|) < s(|z|)$, *и*

$$\log|B(z_i)| < -\beta(|z_i|)P(|z_i| - o(1-|z_i|)). \tag{3.3}$$

Замечание. В (3.2) и (3.3) можно заменить функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ одной функцией $\gamma(t)$. Например, можно взять $\gamma(t) = \max(\alpha(t), \beta(t))$.

Доказательство теоремы 3.1. Выберем s_0 в определении функции $s(t)$ таким, чтобы $s(t) < 1/16$. Без ограничения общности можно предполагать, что функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — убывающие (если доказать (3.2) и (3.3) с убывающими функциями $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ вместо $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, стремящимися к 0 при $t \to 1-$, и такими, что $\alpha_1(t) \geqslant \alpha(t)$ и $\beta_1(t) \geqslant \beta(t)$, то (3.2) и (3.3) в первоначальном виде также будут выполнены). Найдутся числа $\tau_j \in (0,1)$ такие, что

$$\alpha(\tau_j) < 2^{-2j}, \quad \beta(\tau_j) < 2^{-2j}, \quad 1 - \tau_{j+1} < \tfrac{1}{3}(1-\tau_j). \tag{3.4}$$

Рассмотрим два случая. Если

$$4 \cdot 2^j(1-\tau_j)h(s(\tau_j))/h(\delta(\tau_j)) > 1, \tag{3.5}$$

то возьмем $k_j = 0$ и $I_j = 1$. Если

$$4 \cdot 2^j(1-\tau_j)h(s(\tau_j))/h(\delta(\tau_j)) \leqslant 1, \tag{3.6}$$

то положим $I_j = [h(\delta(\tau_j))/\{4 \cdot 2^j(1-\tau_j)h(s(\tau_j))\}]$, где $[\cdot]$ означает целую часть числа. В силу (3.6) $I_j \geqslant 1$, и

$$4 \leqslant \frac{h(\delta(\tau_j))}{I_j 2^j(1-\tau_j)h(s(\tau_j))} < 8. \tag{3.7}$$

Положим

$$k_j = \left[\log_4 \frac{1}{I_j 2^j (1-\tau_j)}\right]. \tag{3.8}$$

Тогда $k_j \geqslant 1$. Воспользуемся теперь конструкциями из [Ei7]. Положим

$$l_{j,0} = s(\tau_j).$$

По лемме 1.1 из [Ei7] найдутся числа $l_{j,i} > 0$ такие, что $2l_{j,i} \leqslant l_{j,i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, и

$$b4^{-i}h(l_{j,0}) \leqslant h(l_{j,i}) \leqslant 4^{-i}h(l_{j,0}). \tag{3.9}$$

Пусть $E_{j,0}$ — квадрат на плоскости с центром в начале координат, со сторонами, параллельными координатным осям и равными $l_{j,0}$. Обозначим через $E_{j,N} = E_{j,N}(\{l_{j,i}\})$, $i = 1, 2, \ldots, N$, множество, получаемое на N-м шаге построения канторова множества в $E_{j,0}$ (см. начало §1 в [Ei7]). Множество $E_{j,N}$ состоит из 4^N квадратов со сторонами, равными $l_{j,N}$. Возьмем $N = k_j$. Если $k_j = 0$, то поместим в центр квадрата $E_{j,0}$ точки $A_{j,p}$ с кратностью $[(2^j(1-\tau_j))^{-1}]$. Кроме того, в $E_{j,0}$ равномерно распределим $[(1-\tau_j)^{-1}]$ точек, которые обозначим через $Z_{j,q}$. Если $k_j \geqslant 1$, то поместим ровно одну точку $A_{j,p}$ в центр каждого из 4^{k_j} квадратов, образующих E_{j,k_j}. В каждом из этих квадратов мы также равномерно распределим 2^j точек $Z_{j,q}$. Теперь рассмотрим отображения

$$F_{j,m}(Z) = (t_j + (1-\tau_j)Z)e^{i2\pi m/I_j}, \quad m = 0, 1, \ldots, I_j - 1,$$

где

$$t_j = \tau_j + 2s(\tau_j - \tfrac{1}{15}(1-\tau_j))(1-\tau_j).$$

Пусть

$$a_{j,m,p} = F_{j,m}(A_{j,p}), \quad z_{j,m,q} = F_{j,m}(Z_{j,q}), \quad G^j_m = F_{j,m}(E_{j,k_j}).$$

Тогда $\{F_{j,m}(E_{j,0})\}_{j,m}$ является множеством непересекающихся квадратов. Заметим, в частности, что при $0 \leqslant m \leqslant I_j - 1$ справедливо включение

$$G^j_m \subset \{z : \tau_j < |z| < \tau_j + \tfrac{1}{2}(1-\tau_j)\}, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Перенумеруем последовательности $\bigcup_{j,m,p} a_{j,m,p}$ и $\bigcup_{j,m,q} z_{j,m,q}$ и обозначим их через $\{a_i\}$ и $\{z_j\}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Покажем, что произведение Бляшке $B(z)$ с нулями $\{a_i\}$ и последовательность $\{z_j\}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3.1.

Покажем вначале, что $\{a_i\}$ является последовательностью Бляшке и, значит, $B(z) \not\equiv 0$. Если $k_j = 0$ и $I_j = 1$, то множество G^j_0 содержит не более

$(2^j(1-\tau_j))^{-1}$ точек $a_{j,0,p}$. Если $k_j \geqslant 1$, то количество точек $a_{j,m,p}$ при фиксированном j равно $I_j 4^{k_j}$ (см. (3.8)), и

$$I_j 4^{k_j} \leqslant I_j \cdot \frac{1}{I_j 2^j(1-\tau_j)} = \frac{1}{2^j(1-\tau_j)}.$$

Так как $1-|a_{j,m,p}| < c(1-\tau_j)$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-|a_i|) \leqslant c\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j(1-\tau_j)}\cdot(1-\tau_j) < \infty.$$

Итак, $\{a_i\}$ является последовательностью Бляшке и $B(z) \not\equiv 0$.

Если $k_j = 0$, то множество G_0^j содержит не менее $(2(1-\tau_j))^{-1}$ точек $z_{j,0,q}$. В случае $k_j \geqslant 1$ количество таких точек при фиксированном j равно $I_j \cdot 4^{k_j} \cdot 2^j$. В силу (3.8) имеем

$$I_j \cdot 4^{k_j} \cdot 2^j = \frac{1}{4} I_j \cdot 4^{k_j+1} 2^j > \frac{1}{4} I_j \cdot \frac{2^j}{2^j(1-\tau_j)} = \frac{1}{4(1-\tau_j)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(1-|z_i|) > c\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1-\tau_j)}\cdot(1-\tau_j) = \infty,$$

и $\{z_i\}$ не является последовательностью Бляшке.

Проверим теперь условие (3.2). Если $D(z,r)$ — круг с $\sigma < s(|z|)$, то $D(z,r)$ может пересекать не более одного из множеств G_m^j. Покажем, что

$$\text{если } D(z,r) \cap G_m^j \neq \varnothing, \text{ то } |z| > \tau_j. \tag{3.11}$$

Так как $s(|z|) < 1/16$, то $|z| > \tau_j - \frac{1}{15}(1-\tau_j)$. В противном случае

$$|z| + r < |z| + \frac{1}{16}(1-|z|) < \frac{1}{16} + \frac{15}{16}\left(\tau_j - \frac{1}{15}(1-\tau_j)\right) = \tau_j,$$

и $D(z,r)$ не может пересекать G_m^j (см. (3.10)). Значит, $s(|z|) < s(\tau_j - \frac{1}{15}(1-\tau_j))$ и

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\tau_j, G_0^j) &= 2s(\tau_j - \tfrac{1}{15}(1-\tau_j))(1-\tau_j) - \tfrac{1}{2}s(\tau_j)(1-\tau_j)\\ &> (2s(|z|) - \tfrac{1}{2}s(\tau_j))(1-\tau_j).\end{aligned}$$

Из этих оценок следует (3.11). Действительно, при $|z| \leqslant \tau_j$

$$\operatorname{dist}(z, G_m^j) \geqslant \operatorname{dist}(z, G_0^j) \geqslant \tfrac{3}{2}s(|z|)(1-\tau_j) > s(|z|)(1-|z|) > r,$$

и $D(z,r) \cap G_m^j = \varnothing$. Тем самым (3.11) доказано.

Предположим, что $D(z,r)$ пересекает G_m^j. Чтобы оценить κ_D, удобно рассмотреть обратное отображение $F_{j,m}^{-1}$. Положим $\mathcal{D}(Z,R) = F_{j,m}^{-1}(D)$. Так как $|z| > \tau_j$, то $R = r/(1-\tau_j) < \sigma$. Рассмотрим вначале случай (3.5), т.е. $k_j = 0$. Тогда

$$\kappa_D < c\frac{1}{1-\tau_j} \cdot \frac{R^2}{l_{j,0}^2} + 1.$$

Поскольку $R < \sigma < s(|z|) \leqslant s(\tau_j) = l_{j,0}$, можно применить (3.1) с $t_1 = R$ и $t_2 = s(\tau_j)$. В силу (3.1) и (3.5) имеем

$$\begin{aligned}\kappa_D &< \frac{c}{1-\tau_j}\frac{1}{b}\frac{h(R)}{h(s(\tau_j))} + 1 < \frac{c_1 h(R)}{1-\tau_j}\frac{2^j(1-\tau_j)}{h(\delta(\tau_j))} + 1 \\ &< c_1\frac{2^j h(\sigma)}{h(\delta(\tau_j))} + 1 < c_1\frac{2^{-j}h(\sigma)}{\alpha(\tau_j)h(\delta(\tau_j))} + 1 < c_1\frac{2^{-j}h(\sigma)}{\alpha(|z|)h(\delta(|z|))} + 1,\end{aligned} \tag{3.12}$$

и (3.2) выполнено.

В случае (3.6) $k_j \geqslant 1$, и в силу (3.8) и (3.7) имеем

$$4^{-k_j} < 4I_j 2^j(1-\tau_j) \leqslant \frac{h(\delta(\tau_j))}{h(s(\tau_j))},$$
$$4^{-k_j} \geqslant I_j 2^j(1-\tau_j) > \frac{1}{8}\frac{h(\delta(\tau_j))}{h(s(\tau_j))}.$$

Полагая в (3.9) $i = k_j$, получаем

$$h(l_{j,k_j}) \leqslant 4^{-k_j}h(s(\tau_j)) < h(\delta(\tau_j)), \tag{3.13}$$
$$h(l_{j,k_j}) \geqslant b4^{-k_j}h(s(\tau_j)) > \tfrac{b}{8}h(\delta(\tau_j)). \tag{3.14}$$

Чтобы установить (3.2), рассмотрим два случая.

1. $R < l_{j,k_j}$. Тогда мы рассуждаем, как и в случае $k_j = 0$: каждый квадрат из E_{j,k_j} содержит 2^j равномерно распределенных точек $Z_{j,q}$ и

$$\kappa_D < c2^j R^2/l_{j,k_j}^2 + 1.$$

Используя (3.1) с $t_1 = R$ и $t_1 = l_{j,k_j}$, а также (3.14) и последние два неравенства из (3.12), находим

$$\kappa_D < c2^j\frac{1}{b}\frac{h(R)}{h(l_{j,k_j})} + 1 < c_1\frac{2^j h(\sigma)}{h(\delta(\tau_j))} + 1 < c_1\frac{2^{-j}h(\sigma)}{\alpha(|z|)h(\delta(|z|))} + 1.$$

2. $l_{j,i} \leqslant R < l_{j,i-1}$ при некотором i, $1 \leqslant i \leqslant k_j$. Тогда $\mathcal{D}(Z,R)$ пересекает не более L квадратов со стороной $l_{j,i}$, где L — абсолютная постоянная. Каждый такой квадрат содержит 4^{k_j-i} квадратов со стороной l_{j,k_j}, и каждый из этих малых квадратов содержит 2^j точек $Z_{j,q}$. Следовательно, $\kappa_D \leqslant L4^{k_j-i}\cdot 2^j$. Применяя (3.9) и (3.14), получаем

$$\kappa_D \leqslant L2^j 4^{k_j}\frac{h(l_{j,i})}{bh(s(\tau_j))} < \frac{c2^j h(R)}{h(\delta(\tau_j))}.$$

Вновь рассуждая, как в (3.12), приходим к (3.2).

Поскольку $R < s(\tau_j) = l_{j,0}$, неравенство (3.2) доказано.

Осталось проверить условие (3.3). Так как $s(t) < 1/16$, то при $z \in G_m^j$ выполняются неравенства

$$|z| < \tau_j + \tfrac{3}{16}(1-\tau_j), \quad 1-|z| > \tfrac{13}{16}(1-\tau_j) > \tfrac{3}{4}(1-\tau_j).$$

В силу (1.14) для любых $z, a_i \in G_m^j$ и достаточно больших j имеем

$$\begin{aligned} -\log\left|\frac{z-a_i}{1-\overline{a}_i z}\right| &> \frac{1}{2}\log\frac{(1-|z|^2)(1-|a_i|^2)}{|z-a_i|^2} \\ &> \frac{1}{2}\log\frac{\frac{9}{16}\frac{32}{9}(1-\tau_j)^2}{|z-a_i|^2} = \log\frac{\sqrt{2}(1-\tau_j)}{|z-a_i|}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Пусть $Z = F_{j,m}^{-1}(z)$ и $A_{j,p} = F_{j,m}^{-1}(a_i)$ — прообразы точек z и a_i. При $k_j = 0$ в центре квадрата G_0^j имеется $[(2^j(1-\tau_j))^{-1}]$ точек a_i. Следовательно,

$$\begin{aligned} -\log|B(z)| &> -[(2^j(1-\tau_j))^{-1}]\log\left|\frac{z-a_i}{1-\overline{a}_i z}\right| \\ &> \frac{1}{2}\frac{1}{2^j(1-\tau_j)}\log\frac{\sqrt{2}}{|Z-A_{j,p}|} \\ &> \frac{1}{2}\frac{1}{2^j(1-\tau_j)}\log\frac{1}{s(\tau_j)} = \frac{s_0 P(\tau_j)}{2\cdot 2^j}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Предположим теперь, что $k_j \geqslant 1$. Тогда

$$-\log|B(z)| \overset{(3.15)}{>} \sum_{A_{j,p}\in E_{j,k_j}} \log\frac{\sqrt{2}}{|Z-A_{j,p}|} > \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{k_j} 4^{k_j-i}\log\frac{1}{l_{j,i}}. \tag{3.17}$$

Чтобы объяснить последнее неравенство, напомним, что при $k_j \geqslant 1$ множество E_{j,k_j} состоит из 4^{k_j} квадратов; в центре каждого из них находится точка $A_{j,p}$. Предположим, что точка Z принадлежит квадрату Q_{k_j} k_j-й генерации со стороной l_{j,k_j}. Найдется, и притом только одна, возрастающая последовательность квадратов $\{Q_i\}$, в которой каждый квадрат Q_i принадлежит i-й генерации, и

$$Q_{k_j} \subset Q_{k_j-1} \subset Q_{k_j-2} \subset \cdots \subset Q_0 = E_{j,0}.$$

Сторона квадрата Q_i равна $l_{j,i}$. Каждое слагаемое в последней сумме из (3.17) является оценкой снизу вклада в первую сумму от некоторых малых квадратов k_j-й генерации, содержащихся в Q_i, $i = k_j - 1, \dots, 0$.

a) Согласно (3.15), вклад в первую сумму из (3.17) от квадрата Q_{k_j} ограничен снизу величиной $\log(1/l_{j,k_j})$.

b) В Q_{k_j-1} имеется один квадрат k_j-й генерации, содержащий точку $A_{j,p}$, которая уже использовалась в a). Возьмем один из оставшихся квадратов k_j-й генерации. В силу (3.15) вклад в первую сумму от точки $A_{j,p}$ из этого квадрата ограничен снизу величиной $\log(1/l_{j,k_j-1})$.

c) Для каждого i в квадрате Q_i имеется один квадрат $(i+1)$-й генерации, содержащий точки $A_{j,p}$, которые уже использовались в оценке вклада от Q_{i+1}. Выберем один из оставшихся квадратов $(i+1)$-й генерации, содержащий 4^{k_j-i-1} квадратов генерации k_j, дающих, согласно (3.15), вклад $4^{k_j-i-1}\log(1/l_{j,i})$ в нашу оценку снизу значения $-\log|B(z)|$. Опуская вклады от всех оставшихся квадратов, получаем оценку в (3.17).

Применяя (3.9) мы видим, что последняя сумма в (3.17) ограничена снизу величиной

$$4^{k_j-2}\sum_{i=0}^{k_j} 4^{-i+1}\log\frac{1}{l_{j,i}} \geqslant \frac{4^{k_j-2}}{h(l_{j,0})}\sum_{i=1}^{k_j} h(l_{j,i-1})\log\frac{1}{l_{j,i}}$$
$$> \frac{4^{k_j-2}}{h(l_{j,0})}\sum_{i=1}^{k_j}\int_{l_{j,i}}^{l_{j,i-1}}\frac{h(t)}{t}\,dt = \frac{4^{k_j-2}}{h(l_{j,0})}\int_{l_{j,k_j}}^{l_{j,0}}\frac{h(t)}{t}\,dt.$$

В силу (3.13) имеем $l_{j,k_j} < \delta(\tau_j)$, и $\frac{4^{k_j-2}}{h(l_{j,0})} \geqslant \frac{1}{4h(\delta(\tau_j))}$. Следовательно, согласно (2.12),

$$-\log|B(z)| > \frac{1}{4h(\delta(\tau_j))}\int_{\delta(\tau_j)}^{s(\tau_j)}\frac{h(t)}{t}\,dt = \frac{1}{4}P(\tau_j),$$

что даже лучше, чем (3.16). Докажем теперь, что (3.3) следует из (3.16).

i) Пусть $0 < d \leqslant P(t)(1-t) \leqslant d_1 < \infty$. Учитывая, что $1 - |z_i| > \frac{1}{2}(1-\tau_j)$ при $z_i \in G_m^j$ (см. (3.10)), находим

$$P(|z_i|) \leqslant \frac{d_1}{1-|z_i|} < \frac{c}{1-\tau_j} < c_1 P(\tau_j),$$
$$-\log|B(z_i)| > c2^{-j}P(|z_i|) > \beta(|z_i|)P(|z_i|).$$

В последней цепочке неравенств мы использовали (3.4).

ii) Пусть $P(t)(1-t) \to \infty$. Тогда $s(t) \to 0$ и

$$\tau_j > |z_i| - 3s(\tau_j - \tfrac{1}{15}(1-\tau_j))(1-\tau_j) = |z_i| - o(1)(1-|z_i|).$$

Таким образом, (3.3) следует из (3.16) также и в этом случае. Доказательство теоремы 3.1 завершено. •

Замечание. Если $P(t+\frac{1}{2}(1-t)) < cP(t)$, то можно доказать несколько лучшее утверждение, чем теорема 3.1: неравенство (3.2) будет выполняться при всех $\sigma < 1/16$, и член $o(1-|z_i|)$ в (3.3) можно опустить. Доказательство по существу остается прежним: различие состоит в том, что мы полагаем $t_j = \tau_j + \frac{1}{8}(1-\tau_j)$.

Из теоремы 3.1 мы выведем два утверждения о точности теоремы 2.4, которые упоминались в §2.

Следствие 3.2. *Пусть $\alpha(t)$ — положительная функция на интервале* (0,1), *причем $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 1$. Положим $P(t) = 1/(1-t)$, $s_0 = 3$, и пусть измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию* (3.1). *Тогда найдутся произведение Бляшке $B(z) \not\equiv 0$ и последовательность $\{z_i\}$, не удовлетворяющая условию Бляшке, такие, что условие* (3.2) *выполняется для любого круга $D(z,r)$ с $\sigma := r/(1-|z|) < 1/16$ и функцией $\delta(t)$, определенной уравнением* (2.15), *и*

$$(1-|z_i|)\log|B(z_i)| \to -\infty \quad \text{при } i \to \infty. \tag{3.18}$$

Доказательство. При наших условиях $s(t) = e^{-3}$. Можно предполагать, что $\alpha(t)$ — непрерывная убывающая функция. Определим убывающую функцию $\delta_1(t)$ следующим соотношением:

$$h(\delta_1(t)) = \sqrt{\alpha(t)}h(\delta(t)).$$

Далее, рассмотрим уравнение

$$K(t,x) := \frac{1}{h(\delta_1(t))}\int_{\delta_1(t)}^{\eta(t,x)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau = x, \qquad \text{где } \eta(t,x) = \exp\{-(1-t)x\}.$$

i) Для фиксированного t это уравнение имеет единственное решение $x = P_1(t) > P(t) = (1-t)^{-1}$. Для доказательства этого заметим, что $\eta(t, P(t)) = e^{-1} > e^{-3} = s(t)$ и $\delta_1(t) < \delta(t)$. Следовательно,

$$K(t,P(t)) > \frac{1}{h(\delta(t))}\int_{\delta(t)}^{s(t)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau = P(t).$$

Но $K(t,x)$ является строго убывающей функцией переменной x и $K(t,P(t)) > P(t)$. Поэтому значение $x = P_1(t)$ определено однозначно, и $P_1(t) > P(t)$.

ii) Докажем, что $P_1(t)/P(t) \to \infty$ при $t \to 1$. Предположим противное, т.е. существует последовательность $\{t_n\} \uparrow 1$ такая, что $P_1(t_n)/P(t_n) < c$. Тогда $s_1(t) := \exp\{-P_1(t)(1-t)\} \geqslant e^{-c} = c_1 > 0$, $t \in \{t_n\}$, и

$$\frac{P_1(t)}{P(t)} = \frac{h(\delta(t))}{h(\delta_1(t))}\left\{\int\limits_{\delta_1(t)}^{s_1(t)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau \Big/ \int\limits_{\delta(t)}^{s(t)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau\right\} > c_2\frac{h(\delta(t))}{h(\delta_1(t))} \to \infty,$$
$$t \to 1, \quad t \in \{t_n\},$$

что противоречит нашему предположению и доказывает нужное утверждение.

Возьмем возрастающую функцию $P_2(t)$ такую, что $P_2(t) \leqslant P_1(t)$, $P_2(t)/P(t) \to \infty$, $P_2(t)(1-t)$ не возрастает и $P_2(t+\frac{1}{2}(1-t)) < cP_2(t)$ при некоторой постоянной $c > 1$. Определим функцию $\delta_2(t)$ как решение следующего уравнения относительно δ:

$$\frac{1}{h(\delta)}\int\limits_{\delta}^{s_2(t)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau = P_2(t); \quad s_2(t) := \exp\{-P_2(t)(1-t)\}.$$

Так как $P_2(t) \leqslant P_1(t)$, то $s_2(t) \geqslant \eta(t, P_1(t))$ и $\delta_2(t) \geqslant \delta_1(t)$. Поэтому

$$\sqrt{\alpha(t)}h(\delta_2(t)) \geqslant \sqrt{\alpha(t)}h(\delta_1(t)) \geqslant \alpha(t)h(\delta(t)).$$

Положим теперь $\alpha_2(t) = \sqrt{\alpha(t)}$ и $\beta_2(t) = \sqrt{P(t)/P_2(t)}$. Заменяя α, β и P в теореме 3.1 функциями α_2, β_2 и P_2, получаем следствие 3.2 (мы пользуемся также замечанием после доказательства теоремы 3.1). •

В следствии 3.2 нет никаких условий относительно сходимости интеграла $\int_0 h(t)\,dt/t$. Если дополнительно предположить, что выполнено условие (2.10) (т. е. что интеграл сходится), то в силу (2.15) $h(\delta(t)) \approx 1-t$, $t \to 1$, т. е. найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$c^{-1} \leqslant \frac{h(\delta(t))}{1-t} \leqslant c, \quad t \text{ близко к } 1.$$

Таким образом, следствие 3.2 демонстрирует также точность теоремы 2.4: мы не можем заменить (2.11) условием (2.14).

Рассмотрим теперь необходимость условия (2.10) в теореме 2.4.

Следствие 3.3. *Предположим, что измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию* (3.1) *и*

$$\int_0 \frac{h(t)}{t}\,dt = \infty. \tag{3.19}$$

Тогда найдутся произведение Бляшке $B(z) \not\equiv 0$ и последовательность $\{z_i\}$, не являющаяся последовательностью Бляшке, которые удовлетворяют условиям (2.11) *и* (3.18).

Доказательство. Положим $P(t) = 1/(1-t)$, $s_0 = 3$ и

$$\frac{1}{\alpha(t)} := \int_{\delta(t)}^{s(t)} \frac{h(\tau)}{\tau}\,d\tau.$$

Так как $s(t) = e^{-3}$, то в силу (3.19) $\alpha(t) \to 0$ при $t \to 1$. Из (2.15) получаем $1-t = h(\delta(t))\alpha(t)$. Поэтому (2.11) следует из (3.2), и следствие 3.3 немедленно получается из следствия 3.2. •

Из следствия 3.2 вытекает, что в случае $P(t)(1-t) \leqslant d < \infty$ теорему 3.1 можно улучшить: правую часть в (3.3) можно заменить выражением $-\phi(|z_i|)P(|z_i|)$, где $\phi(|z_i|) \to \infty$ при $i \to \infty$. Следующий пример показывает, что в общем случае такое улучшение невозможно. Более того, мы не можем даже заменить значения $\beta(|z_i|)$ в (3.3) сколь угодно малой постоянной.

Пример 3.4. Если $s_0 = 1$ и

$$P(t) = P_p(t) = \frac{1}{1-t}\log\frac{1}{1-t}, \quad h(t) = t,$$

то $s(t) = (1-t)^p$. В силу (2.15) $s(t) - \delta(t) = P_p(t)\delta(t)$,

$$\delta(t) = s(t)/(P_p(t)+1) = (1-t)^p/(P_p(t)+1).$$

Применим теорему 3.1 с $P(t) = P_1(t)$ и теорему 2.5 с $P(t) = P_2(t) = 2P_1(t)$. По теореме 3.1 найдутся $B(z) \not\equiv 0$ и $\{z_i\}$ такие, что

$$\kappa_D \leqslant \frac{(P_1(|z|)+1)\sigma}{\alpha(|z|)(1-|z|)} + 1,$$
$$\log|B(z_i)| < -\beta(|z_i|)P_1(|z_i|),$$

где $\alpha(t) \to 0$, $\beta(t) \to 0$ при $t \to 1$. По теореме 2.5, если

$$\kappa_D \leqslant M\frac{(2P_1(|z|)+1)\sigma}{(1-|z|)^2} + 1,$$
$$\log|B(z_i)| < -2\varepsilon P_1(|z_i|), \quad \varepsilon > 0,$$

то $B(z) \equiv 0$. Таким образом, если заменить $\beta(|z_i|)$ постоянной 2ε и положить $\alpha(t) = 1 - t$, то условия теоремы 2.5 будут выполнены, и мы придем к противоречию.

Тем не менее в некоторых случаях возможно заменить множитель $\alpha(|z|)$ в условии (3.2) теоремы 3.1 некоторой положительной постоянной.

Предложение 3.5. *Пусть $P(t)$ и $s(t)$ такие же функции, как в теореме 2.5. Предположим, далее, что $\beta(t) \to 0$ при $t \to 1$ и что $h(t)$ удовлетворяет условиям (2.26) и (3.1). Тогда существуют произведение Бляшке $B(z) \not\equiv 0$ и последовательность $\{z_i\}$, не удовлетворяющая условию Бляшке, такие что*

$$\kappa_D \leqslant \frac{Mh(\sigma)}{(1-|z|)h(s(|z|))} + 1 \tag{3.20}$$

и выполнено (3.3).

Как мы видели при доказательстве следствия 2.6, из условия (3.20) (которое по существу совпадает с (2.27)) следует неравенство

$$\kappa_D \leqslant \frac{Mh(\sigma)}{h(\delta(|z|))} + 1,$$

т. е. условие (3.2) с константой вместо функции $\alpha(|z|)$. Таким образом, при условии (2.26) теорема 3.1 может быть улучшена. Предложение 3.5 показывает также, что следствие 2.6 является точным.

Доказательство предложения 3.5. Как и в доказательстве теоремы 3.1, возьмем числа $\tau_j \in (0,1)$ такие, что

$$\beta(\tau_j) < 2^{-2j}, \quad 1 - \tau_{j+1} < \tfrac{1}{3}(1 - \tau_j).$$

Используя обозначения из доказательства теоремы 3.1, равномерно распределим $[(1-\tau_j)^{-1}]$ точек z_i на квадрате G_0^j. Далее, в центр квадрата G_0^j поместим точки a_i с кратностью $[(2^j(1-\tau_j))^{-1}]$. Легко видеть, что последовательность $\{a_i\}$ удовлетворяет условию Бляшке, а последовательность $\{z_i\}$ не удовлетворяет этому условию. Как и в (3.12), используя (3.1), выводим, что

$$\kappa_D < \frac{c}{1-\tau_j}\frac{R^2}{l_{j,0}^2} + 1 < \frac{c}{1-\tau_j}\frac{1}{b}\frac{h(R)}{h(s(\tau_j))} + 1 < \frac{Mh(\sigma)}{(1-|z|)h(s(|z|))} + 1.$$

Справедливость условия (3.3) устанавливается точно так же, как и в (3.16), и предложение 3.5 доказано. •

В некоторых случаях даже не обязательно распределять точки z_i по квадрату G_0^j равномерно. Например, при $h(t) = t$ можно распределить точки равномерно на интервалах $G_0^j \cap \mathbb{R}$. В этом случае (3.20) выполнено, и мы видим, что утверждение из примера 2.7 является точным.

При $h(t) = t^2$, $s_0 = 1$ и $P(t) = \frac{p-3/2}{1-t}\log\frac{1}{1-t}$ с $p > 3/2$ имеем $s(t) = (1-t)^{p-3/2}$. Следовательно, (3.20) имеет вид

$$\kappa_D \leqslant \frac{M\sigma^2}{(1-|z|)^{2p-2}} + 1 = \frac{Mr^2}{(1-|z|)^{2p}} + 1. \tag{3.21}$$

Таким образом, в этом случае (3.20) следует из (2.29) (см. пример 2.8). Обратно, для круга $D = D(z_j, r)$ с $r < M^{-1/2}(1-|z_j|)^p$ условие (3.21) дает $\kappa_D = 1$. Следовательно,

$$|z_j - z_k| \geqslant M^{-1/2}(1-|z_j|)^p, \quad j \neq k,$$

и мы получаем (2.29). Итак, для указанных выше функций h и P условия (3.20) и (2.29) эквивалентны. В этом частном случае аналог предложения 3.5 был установлен Хейманом [Ha2, пример 4, с. 133–134].

Замечание. В следствиях 3.2 и 3.3 можно ослабить условие (3.1) и заменить его следующим:

$$h(t_1)t_1^{-2} \geqslant h(t_2)t_2^{-\beta}, \quad \beta > 0, \quad \text{для всех } 0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant r_0.$$

Это следует из леммы 2.1 и примера 2.1 из [Ei7]. Мы опускаем подробности.

§4. Теоремы единственности с заданной скоростью убывания: случай $P(t)(1-t) \to 0$

В данном параграфе всегда предполагается, что $P : [0,1) \to [P_0, \infty)$, $P_0 \geqslant 0$, — непрерывная неубывающая функция и что

$$P(t)(1-t) \to 0 \quad \text{при } t \to 1. \tag{4.1}$$

Пример $f(z) = \exp(-1/(1-z))$ показывает, что в этом случае из условия $\log|f(z_k)| < -P(|z_k|)$ не следует тождество $f \equiv 0$, если последовательность $\{z_k\}$ расположена на радиусе. Поэтому мы должны наложить либо более сильное условие разделения, чтобы получить лучшее рассеяние точек $\{z_k\}$, либо некоторое условие на множество предельных точек последовательности на ∂U. Ю. И. Любарский и К. Сейп [LS] доказали следующую теорему (которую мы приводим в несколько измененной, но эквивалентной форме).

Теорема 4.1 (Любарский и Сейп [LS]). *Чтобы для любой последовательности* $\{z_k\}$, *удовлетворяющей условию* (0.3) *и условию разделения*

$$\inf_{n \neq k} \left| \frac{z_n - z_k}{1 - \overline{z}_n z_k} \right| = \delta > 0, \tag{4.2}$$

и для любой функции $f \in H^\infty$ *из неравенств*

$$\log |f(z_k)| < -P(|z_k|), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{4.3}$$

следовало тождество $f \equiv 0$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)P(t)} < \infty. \tag{4.4}$$

Близкие результаты для специальных классов последовательностей, удовлетворяющих условиям (0.3) и (4.2), были получены А. Боричевым (см. теорему 3 в [NPT]), а также Дж. По и П. Дж. Тома [PT].

Для последовательностей, не удовлетворяющих условию Бляшке, рассеяние точек $\{z_k\}$ в теореме 4.1 обеспечивается условием (4.2). Полагая $P(t) = (1-t)^{-1/2}$, мы выведем из теоремы 4.1 усиленную версию теоремы 2.3 с нулем в правой части неравенства (2.9). Эти утверждения вытекают из следующей леммы, показывающей, что условия на $\{z_k\}$ в теоремах 2.3 и 4.1 по существу одинаковы.

Лемма 4.2. *Пусть* $\{z_k\}$ *не является последовательностью Бляшке, и каждый неевклидов круг с радиусом* $\widetilde{\chi} \leqslant \widetilde{\chi}_0$ *содержит не более* M *точек из* $\{z_k\}$. *Тогда найдется подпоследовательность, для которой также не выполнено условие Бляшке, и которая удовлетворяет условию* (4.2).

Доказательство. Будем рассуждать, как и при доказательстве теоремы 2.5. Можно предполагать, что $|z_{i+1}| \geqslant |z_i|$. Положим $z'_1 = z_1$. Удалим все точки z_i из открытого неевклидова круга с центром z'_1 и радиусом $\widetilde{\chi}_0$, кроме z'_1. Как и прежде, пусть $z'_2 = z_{i_2}$ — точка последовательности, лежащая вне этого круга и имеющая наименьший индекс i_2. Заметим, что $\widetilde{\chi}(z'_1, z'_2) \geqslant \widetilde{\chi}_0$. Далее, удалим все точки z_i из неевклидова круга с центром z'_2 и радиусом $\widetilde{\chi}_0$, кроме z'_2. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательность разделенных точек z'_k. На каждом шаге мы удаляли не более M точек. Поэтому $\{z'_k\}$ не является последовательностью Бляшке. •

Разумеется, можно применить теорему 4.1 также в случае $P(t)(1-t) \geqslant d > 0$ и вывести тождество $f \equiv 0$ из (4.3). Но в этом случае условие разделения (4.2) является излишне ограничительным (ср., например, (4.2) и (2.11)!). Какова связь между условием убывания (4.3) и условием разделения в случае (4.1)?

Мы применим подход, отличный от метода, использованного Любарским и Сейпом, и основанный на оценках функции f вне исключительного множества, полученных Говоровым и Гришиным (см. теорему 2.10). Основным инструментом является следующая лемма (определение величины κ_D см. в теореме 2.4).

Лемма 4.3. *Предположим, что* $P_1(t)$, $t \in (0,1)$, *— неубывающая функция, а функция* $\phi(t)$, $t \in (0,1)$, *такова, что* $(1-t)\phi(t) \geqslant c > 0$ *и* $\alpha\phi(t) < \phi(t+\frac{1}{2}(1-t)) < \alpha^{-1}\phi(t), \alpha \in (0,1)$.

1. *Пусть последовательность* $\{z_n\} \subset U$ *удовлетворяет условию разделения*

$$\kappa_D \leqslant M\phi(|z|)r + 1 \tag{4.5}$$

для любого круга $D(z,r)$ *с* $\sigma := r/(1-|z|) < 1/4$. *Если* $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$ *и*

$$\log|f(z_k)| \leqslant -P_1(|z_k|)T_{1/f}(1), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.6}$$

то

$$N_z(t) < M_1\phi(t)/P_1(t) + A_2N_a(t), \quad t \in [1/2, 1), \tag{4.7}$$

где $N_z(t)$ *— количество точек* z_k *в кольце* $Y_t := \{t \leqslant |z| < t + \frac{1}{8}(1-t)\}$, $N_a(t)$ *— количество нулей* a_k *функции* f *в кольце* $\{t - \frac{1}{2}(1-t) \leqslant |z| \leqslant t + \frac{1}{2}(1-t)\}$, *постоянная* M_1 *зависит только от* M, c *и* α, *и* A_2 *— абсолютная постоянная.*

2. *Пусть функция* $P_1(t)$ *такова, что функция* $P_1(t)(1-t)$ *не убывает и стремится к* 0 *при* $t \to 1$. *Тогда найдутся последовательность* $\{z_n\} \subset U$ *и число* $t_0 \in [3/4, 1)$ *со следующими свойствами: выполнено условие* (4.5) *с постоянной* M *из* (4.5), *зависящей только от* α,

$$N_z(t) > M_2\phi(t)/P_1(t) + 1, \quad t \in [t_0, 1), \; M_2 = M_2(\alpha) \tag{4.8}$$

и для любого $T > 0$ *найдется нетривиальная функция* $f \in H^\infty$ *с* $T_{1/f}(1) = T$, *удовлетворяющая условию* (4.6).

Условие $(1-t)\phi(t) \geqslant c > 0$ естественно, поскольку в случае $(1-t)\phi(t) = c$ условия (4.5) и (4.2) эквивалентны; если же $(1-t)\phi(t) \to 0$ и $\sigma < 1/4$, то мы имеем, как и прежде, условие (4.2).

Доказательство леммы 4.3. 1. Зафиксируем $t \in [1/2, 1)$ и положим $P = P_1(t)/A_1$, где A_1 — постоянная из теоремы 2.10. Пусть $\{D^k(w_k, r_k)\}$ — кружки, удовлетворяющие условиям (2.35) и (2.36). В силу (2.35)

$$\log|f(z)| > -P_1(t)T_{1/f}(1) \geqslant -P_1(|z|)T_{1/f}(1), \quad z \in Y_t \setminus \bigcup_k D^k.$$

Следовательно, если $z_n \in Y_t$ и выполнено (4.6), то $z_n \in \bigcup_k D^k$. Разделим кружки $D^k(w_k, r_k)$, пересекающие Y_t, на две группы.

a) $r_k > \frac{1}{8}(1-t)$. Для каждого k покроем множество $Y_t \cap D^k$ кругами $D_j^k(w_{k,j}, \frac{1}{2}(1-t))$ с $|w_{k,j}| = t$. Легко видеть, что количество таких кругов не превосходит $A_3 r_k/(1-t)$, где A_3 — абсолютная постоянная. Согласно (4.5), каждый круг D_j^k содержит не более

$$\frac{1}{2}M\phi(t)(1-t)+1 < \left(\frac{M}{2}+\frac{1}{c}\right)\phi(t)(1-t)$$

точек z_n (здесь мы использовали условие $(1-t)\phi(t) \geqslant c$). Поэтому

$$\kappa_{D^k} < A_3\frac{r_k}{1-t}\left(\frac{M}{2}+\frac{1}{c}\right)\phi(t)(1-t) = M_3 r_k \phi(t),$$

и количество точек z_k во всех кругах из первой группы не превосходит $M_3 \sum r_k \phi(t) < M_3\phi(t)/P$ (см. (2.36)).

b) $r_k \leqslant \frac{1}{8}(1-t)$. В силу (4.5), $\kappa_{D^k} \leqslant M_4\phi(t)r_k + 1$, где $M_4 = M_4(M, \alpha)$. Из соотношений (2.37) и $D^k \cap \partial U = \varnothing$ следует, что круг D^k содержит хотя бы один нуль функции f. Так как каждый нуль принадлежит не более чем A_2 кругам, то количество кругов во второй группе не превосходит $A_2 N_a(t)$. Значит, количество точек z_n в объединении этих кругов не превосходит

$$\sum(M_4\phi(t)r_k+1) \leqslant M_4\phi(t)\sum r_k + A_2N_a(t) < M_4\phi(t)P^{-1} + A_2N_a(t).$$

Тем самым первая часть леммы доказана.

2. Наша функция f будет того же типа, что и функция f из теоремы 4.1. Можно предполагать, что $P_1(1/2) \geqslant 2$. В противном случае мы увеличим функцию $P_1(t)$ на интервале $(1/2, 3/4)$, но так, чтобы функция $(1-t)P_1(t)$ осталась невозрастающей при $t \in [1/2, 1)$. Определим числа τ_j из уравнения

$$M_5P_1(\tau_j)(1-\tau_j) = 2^{-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

где число M_5 будет выбрано позднее. Положим $l_j = 1-\tau_j$, $j = 0, 1, \dots$ Легко видеть, что $l_{j+1}/l_j \leqslant 1/2$. Следовательно, корректно определено линейное канторово множество $E = E(\{l_j\})$. Пусть $E_c = \{e^{i\varphi} : \varphi \in E\}$. На E_c распределим меру μ так, что каждая из 2^j дуг длины l_j несет меру, равную $2^{-j}T_1$. Положим

$$u(z) = \int\limits_{E_c}\frac{1-|z|^2}{|z-\zeta|^2}\,d\mu(\zeta),$$

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\zeta\in E_c}\{z \in U : |z| > \tau_0,\ |z-\zeta| < 2(1-|z|)\}.$$

Пусть v — гармоническая функция, сопряженная с u, и пусть $f(z) = \exp\{-u(z) - iv(z)\}$. Тогда $T_{1/f}(r) = -\log|f(0)| = \mu(E_c) = T_1$.

Зафиксируем точку $z \in \mathcal{E}$, и пусть $\tau_{j-1} \leqslant |z| < \tau_j$. Так как функция $P_1(t)(1-t)$ не убывает, имеем

$$\begin{aligned} -\log|f(z)| &= u(z) > a_1(1-|z|)^{-1}2^{-j}T_1 \\ &= a_1 2^{-1}(1-|z|)^{-1}M_5 P_1(\tau_{j-1})(1-\tau_{j-1})T_1 \geqslant a_1 2^{-1} M_5 P_1(|z|)T_1, \end{aligned}$$

где a_1 — абсолютная постоянная. Поэтому если $M_5 = 2/a_1$, то

$$\log|f(z)| < -P_1(|z|)T_1 \quad \text{для всех } z \in \mathcal{E}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} |\{\zeta : |\zeta| = |z|\} \cap \mathcal{E}| &> a_2(1-|z|)2^j = a_3(1-|z|)\{M_5 P_1(\tau_j)(1-\tau_j)\}^{-1} \\ &\geqslant a_3\{M_5 P_1(|z|)\}^{-1}, \end{aligned}$$

где a_3 — абсолютная постоянная.

Положим $t_j = 1 - (8/9)^j$. На каждом множестве $\Gamma_j = \{|\zeta| = t_j\} \cap \mathcal{E}$ распределим точки $z_{j,k}$ так, чтобы $\operatorname{dist}(z_{j,k}, z_{j,n}) \geqslant 1/\phi(t_j)$, $k \neq n$. Поскольку $|\Gamma_j| > a_3\{M_5 P_1(t_j)\}^{-1}$, можно взять не менее $a_3\phi(t_j)\{M_5 P_1(t_j)\}^{-1} + 1$ таких точек для каждого j. Объединение $\bigcup_{j,k} z_{j,k}$ определяет последовательность $\{z_n\}$ с нужными свойствами. Ясно, что (4.5) и (4.6) выполнены. Для проверки свойства (4.8) покажем, что для любого $t \in (\tau_0, 1)$ интервал $(t, t + \frac{1}{8}(1-t))$ содержит хотя бы одну точку t_j. Пусть $t_j \leqslant t < t_{j+1}$. Тогда

$$1 - t_{j+1} = \left(\frac{8}{9}\right)^{j+1} = \frac{8}{9}(1-t_j) \geqslant \frac{8}{9}(1-t) > \frac{7}{8}(1-t).$$

Значит, $t_{j+1} < 1 - \frac{7}{8}(1-t) = t + \frac{1}{8}(1-t)$, и $t_{j+1} \in (t, t + \frac{1}{8}(1-t))$.

Так как функция $P_1(t)(1-t)$ не убывает, имеем

$$P_1(t_{j+1}) = \frac{P_1(t_{j+1})(1-t_{j+1})}{1-t_{j+1}} < \frac{P_1(t)(1-t)}{\frac{7}{8}(1-t)} = \frac{8}{7}P_1(t).$$

Таким образом,

$$N_z(t) \geqslant \frac{a_3}{M_5}\frac{\phi(t_{j+1})}{P_1(t_{j+1})} + 1 > M_2\frac{\phi(t)}{P_1(t)} + 1, \quad M_2 = M_2(\alpha),$$

и доказательство леммы 4.3 завершено. •

Для вывода из леммы 4.3 теорем единственности мы должны найти условия на последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющую (4.5), из которых следует, что

$$\limsup_{t\to 1} N_z(t)\{M_1\phi(t)/P_1(t)+A_2N_a(t)\}^{-1}=\infty \tag{4.9}$$

для любой функции $f\in H^\infty$. Если выполнено условие (4.6), то $f\equiv 0$.

Следствие 4.4. *Пусть функция $\phi(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4.3. Если $\{z_n\}$ не является последовательностью Бляшке, выполнено (4.5) и*

$$\limsup_{t\to 1} P(t)N_z(t)/\phi(t)=\infty, \tag{4.10}$$

то из (4.3) следует, что $f\equiv 0$, если только $f\in H^\infty$.

Доказательство. Пусть задана функция $f\in H^\infty$. Возьмем $P_1(t)=P(t)/T_{1/f}(1)$. Тогда условия (4.3) и (4.6) эквивалентны. Осталось установить (4.9). Так как $\{z_n\}$ удовлетворяет (0.3), то найдется последовательность $\{x_i\}\subset(0,1)$ такая, что $N_a(x_i)/N_z(x_i)\to 0$ при $i\to\infty$. Отсюда и из (4.10) получаем

$$\limsup_{t\to 1}\left\{\frac{M_1T_{1/f}(1)\phi(t)}{P(t)N_z(t)}+\frac{A_2N_a(t)}{N_z(t)}\right\}^{-1}=\infty,$$

что противоречит неравенству (4.7). Тем самым следствие 4.4 доказано. •

При дополнительных предположениях относительно $\phi(t)$ и $P(t)$ условие (4.10) можно ослабить. Обозначим через $\kappa(t)$ количество точек из $\{z_n\}$ в круге $\{|z|<t\}$.

Следствие 4.5. *Пусть функция $\phi(t)$ удовлетворяет условиям леммы 4.3 и $P(t)/\phi(t)\approx c(1-t)^p$ с некоторым $p\geqslant 1$.*

1. *Если для последовательности $\{z_n\}$ выполнено условие (4.5) и*

$$\limsup_{t\to 1}\kappa(t)(1-t)^p>0, \tag{4.11}$$

и если

$$P(|z_n|)^{-1}\log|f(z_n)|\to-\infty,\quad n\to\infty,$$

то $f\equiv 0$, если только $f\in H^\infty$.

2. *Если $P(t)(1-t)$ — невозрастающая функция, то для любого $T>0$ найдутся последовательность $\{z_n\}\subset U$, удовлетворяющая условиям (0.3), (4.5), (4.11), и нетривиальная функция $f\in H^\infty$ такая, что*

$$\log|f(z_n)|<-TP(|z_n|).$$

Доказательство. 1. Из (4.11) следует, что $\{z_n\}$ не является последовательностью Бляшке. Покажем, что

$$\limsup_{t\to 1} N_z(t)(1-t)^p > 0. \tag{4.12}$$

Положим $t_j = 1-(7/8)^j$. Если (4.12) не выполнено, то найдется последовательность $\{\varepsilon_j\} \downarrow 0$ такая, что

$$N_z(t_j) < \varepsilon_j/(1-t_j)^{-p}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Если $t_{k-1} \leqslant t < t_k$, то

$$\kappa(t) \leqslant c\sum_{j=1}^{k} N_z(t_j) = o\left(\sum_{j=1}^{k}(1-t_j)^{-p}\right) = o\left((1-t_j)^{-p}\right).$$

Противоречие с (4.11) показывает, что (4.12) имеет место.

Зафиксируем $f \in H^\infty$. Из наших условий следует существование возрастающей функции $P_1(t)$, для которой $P_1(t)/P(t) \to \infty$ при $t \to 1$ и выполнено (4.3) с P_1 вместо P. Кроме того,

$$\limsup_{t\to 1}\frac{P_1(t)N_z(t)}{\phi(t)} = \limsup_{t\to 1}\frac{P_1(t)}{P(t)}\frac{P(t)N_z(t)}{\phi(t)} \geqslant c\limsup_{t\to 1}\frac{P_1(t)}{P(t)}N_z(t)(1-t)^p = \infty.$$

Наше утверждение вытекает из следствия 4.4.

2. Для доказательства второй части следствия 4.5 нужно взять $P_1 = P$ в ч. 2 леммы 4.3. •

Следствие 4.6. *Пусть функция $\phi(t)$ удовлетворяет условиям леммы* 4.3.

1. *Предположим, что для последовательности $\{z_n\}$ выполнено* (4.5) *и*

$$\limsup_{r\to 1}\sum_{|z_n|<r}(1-|z_n|)\left\{\int_0^r \frac{\phi(t)}{P(t)}\,dt\right\}^{-1} = \infty. \tag{4.13}$$

Если $f \in H^\infty$ и справедливо (4.3), *то $f \equiv 0$.*

2. *Если $P(t)(1-t)$ — невозрастающая функция, то для любого $T > 0$ найдутся последовательность $\{z_n\} \subset U$ и нетривиальная функция $f \in H^\infty$, удовлетворяющие условиям* (4.3), (4.5) *и такие, что*

$$\sum_{|z_n|<r}(1-|z_n|)\left\{\int_0^r \frac{\phi(t)}{P(t)}\,dt\right\}^{-1} \geqslant T, \quad r \in (r_0, 1).$$

Доказательство. 1. Как и при доказательстве следствия 4.4, положим $P_1(t) = P(t)/T_{1/f}(1)$. Достаточно установить (4.9). Предположим, что равенство (4.9) неверно. Пусть $t_j = 1 - (7/8)^j$. Если $t_{k-1} \leqslant r < t_k$, то

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n|<r} (1 - |z_n|) &\approx \sum_{j=1}^{k-1} N_z(t_j)(1 - t_j) \\ &< c_1 \sum_{j=1}^{k-1} \phi(t_j)(1 - t_j)/P(t_j) + c_2 \sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|) \\ &< c_3 \int_1^k \frac{\phi(1 - (7/8)^x)(7/8)^x}{P(1 - (7/8)^x)}\, dx + c_4 < c_5 \int_0^r \frac{\phi(t)}{P(t)}\, dt + c_4, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $t = 1 - (7/8)^x$. Это неравенство противоречит (4.13). Таким образом, (4.9) выполнено и первая часть следствия 4.6 доказана.

2. Возьмем $P_1(t) = P(t)/T_1$, где постоянная T_1 будет выбрана позднее, и рассмотрим $\{z_n\}$ и f из второй части леммы 4.3. Тогда (4.3) и (4.5) выполнены. Используя (4.8) и те же рассуждения, что и в (4.14), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n|<r} (1 - |z_n|) &> c \sum_{j=1}^{k} \phi(t_j)(1 - t_j)/P_1(t_j) \\ &> c' T_1 \int_0^r \frac{\phi(t)}{P(t)}\, dt > T \int_0^r \frac{\phi(t)}{P(t)}\, dt, \end{aligned}$$

если T_1 достаточно велико, что доказывает вторую часть следствия 4.6. •

Следствие 4.7. *Пусть функция $\delta(t)$ такова, что $0 < \delta(t) < 1/2$ и $\delta(t + \frac{1}{2}(1 - t)) \approx \delta(t)$, $0 < t < 1$.*

1. *Если последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям*

$$|z_j - z_k| > c\delta(|z_k|)(1 - |z_k|) \quad \textit{при всех } j \neq k, \tag{4.15}$$

$$\limsup_{r \to 1} \sum_{|z_n|<r} (1 - |z_n|) \left\{ \int_0^r \frac{dt}{(1 - t)P(t)\delta(t)^2} \right\}^{-1} = \infty, \tag{4.16}$$

то для любой $f \in H^\infty$ из условия (4.3) следует, что $f \equiv 0$.

2. *Если* $P(t)(1-t)$ *— невозрастающая функция, то для любого* $T > 0$ *найдутся последовательность* $\{z_n\}$ *и нетривиальная функция* $f \in H^\infty$, *удовлетворяющие условиям* (4.3), (4.15) *и такие, что*

$$\sum_{|z_n|<r} (1-|z_n|)\left\{\int_0^r \frac{dt}{(1-t)P(t)\delta(t)^2}\right\}^{-1} \geqslant T, \quad r \in (r_0, 1).$$

Доказательство. 1. Из (4.15) выводим, что для любого круга $D(z,r)$ с $\sigma < 1/4$ справедливы оценки

$$\kappa_D < c\left[\frac{r}{\delta(|z|)(1-|z|)}\right]^2 + 1 < c\frac{r}{\delta(|z|)^2(1-|z|)} + 1.$$

Наше утверждение следует теперь из следствия 4.6 с $\phi(t) = \left\{(1-t)\delta(t)^2\right\}^{-1}$.

2. Как и прежде, положим $P_1(t) = P(t)/T_1$. Докажем, что существует последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющая условиям (4.15), (4.8) с $\phi(t) = \left\{(1-t)\delta(t)^2\right\}^{-1}$ и лежащая в множестве $\mathcal{E}$, определенном во второй части доказательства леммы 4.3. Пусть $t_j = 1-(8/9)^j$,

$$k_j := [(t_{j+1}-t_j)/((1-t_j)\delta(t_j))] + 1 = [(9\delta(t_j))^{-1}] + 1,$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа, и пусть

$$\Gamma_{j,l} = \{\zeta : |\zeta| = t_j + l(t_{j+1}-t_j)/k_j\} \cap \mathcal{E}, \quad l = 0, 1, \ldots, k_j - 1.$$

Так как $|\Gamma_{j,l}| > c_1(P_1(t_j))^{-1}$, то в каждом множестве $\Gamma_{j,l}$ можно выбрать не менее чем $c_2\left\{P_1(t_j)\delta(t_j)(1-t_j)\right\}^{-1} + 1$ точек, удовлетворяющих (4.15). Таким образом,

$$\begin{aligned} N_z(t_j) &> c_3 k_j \left\{P_1(t_j)\delta(t_j)(1-t_j)\right\}^{-1} + 1 \\ &> c_3\left\{P_1(t_j)\delta(t_j)^2(1-t_j)\right\}^{-1} + 1, \end{aligned}$$

и мы доказали (4.8) с $\phi(t) = \left\{(1-t)\delta(t)^2\right\}^{-1}$. Так как $\{z_n\} \subset \mathcal{E}$, то (4.3) выполнено. Заключительная часть доказательства точно такая же, как и в доказательстве следствия 4.6. •

При $r \approx (1-|z|)$ условие (4.15) допускает по существу то же самое количество точек z_n в круге $D(z,r)$, что и условие (4.5) с $\phi(t) = \left\{(1-t)\delta(t)^2\right\}^{-1}$. Тем не менее условие (4.5) является гораздо более гибким: мы можем, например, поместить все точки из D на одну и ту же дугу $\{|\zeta| = |z|\}$, что невозможно при условии (4.15).

И. В. Островский нашел прямое доказательство первой части следствия 4.7, используя только свойство среднего значения супергармонических функций (Любарский и Сейп использовали подобный метод в [LS]) и одно дополнительное условие на P: $\beta P(t + \frac{1}{2}(1-t)) \leqslant P(t)$ при t, близких к 1, где $\beta < 1$ — положительная постоянная. Мы признательны И. В. Островскому за разрешение включить его изящное доказательство в нашу работу. Его рассуждение состоит в следующем. Из (4.15) вытекает, что круги $D_k := \{|z - z_k| < \frac{1}{2}c\delta(|z_k|)(1 - |z_k|)\}$ взаимно не пересекаются. Положим $\delta_1(t) = c\delta(t)/2$. Пусть задана функция $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$, и пусть $\{n_j\}$ — множество индексов таких, что круги $\{D_{n_j}\}$ не содержат нулей $\{a_k\}$ функции f. Так как $\{a_k\}$ — последовательность Бляшке, имеем

$$\sum_{k \notin \{n_j\}} (1 - |z_k|) < \infty,$$

и (4.16) выполнено также, если сумма в (4.16) берется по $k \in \{n_j\}$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что $\|f\|_\infty \leqslant 1$. В противном случае мы рассмотрим $f_1 = f/\|f\|_\infty$ и $P_1(t) = P(t) + \log \|f\|_\infty$ и заметим, что из (4.16) следует то же самое соотношение с P_1 вместо P. Итак, $u(z) = -\log|f(z)|$ является неотрицательной супергармонической функцией в U.

Чтобы прийти к противоречию, предположим, что (4.3) выполнено, т. е. $u(z_k) > P(|z_k|)$. Полагая $z = x + iy$ и $|z| = t$, при $k \in \{n_j\}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{|z_k|<r} (1 - |z_k|) \\
&\quad \leqslant \sum_{|z_k|<r} (1 - |z_k|) \frac{u(z_k)}{P(|z_k|)} \\
&\quad = \sum_{|z_k|<r} \frac{1 - |z_k|}{P(|z_k|)} \frac{1}{\pi(1 - |z_k|)^2 \delta_1(|z_k|)^2} \iint\limits_{|z - z_k| < \delta_1(|z_k|)(1 - |z_k|)} u(z)\, dx dy \\
&\quad \leqslant \sum_{|z_k|<r} c_1 \iint\limits_{|z - z_k| < \delta_1(|z_k|)(1 - |z_k|)} \frac{u(z)\, dx dy}{P(|z|)(1 - |z|)\delta_1(|z|)^2} \\
&\quad \leqslant c_1 \iint\limits_{|z| < r + \frac{1}{2}(1-r)} \frac{u(z)\, dx dy}{P(|z|)(1 - |z|)\delta_1(|z|)^2} = c_1 \int\limits_0^{r + \frac{1}{2}(1-r)} \frac{t\, dt}{P(t)(1-t)\delta_1(t)^2} \int\limits_0^{2\pi} u(te^{i\theta})\, d\theta \\
&\quad \leqslant 2\pi c_1 u(0) \int\limits_0^{r + \frac{1}{2}(1-r)} \frac{dt}{P(t)(1-t)\delta_1(t)^2} \leqslant c_2 \int\limits_0^r \frac{dt}{P(t)(1-t)\delta(t)^2},
\end{aligned}$$

что противоречит соотношению (4.16) и завершает доказательство.

Если интегралы в (4.13) и (4.16) расходятся, наши условия на $\{z_n\}$ в следствиях 4.4, 4.5, 4.6 и 4.7 требуют большего, чем только лишь нарушение условия Бляшке. Если же относительно $\{z_n\}$ мы предполагаем выполненным только условие (0.3), а также условие разделения (4.5) или (4.15), то имеем следующее утверждение.

Следствие 4.8. *Пусть $P(t)(1-t)$ — невозрастающая функция и пусть функции $\phi(t)$ и $\delta(t)$ удовлетворяют условиям леммы 4.3 и следствия 4.7. Чтобы для любой последовательности $\{z_n\}$, не являющейся последовательностью Бляшке и удовлетворяющей условию (4.5) или (4.15), и для любой функции $f \in H^\infty$ из неравенств (4.3) следовало тождество $f \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы соответственно*

$$\int_0^1 \frac{\phi(t)}{P(t)}\,dt < \infty \tag{4.17}$$

или

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)P(t)\delta(t)^2} < \infty. \tag{4.18}$$

Доказательство. 1. Для доказательства достаточности заметим, что если выполнено условие (4.17) или (4.18), то (4.13) или (4.16) справедливо для любой последовательности $\{z_n\}$, не удовлетворяющей условию Бляшке. Согласно первой части следствия 4.6 или следствия 4.7, при условии (4.5) или (4.15) из (4.3) следует, что функция $f \in H^\infty$ должна быть тривиальной. Тем самым мы доказали, что наши условия достаточны.

2. Предположим, что $\int_0^1 \{\phi(t)/P(t)\}\,dt = \infty$. Возьмем последовательность $\{z_n\}$ и функцию f как во второй части следствия 4.6. Мы получим последовательность, удовлетворяющую (0.3) и (4.5) и не обладающую нужным свойством единственности. Таким образом, условие (4.17) является необходимым. Аналогично доказывается необходимость условия (4.18): нужно применить следствие 4.7. •

Полагая $\phi(t) = 1/(1-t)$ и $\delta(t) = \mathrm{Const.}$ и применяя следствие 4.8, мы видим, что (4.4) является необходимым и достаточным условием единственности, т. е. мы получаем новое доказательство теоремы 4.1 Любарского и Сейпа. К сожалению, мы использовали дополнительное предположение о том, что $P(t)(1-t)$ — невозрастающая функция. Тем не менее мы утверждаем, что при таком выборе функций $\phi(t)$ и $\delta(t)$ это предположение можно опустить.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим функцию

$$P_2(r) = (1-r)^{-1} \min_{0 \leqslant t \leqslant r} P(t)(1-t).$$

Ясно, что $P_2(r)(1-r)$ не возрастает. Покажем, что $P_2(r)$ не убывает. Пусть (a,b) — компонента открытого множества $E := \{t \in (0,1) : P_2(t) < P(t)\}$, т. е.

$$\min_{0\leqslant t\leqslant a} P(t)(1-t) = P(a)(1-a) = \min_{0\leqslant t\leqslant r} P(t)(1-t), \quad a \leqslant r \leqslant b.$$

Рассмотрим также $c > a$ такое, что

$$\min_{0\leqslant t\leqslant r} P(t)(1-t) = P(r)(1-r), \quad b \leqslant r \leqslant c.$$

Очевидно, $P_2(r)$ не убывает на $[a,b]$. Далее, $P_2(r) = P(r)$, $b \leqslant r \leqslant c$; таким образом, $P_2(r)$ не убывает также и на этом интервале. Теперь ясно, что $P_2(r)$ не убывает на $[0,1)$ и что $P_2(r) \leqslant P(r)$.

Мы утверждаем, что интегралы

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)P(t)} \quad \text{и} \quad \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)P_2(t)}$$

сходятся либо расходятся одновременно. Предположим, что это установлено. Если $f \in H^\infty$ и выполнено (4.3), то (4.3) будет иметь место также с P_2 вместо P. Поэтому условие (4.4) с P_2 вместо P будет необходимым и достаточным для единственности, и мы можем вернуться к (4.4) в своем первоначальном виде, что завершает эту часть доказательства.

Остается рассмотреть два интеграла. Открытое множество E представимо в виде $E = \bigcup(a_i,b_i)$. Пусть $I_1 := \{i : b_i < a_i + \frac{1}{2}(1-a_i)\}$ и $E_1 = \bigcup_{i\in I_1}(a_i,b_i)$, $E_2 = E \setminus E_1$. Тогда при $i \in I_1$

$$P_2(t) \leqslant P(t) \leqslant P(b_i) = P_2(b_i) = P_2(a_i)\frac{1-a_i}{1-b_i} < 2P_2(a_i) \leqslant 2P_2(t), \quad a_i \leqslant t \leqslant b_i.$$

Перенумеруем интервалы из E_2 таким образом, чтобы $b_i \leqslant a_{i+1}$. Тогда для интервалов $(a_i,b_i) \subset E_2$ имеем

$$P_2(a_{i+1}) \geqslant P_2(b_i) = P_2(a_i)\frac{1-a_i}{1-b_i} \geqslant 2P_2(a_i).$$

Отсюда следует, что $P_2(a_i) < c2^j$ и

$$\int_{E_2} \frac{dt}{(1-t)P(t)} \leqslant \sum \int_{a_i}^{b_i} \frac{dt}{(1-t)P_2(t)}$$
$$\leqslant \sum \int_{a_i}^{1} \frac{dt}{(1-a_i)P_2(a_i)} = \sum \frac{1}{P_2(a_i)} < \infty.$$

Мы доказали, что два интеграла сходятся либо расходятся одновременно, что заканчивает наше доказательство теоремы 4.1. •

Следствия 4.4–4.8 описывают связь между убыванием функции $\log|f(z)|$ на последовательности $\{z_n\}$, задаваемым неравенствами (4.3), и условиями разделения (4.5) и (4.15), нужными для доказательства теоремы единственности для f: если мы ослабляем условие разделения, выбирая более быстро растущую функцию $\phi(t)$ или более быстро убывающую функцию $\delta(t)$, то нам нужна более быстро растущая функция P в (4.3). В следствиях 4.4–4.7 имеется другая возможность: можно выбрать более „массивную" последовательность $\{z_n\}$.

Замечания. 1. По-видимому, в общем случае условие о невозрастании функции $P(t)(1-t)$ в следствии 4.8 отбросить нельзя: согласно нашей гипотезе, без этого условия следствие 4.8 неверно даже при условии (4.1).

2. Все утверждения этого раздела верны, если предположить лишь, что $P(t)(1-t) \to d \in [0, \delta)$, где δ — достаточно малое положительное число.

3. В первых частях следствий 4.5–4.8 нам не нужно предположение о невозрастании (или даже ограниченности) функции $P(t)(1-t)$. Покажем, что ограниченность существенна во вторых частях. Возьмем $P(t) = \frac{2}{1-t}\log\frac{1}{1-t}$ и $\delta(t) = 1-t$. Тогда интеграл в (4.18) расходится в интервале $(1-\varepsilon, 1)$. Условие (4.15) эквивалентно (2.29) с $p = 2$. По теореме 2.5 из (4.3) следует, что $f \equiv 0$, какова бы ни была наперед заданная последовательность $\{z_n\}$, удовлетворяющая условиям (0.3) и (4.15). Это противоречит вторым частям следствий 4.7 и 4.8.

А. А. Вагаршакян [Va1] доказал теорему, связывающую скорость убывания функции f, условие разделения и размер множества предельных точек последовательности $\{z_n\}$ на границе ∂U. Обозначим через $M_\alpha(E)$ обхват по Хаусдорфу плоского множества E, определяемый равенством

$$M_\alpha(E) = \inf \sum_i r_i^\alpha,$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества E кругами с произвольными радиусами r_i.

Теорема 4.9 (Вагаршакян [Va1]). *Предположим, что последовательность $\{z_n\} \subset U$, числа $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \beta \leqslant 1/(1-\alpha)$, $2 < A < \infty$ и множество $E \subset \partial U$ таковы, что для любой точки $y \in E$ найдется подпоследовательность $\{z_{n_k}\}$,* *удовлетворяющая условиям*

$$|y - z_{n_k}/|z_{n_k}||^\beta < A(1 - |z_{n_k}|), \tag{4.19}$$

$$\inf_{i\neq j} \left|(1 - |z_{n_i}|)^{-\alpha} - (1 - |z_{n_j}|)^{-\alpha}\right| > 0, \tag{4.20}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |z_{n_k}|)^\alpha = \infty. \tag{4.21}$$

Если $M_{\beta(1-\alpha)}(E) > 0$, $f \in H^\infty$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}(1 - |z_n|)^\alpha \log|f(z_n)| = -\infty, \tag{4.22}$$

то $f \equiv 0$.

Теорема 4.9 не зависит от наших предыдущих результатов. Тем не менее между ними имеется определенная связь.

По следствию 4.5 с $\phi(t) = (1-t)^{-\alpha-1}$, $P(t) = (1-t)^{-\alpha}$ и $p = 1$, если

$$\kappa_D < Mr(1 - |z|)^{-\alpha-1} + 1, \quad 0 < r < \tfrac{1}{4}(1 - |z|), \tag{4.23}$$

$$\limsup_{t\to 1} \kappa(t)(1 - t) > 0 \tag{4.24}$$

(напомним, что $\kappa(t)$ — количество точек из $\{z_n\}$ в круге $\{|z| < t\}$) и если выполнено (4.22), то $f \equiv 0$.

Покажем, что в теореме 4.9 можно без ограничения общности предполагать выполненным условие (4.23). Чтобы в этом убедиться, рассмотрим „квадрат“ Уитни $Q_n(w_n)$ с центром w_n. В силу (4.20) при $z_{n_i}, z_{n_j} \in Q_n(w_n)$, $i \neq j$, имеем $\left||z_{n_i}| - |z_{n_j}|\right| > \delta(1-|w_n|)^{1+\alpha}$ с некоторым $\delta > 0$. В каждом Q_n, для которого $Q_n \cap \{z_n\} \neq \varnothing$, найдем точки такие, что $||z_l| - |z_k|| > \delta(1 - |w_n|)^{1+\alpha}$, $l \neq k$, и определим таким образом новую подпоследовательность $\{z'_n\}$ последовательности $\{z_n\}$. Это можно сделать так, чтобы условия теоремы 4.9 выполнялись с $\{z'_n\}$ вместо $\{z_n\}$. Так как $||z'_l| - |z'_k|| > \delta(1-|w_n|)^{1+\alpha}$ для любых $z'_l, z'_k \in Q_n$, $l \neq k$, то наша подпоследовательность $\{z'_n\}$ удовлетворяет условию (4.23).

В [Va1] показано, что каждая последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы 4.9, не является последовательностью Бляшке. Таким образом, при более сильном условии (4.24) мы можем опустить условия на β и E в теореме 4.9. Другая возможность опустить эти условия, причем для любой последовательности, удовлетворяющей (0.3) и (4.23), — усилить условие убывания (4.22), заменив его следующим:

$$(1 - |z_n|)^\alpha \log|f(z_n)| < -q(z_n), \quad \text{где} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)q(t)} < \infty.$$

Чтобы убедиться в этом, мы применяем следствие 4.8 при $\phi(t) = (1-t)^{-\alpha-1}$ и $P(t) = q(t)(1-t)^{-\alpha}$.

§5. Теоремы единственности и минимальная тонкость

Цель данного параграфа — обсудить связь между задачами единственности и граничным поведением субгармонических функций, описываемым в терминах минимальной тонкости. Некоторые из наших результатов являются прямыми следствиями классических теорем, имеющихся, например, в книге [AG] Д. Армитажа и С. Гардинера. Краткий обзор дается в Приложении 2 в конце данного параграфа. Обозначения и терминология приводятся в Приложении 2.

Мы дадим новое доказательство, а также уточнение и обобщение (см. теоремы 5.2 и 6.10) следующей теоремы У. К. Хеймана.

Теорема 5.1 (Хейман [Ha2]). *Пусть* $\{z_j\}$ *— последовательность, лежащая в единичном круге и пусть*

$$E_0 = \{\tau \in \mathbb{T} : \tau \text{ — некасательная предельная точка последовательности } \{z_j\}\}. \tag{5.1}$$

Предположим, что $f \in N$ *и*

$$f(z_j) \to 0, \quad j \to \infty. \tag{5.2}$$

Если $|E_0| > 0$, *то* $f(z) \equiv 0$. *Если* $|E_0| = 0$, *то найдется функция* $f \in H^\infty$, $f(z) \not\equiv 0$, *удовлетворяющая условию* (5.2); *здесь* $|E_0|$ *— нормированная лебегова мера на* $\mathbb{T}$.

Замечание. Первая часть этой теоремы была доказана Вагаршакяном ([Va1, с. 353, теорема 2]; ее можно рассматривать как предельный случай теоремы 4.9 с $\alpha = 0$ и $\beta = 1$).

Как уже упоминалось во Введении к данной статье, достаточно рассмотреть класс H^∞ вместо N, и мы часто будем так делать в дальнейшем. Известно, что для функций $f \in H^\infty$ имеется каноническая факторизация $f(z) = B(z)g(z)$, где $B(z)$ — произведение Бляшке и $g \in H^\infty$ — функция, не имеющая нулей в U. Заметим, что

$$\gamma(f) := (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})d\theta = g(0).$$

Нормируя функцию, будем предполагать, что $\|f\|_{H^\infty} = 1$. Тогда и $\|g\|_{H^\infty} = 1$. Следующая наша теорема развивает теорему 5.1.

Теорема 5.2. *Пусть* $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$, *и пусть* $\{z_j\}$ *и* E_0 *определены выше. Предположим, что при некотором* $a > 0$

$$|f(z_j)| \leqslant e^{-a}, \quad j = 1, 2, \dots \tag{5.3}$$

Тогда

$$|E_0| \leqslant a^{-1} \log \frac{1}{|\gamma(f)|}. \tag{5.4}$$

Обратно, если $|E_0| = \eta > 0$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся функция* $f_\varepsilon \in H^\infty$ *и подпоследовательность* $\{z'_j\}$, *для которой* E_0 *является множеством некасательных предельных точек,* $|f_\varepsilon(z'_j)| \leqslant \exp\{-a - \frac{\varepsilon}{2}\}$ *и*

$$\eta \leqslant a^{-1} \log \frac{1}{|\gamma(f_\varepsilon)|} \leqslant (1 + \tfrac{\varepsilon}{a})(\eta + \varepsilon). \tag{5.5}$$

Доказательство теоремы 5.2 будет дано позднее. Покажем, как из теоремы 5.2 получается первая часть теоремы 5.1. Если $|E_0| > 0$ и найдется нетривиальная функция $f \in H^\infty$, удовлетворяющая (5.2), то при всех достаточно больших j функция f будет удовлетворять и (5.3) с $a > |E_0|^{-1} \log \frac{1}{|\gamma(f)|}$, что противоречит (5.4). Итак, часть теоремы 5.1, касающаяся единственности, является следствием теоремы 5.2.

Наше доказательство второй части теоремы 5.1 требует отдельных рассуждений, которые будут приведены позднее.

Следствие 5.3. *Пусть* $f \in N$ *и пусть* $\{z_j\}$ — *последовательность в* U, *имеющая не менее двух предельных точек* α *и* β *на* $\mathbb{T}$, *причем* $|z_j| \to 1$ *и*

$$\widetilde{\chi}(z_j, z_{j+1}) \leqslant M \quad \text{при всех } j. \tag{5.6}$$

Если выполнено условие (5.3), *то*

$$d(\alpha, \beta) \leqslant a^{-1} \log \frac{1}{|\gamma(f)|}, \tag{5.7}$$

где $d(\alpha, \beta)$ — *нормированная длина кратчайшей дуги с концами* α *и* β.

Доказательство. Из (5.6) вытекает, что все точки либо дуги (α, β), либо дополнительной к ней дуги окружности $\mathbb{T}$ являются некасательными предельными точками последовательности $\{z_j\}$; таким образом, $d(\alpha, \beta) \leqslant |E_0|$. Поэтому (5.7) следует из (5.4). •

Следствие 5.4 [BS, теорема 5.3]. *Пусть $f \in N$ и пусть последовательность $\{z_j\}$ удовлетворяет условиям следствия 5.3. Если выполнено (5.2), то $f \equiv 0$.*

Доказательство. Мы используем то же рассуждение, что и при доказательстве первой части теоремы 5.1, приведенном выше. •

Для подмножества E круга U введем множество

$$E_{MF} = \{\tau \in \mathbb{T} : E \text{ не является минимально тонким в } \tau\}.$$

(О минимально тонких множествах см. в Приложении 2.) Пусть $\{z_j\}$ — последовательность в U. С каждой точкой z_j мы ассоциируем „квадрат" Уитни Q_j такой, что $z_j \in Q_j$, и определим множество $E = \bigcup Q_j$. Наш основной инструмент, связывающий условия на последовательность $\{z_j\}$ с минимальной тонкостью, дается следующей теоремой.

Теорема 5.5. *Рассмотрим $\{z_j\}$ и E, определенные выше. Пусть $|z_j| \to 1$ при $j \to \infty$. Если E_0 — определенное в (5.1) множество, то $|E_{MF} \setminus E_0| = 0$.*

Замечание. Позднее мы докажем, что если $\sum(1 - |z_n|) < \infty$, то $|E_{MF}| = 0$. Можно сказать больше также о связи между E_{MF} и E_0 (см. теорему 5.9).

Доказательство теоремы 5.5. Пусть $f = \chi_E$ — характеристическая функция множества $E \subset U$. В точках множества $E_{MF} \setminus E_0$ некасательный предел функции f равен 0. По теореме A8 почти в каждой точке окружности $\mathbb{T}$, в которой f имеет некасательный предел, f имеет также равный ему минимально тонкий предел. В то же время при $\tau \in E_{MF}$ минимально тонкий предел функции f в τ не равен нулю (минимально тонкий предел функции f в τ может и не существовать!). Отсюда следует, что $|E_{MF} \setminus E_0| = 0$. •

Мы благодарны профессору Стефену Гардинеру, предложившему приведенное доказательство теоремы 5.5.

Наше доказательство второй части теоремы 5.1 и теоремы 5.2 требует нескольких результатов из теории потенциала.

Теорема 5.6. *Пусть функция u принадлежит множеству U_+ и имеет наибольшую гармоническую миноранту h_u. Если $a > 0$ и $E(a) = \{z \in U : u(z) \geqslant a\}$, то*

$$|(E(a))_{MF}| \leqslant h_u(0)/a. \tag{5.8}$$

С другой стороны, эта оценка точная.

Доказательство. По теореме Рисса о представлении, $u = h_u + p$, где p — потенциал Грина. Известно, что p имеет минимально тонкий предел 0 п.в.

на $\mathbb{T}$ (см. следствие A2). Таким образом, если $\varepsilon > 0$ и $E_\varepsilon = \{z \in U : p(z) > \varepsilon\}$, то $|(E_\varepsilon)_{MF}| = 0$ и

$$(E(a))_{MF} \setminus (E_\varepsilon)_{MF} \subset \{\tau \in \mathbb{T} : mf \limsup_{z \to \tau} h_u(z) \geqslant a - \varepsilon\} =: E'_\varepsilon.$$

Полагая в теореме A1 $z = 0$, получаем, что $|E'_\varepsilon| \leqslant h_u(0)/(a - \varepsilon)$ и что

$$|(E(a))_{MF}| = |(E(a))_{MF} \setminus (E_\varepsilon)_{MF}| \leqslant |E'_\varepsilon| \leqslant h_u(0)/(a - \varepsilon).$$

Так как это верно для любого $\varepsilon > 0$, то (5.8) доказано.

Обратно, пусть $E_1 \subset \mathbb{T}$ — измеримое множество и χ_{E_1} — характеристическая функция множества E_1. Введем функцию

$$h_1(z) = a \int_{\mathbb{T}} \chi_{E_1}(\tau) P(z, \tau) |d\tau|,$$

являющуюся положительной гармонической функцией и имеющую минимально тонкий предел $a\chi_{E_1}$ п.в. на $\mathbb{T}$ (см., например, теорему A3 с $v = 1$). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$|\{z \in U : h_1(z) \geqslant a - \varepsilon\}_{MF}| \geqslant |E_1| = h_1(0)/a,$$

что доказывает точность оценки (5.8). Теорема 5.6 доказана. •

Доказательство теоремы 5.2. Определим функцию $u(z) = \log \frac{1}{|f(z)|} \in \mathcal{U}_+$ и заметим, что $h_u(z) = \log \frac{1}{|g(z)|}$ и что $h_u(0) = \log \frac{1}{|\gamma(f)|}$. По теореме Фату $f(z)$ имеет некасательные пределы, а значит, и равные им минимально тонкие пределы п.в. на $\mathbb{T}$ (см. теорему A8). Поэтому если выполнено (5.3), то в силу теоремы 5.6 для любого $\varepsilon > 0$ верны оценки

$$|E_0| \leqslant |(E(a - \varepsilon))_{MF}| \leqslant (a - \varepsilon)^{-1} h_u(0) = (a - \varepsilon)^{-1} \log \frac{1}{|\gamma(f)|},$$

что доказывает (5.4).

Для доказательства обратного утверждения возьмем $\varepsilon > 0$ и открытое множество E_1 на $\mathbb{T}$, содержащее E_0, и такое, что $|E_1 \setminus E_0| < \varepsilon$. Рассмотрим положительную гармоническую функцию

$$h_1(z) = (a + \varepsilon) \int_{\mathbb{T}} \chi_{E_1} P(z, \tau) |d\tau|,$$

где χ_{E_1} — характеристическая функция множества E_1. Ясно, что $h_1(z) > a + \frac{\varepsilon}{2}$ в окрестности $\mathcal{O}$ множества E_1 в U. Пусть $\{z'_j\} = \{z_j\} \cap \mathcal{O}$. Если $\tilde{h}_1$ — функция, сопряженная с h_1, то $f_\varepsilon(z) = \exp\{-(h_1 + i\tilde{h}_1)(z)\}$ — аналитическая функция в U, для которой

$$|f_\varepsilon(z_j')| \leqslant \exp\{-a - \tfrac{\varepsilon}{2}\},$$

и

$$\exp\{-(a+\varepsilon)(\eta+\varepsilon)\} \leqslant \exp\{-h_1(0)\} = |\gamma(f_\varepsilon)| \leqslant \exp\{-a\eta\},$$

откуда следует (5.5). Мы доказали теорему 5.2, а значит, и первую часть теоремы 5.1. •

Для доказательства того, что при $|E_0| = 0$ найдется нетривиальная функция $f \in H^\infty$, удовлетворяющая (5.2), нам нужны еще два результата.

Теорема 5.7. *Пусть множество $E \subset U$ таково, что $|E_{MF}| = 0$. Тогда найдется гринов потенциал u в U такой, что*

$$u(z) \to \infty, \quad |z| \to 1, \ z \in E.$$

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность, стремящаяся к 1 со скоростью, которая будет указана ниже, и пусть $E_n = E \cap \{\lambda_n < |z| < 1\}$. Известно, что $\widehat{R}_1^{E_n}$ является гриновым потенциалом в U (см. следствие A5), который приблизительно всюду (т.е. за исключением множества емкости нуль) равен 1 на E_n (см. теорему 5.7.1 в [AG]). Таким образом, $\widehat{R}_1^{E_n} = \iint_U G(\cdot,\zeta)d\mu_n(\zeta)$ и

$$\widehat{R}_1^{E_n}(0) = \iint\limits_U \log\frac{1}{|\zeta|}d\mu_n(\zeta) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Выберем $\{\lambda_n\}$ так, чтобы $\sum_1^\infty \widehat{R}_1^{E_n}(0) < \infty$, и положим $d\mu(\zeta) = \sum_1^\infty d\mu_n(\zeta)$. Так как $\iint_U \log\frac{1}{|\zeta|}d\mu(\zeta) < \infty$, то $u_1(z) := \iint_U G(z,\zeta)d\mu(\zeta)$ является гриновым потенциалом и $u_1(z) \geqslant n$ приблизительно всюду на E_n. Найдется гринов потенциал u_2 в U такой, что $u_2(z) = \infty$ на полярном множестве $\bigcup_1^\infty\{z \in E_n : u_1(z) < n\}$ (см. теорему 5.1.3 из [AG]). Тогда

$$u(z) := u_1(z) + u_2(z) \to \infty, \quad |z| \to 1, \ z \in E,$$

что доказывает теорему 5.7. •

В нашем следующем утверждении мы рассмотрим набор $\mathcal{B}$ „квадратов“ Уитни $\{Q_k\}$. Для каждого Q определим множество $\mathcal{C}(Q) = \bigcup Q_j$, где объединение берется по всем индексам j, для которых $Q \cap Q_j \neq \varnothing$. Пусть $\delta(Q)$ —

расстояние от Q до $\mathbb{T}$. Выберем число $M < 1$ такое, что для любой точки $z \in Q$ и для любого $Q \in \mathcal{B}$ справедливо включение

$$D(z, M) := \{\zeta : \chi(z,\zeta) < M\} \subset \mathcal{C}(Q).$$

Для $\zeta \in U$ и $\zeta \neq 0$ положим $\zeta^* = \zeta/|\zeta|$. Найдется постоянная c, не зависящая от z, такая, что

$$|z - \zeta^*| \leqslant c|z - \zeta|, \quad \zeta \in U \setminus D(z, M).$$

Пусть $d\mu$ — мера на U. Будем говорить, что мера $d\nu(e^{i\theta})$ является проекцией меры $(1 - |\zeta|^2)d\mu(\zeta)$ на $\mathbb{T}$, если для любого открытого интервала $I \subset \mathbb{T}$ и множества $S(I) = \{z \in U : z^* \in I\}$ имеем $\nu(I) = \iint_{S(I)}(1 - |\zeta|^2)d\mu(\zeta)$.

Теорема 5.8. *Пусть $\mathcal{B}$ — набор „квадратов“ Уитни в U, и $E = \bigcup_{Q\in\mathcal{B}} Q$. Если E является минимально тонким п.в. на $\mathbb{T}$, то найдется неотрицательная гармоническая функция h в U такая, что*

$$h(z) \to \infty, \quad |z| \to 1, \ z \in E. \tag{5.9}$$

Доказательство. Используем гринов потенциал $u(z)$, построенный при доказательстве теоремы 5.7. Изменяя обозначения, запишем

$$u(z) = \iint\limits_U G(z,\zeta)d\mu(\zeta).$$

Пусть $d\nu(e^{i\theta})$ — проекция меры $(1 - |\zeta|^2)d\mu(\zeta)$ на $\mathbb{T}$. Используя (1.14), получаем

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\{\chi(z,\zeta)>M\}} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) &\leqslant \frac{1}{2} \iint\limits_{\{\chi(z,\zeta)>M\}} \frac{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}{|z-\zeta|^2}d\mu(\zeta) \\ &\leqslant \frac{c^2}{2} \iint\limits_{\{\chi(z,\zeta)>M\}} \frac{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}{|z-\zeta^*|^2}d\mu(\zeta) \leqslant \frac{c^2}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|z-\tau|^2}d\nu(\tau) =: h_1(z). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Положим

$$\mathcal{B}_1 = \Big\{Q \in \mathcal{B} : \iint\limits_{\{\chi(z,\zeta)>M\}} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) > \frac{1}{2}u(z) \quad \text{для некоторого } z \in Q\Big\}$$

и

$$\mathcal{B}_2 = \Big\{Q \in \mathcal{B} : \iint\limits_{\{\chi(z,\zeta)\leqslant M\}} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) \geqslant \frac{1}{2}u(z) \text{ для всех } z \in Q\Big\}.$$

Если $Q \in \mathcal{B}_1$, то для некоторого $z \in Q$ имеем

$$\frac{1}{2}u(z) \leqslant h_1(z) \leqslant \text{Const.} \inf_{\zeta \in Q} h_1(\zeta).$$

В последней оценке мы воспользовались неравенством Гарнака. По теореме 5.7 имеем $u(z) \geqslant M(Q)$, где $M(Q) \to \infty$ при $|Q| \to 0$. Таким образом,

$$h_1(z) \to \infty, \quad |z| \to 1, \ z \in \bigcup_{Q \in \mathcal{B}_1} Q.$$

Если $Q \in \mathcal{B}_2$, то

$$\frac{1}{2} \iint_Q u(z)dxdy \leqslant \iint_Q \iint_{\{\chi(z,\zeta)\} \leqslant M} G(z,\zeta)d\mu(\zeta) \leqslant \text{Const.}\delta(Q)^2 \mu(\mathcal{C}(Q)).$$

Мы использовали то, что $D(z, M) \subset \mathcal{C}(Q)$ при всех $z \in Q$. Отсюда следует, что $M(Q) \leqslant \text{Const.}\mu(\mathcal{C}(Q))$. Так как

$$\sum \delta(Q)\mu(\mathcal{C}(Q)) \leqslant \text{Const.} \sum \delta(Q)\mu(Q) \leqslant \text{Const.} \iint_U (1 - |\zeta|^2)d\mu(\zeta),$$

то $\sum \delta(Q)M(Q) < \infty$.

Положим $Q^* = \{\tau \in \mathbb{T} : \tau = \zeta^* \text{ для некоторого } \zeta \in Q\}$ и определим

$$h_2(z) = \sum_{Q \in \mathcal{B}_2} \int_{Q^*} \frac{M(Q)(1 - |z|^2)}{|z - \tau|^2} |d\tau| =: \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|z - \tau|^2} d\nu_2(\tau),$$

где $d\nu_2(\tau) = \sum_{Q \in \mathcal{B}_2} M(Q)\chi_{Q^*}|d\tau|$. Так как

$$\int_{\mathbb{T}} d\nu_2(\tau) = \text{Const.} \sum_{Q \in \mathcal{B}_2} M(Q)\delta(Q) < \infty,$$

то h_2 является гармонической функцией в U. Далее, при $Q \in \mathcal{B}_2$ имеем $h_2(z) \geqslant \text{Const.}M(Q)$, $z \in Q$. Отсюда заключаем, что $h(z) = h_1(z) + h_2(z)$ — положительная гармоническая функция, стремящаяся к бесконечности при $|z| \to 1$, $z \in E$. Теорема 5.8 доказана. •

Для доказательства второй части теоремы 5.1 положим $E = \bigcup Q_j$, где объединение берется по всем „квадратам“ Уитни, содержащим точки данной последовательности $\{z_j\}$. По теореме 5.5 $|E_{MF} \setminus E_0| = 0$. Так как по условию теоремы $|E_0| = 0$, то и $|E_{MF}| = 0$. По теореме 5.8 найдется неотрицательная гармоническая функция h в U такая, что $h(z) \to \infty$, $|z| \to 1$, $z \in E$. Аналитическая функция $f(z) = \exp\{-(h + i\tilde{h})(z)\}$ стремится к нулю на E, а значит, и на $\{z_j\}$ при $|z| \to 1$. Тем самым теорема 5.1 доказана. •

О некасательном предельном множестве E_0 последовательности $\{z_j\}$ в U можно сказать больше, а именно для почти каждой точки $\tau \in E_0$ найдется подпоследовательность, стремящаяся к τ в малом угле Штольца с вершиной в τ. Для обсуждения этих вопросов модифицируем понятие разбиения Уитни. До сих пор расстояние $\delta(Q)$ между „квадратом" Q и $\mathbb{T}$ равнялось по существу „стороне" $\mathrm{l}(Q)$ „квадрата" Q. Теперь нам понадобятся квадраты, для которых отношение $\mathrm{l}(Q)/\delta(Q)$ равномерно ограничено сверху сколь угодно малой постоянной. С этой целью зафиксируем натуральное число q и разделим каждый квадрат первоначального разбиения на 2^{2q} меньших квадратов одинакового размера. Выбирая q достаточно большим, можно сделать отношение $\mathrm{l}(Q)/\delta(Q)$ сколь угодно малым равномерно для всех малых квадратов Q нового разбиения; это отношение имеет также равномерную оценку снизу с положительной постоянной, зависящей от q. До конца параграфа мы используем это модифицированное разбиение Уитни.

Для $\tau \in \mathbb{T}$ угол Штольца в τ определяется равенством

$$\Gamma_\alpha(\tau) = \{z \in U : |\arg((\tau - z)/\tau)| \leqslant \alpha\},$$

где $\alpha \in (0, \pi/2)$. Для данной последовательности $\{z_j\}$ в U положим $E = \bigcup Q_j$, где объединение берется по всем „квадратам" Уитни, содержащим точки из $\{z_j\}$. Если в $\Gamma_\beta(\tau)$ нет точек из $\{z_j\}$, близких к τ, и если $0 < \alpha < \beta$, то можно подобрать такое q, что в $\Gamma_\alpha(\tau)$ не будет точек из E, близких к τ. Для заданных таким образом β и α определим множества

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \{\tau \in \mathbb{T} : \exists\ \{Q_{j_\nu}\}_1^\infty,\ Q_{j_\nu} \cap \Gamma_\alpha(\tau) \neq \varnothing \text{ для любого } \nu\}, \\ \complement F(\alpha) &= \mathbb{T} \setminus F(\alpha) \\ &= \{\tau \in \mathbb{T} : \exists \rho > 0,\ \Gamma_\alpha(\tau) \cap Q_j \cap \{|z - \tau| < \rho\} = \varnothing \text{ для любого } j\}. \end{aligned}$$

Теорема 5.9. *Пусть α и β выбраны, как указано выше.*

i) *Для любого $\beta > 0$ имеем $F(\alpha) \subset E_0 \subset E_{MF}$ и*

$$|E_{MF} \setminus F(\alpha)| = 0.$$

ii) *Пусть задано $\beta > 0$. Для п.в. $\tau \in E_0$ из $\{z_j\}$ можно выделить подпоследовательность, содержащуюся в $\Gamma_\beta(\tau)$ и сходящуюся к τ.*

Доказательство. В данном доказательстве будем писать $F(\alpha) = F$ и $CF(\alpha) = CF$. Обозначим через ζ_k центр квадрата Q_k и определим функцию

$$W_0(\tau) = \sum \left(\frac{1 - |\zeta_k|}{|1 - \tau \overline{\zeta}_k|} \right)^2, \quad \tau \in \mathbb{T}.$$

Известно, что E не является минимально тонким в τ тогда и только тогда, когда $W_0(\tau) = \infty$ [Es2, §1]. Отсюда вытекает следующее.

Если τ содержится в некасательном предельном множестве E_0 последовательности $\{z_j\}$, то в некотором угле Штольца $\Gamma_\gamma(\tau)$ имеется бесконечно много точек из $\{z_j\}$, сходящихся к τ. Все соответствующие члены в сумме, определяющей $W_0(\tau)$, ограничены снизу постоянной $c = c(\gamma) > 0$, откуда $W_0(\tau) = \infty$. Следовательно, E не является минимально тонким в τ, и мы имеем $E_0 \subset E_{MF}$.

Теперь ясно, что $F = F(\alpha) \subset E_0 \subset E_{MF}$. Рассмотрим точки из CF.

Для простоты мы будем работать в верхней полуплоскости вместо круга; обозначим через $x_k + iy_k$ центр квадрата Q_k. Для заданного $\rho > 0$ определим $E(t, \rho) = E \cap \{|z - t| < \rho\}$ и

$$CF(\rho) = \{t \in \mathbb{R} : \Gamma_\alpha(t) \cap Q_k \cap \{|z - t| < \rho\} = \varnothing \text{ для любого } k\}.$$

Мы хотим доказать, что почти все точки из $CF(\rho)$ не содержатся в E_{MF}. Функция W_0 теперь запишется в виде

$$W_0(t) = \sum \left(\frac{y_k}{|x_k + iy_k - t|} \right)^2 \approx \iint\limits_E \frac{d\sigma(z)}{|z - t|^2},$$

где $d\sigma(z)$ обозначает лебегову меру на плоскости. Без ограничения общности можно предполагать, что множество E ограничено. Так как

$$\iint\limits_{E \setminus E(t,\rho)} \frac{d\sigma(z)}{|z - t|^2} < \infty,$$

то достаточно рассмотреть

$$\iint\limits_{E(t,\rho)} \frac{d\sigma(z)}{|z - t|^2} \leqslant \text{Const.} \sum_{Q_k \cap \{|z - t| < \rho\} \neq \varnothing} \frac{y_k^2}{(x_k - t)^2 + y_k^2}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — множество квадратов Q_k, появляющихся в этих суммах, когда t пробегает $CF(\rho)$. Зафиксируем квадрат $Q \in \mathcal{F}$, и пусть Q имеет центр $x_0 + iy_0$. Для Q и для всех квадратов Q_j, расположенных под Q, расстояния от проекций квадратов Q и Q_j на $\mathbb{R}$ до множества $\complement F(\rho)$ будут больше либо равны cy_0, где $c = c(\alpha) > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{\complement F(\rho)} \frac{y_j^2 dt}{(x_j - t)^2 + y_j^2} \leqslant 2 \int\limits_{cy_0}^{\infty} \frac{y_j^2 dt}{t^2 + y_j^2} \leqslant \mathrm{Const.}\, y_j^2 / y_0.$$

Таким образом, вклад в этот интеграл от Q и всех квадратов под Q не превосходит

$$\frac{\mathrm{Const.}}{y_0} \sum y_j^2 \leqslant \mathrm{Const.}\, y_0$$

и

$$\int\limits_{\complement F(\rho)} dt \iint\limits_{E(t,\rho)} \frac{d\sigma(z)}{|t - z|^2} \leqslant \mathrm{Const.} \sum \int\limits_{\complement F(\rho)} \frac{y_k^2\, dt}{(x_k - t)^2 + y_k^2} \leqslant \mathrm{Const.} \sum y_k,$$

где мы суммируем по всем квадратам $Q_k \in \mathcal{F}$, расположенным не ниже какого-либо другого квадрата из $\mathcal{F}$. Проекции этих квадратов Q_k на $\mathbb{R}$ имеют длины Const.y_k и в сущности не пересекаются. Поэтому последняя сумма конечна. Возвращаясь к единичному кругу, заключаем, что

$$\int\limits_{\complement F(\rho)} W_0(\tau)|d\tau| < \infty.$$

Это означает, что функция $W_0(\tau)$ должна быть конечной п.в. на $\complement F(\rho)$ и, значит, почти все точки из $\complement F(\rho)$ не принадлежат E_{MF}. Так как множества $\complement F(\rho)$ исчерпывают $\complement F$ при $\rho \to 0$, то $|E_{MF} \cap \complement F| = |E_{MF} \setminus F(\alpha)| = 0$. Каждая точка $\tau \in F(\alpha)$, а значит, почти каждая точка из E_0 является пределом точек из $\{z_j\}$, лежащих в $\Gamma_\beta(\tau)$, что завершает доказательство теоремы 5.9. •

Замечания. i) Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}} W_0(\tau)|d\tau| \approx \sum (1 - |\zeta_k|) \leqslant c \sum (1 - |z_k|).$$

Если первоначальная последовательность $\{z_k\}$ удовлетворяет условию Бляшке, то интеграл будет сходящимся и $W_0(\tau)$ будет конечной п.в. Отсюда следует, что $|E_{MF}| = 0$.

ii) Мы рекомендуем читателю сравнить часть ii) теоремы 5.9 с теоремой 1 из работы Тома [T].

Обсудим аналоги наших результатов в единичном шаре в многомерном случае. Легко видеть, что теорема 5.5 справедлива также в $\mathbb{R}^k$, $k > 2$, и что то же самое доказательство работает и в этой ситуации.

Аналог теоремы 5.9 требует обсуждения технических деталей. Пусть $\{x_j\}$ — последовательность точек единичного шара U в $\mathbb{R}^k$, $k > 2$. Модифицируя разбиение Уитни этого шара таким же образом, как и в случае размерности 2, определим множество $E = \bigcup Q_n$, где объединение берется по всем „кубам" Уитни, содержащим точки нашей последовательности. Обозначим через w_n центр куба Q_n и определим функцию

$$W_0(\tau) = \sum \left(\frac{1 - |w_n|}{|\tau - w_n|}\right)^k \approx \int\limits_E \frac{dx}{|x - \tau|^k}, \quad \tau \in \partial U,$$

где dx обозначает лебегову меру в $\mathbb{R}^k$. Известно, что множество E не является минимально тонким в $\tau \in \partial U$ тогда и только тогда, когда $W_0(\tau) = \infty$ (см. теорему 2 в [Es1], приведенную также как теорема 15.1 в [AE, с. 82], и обсуждение в §1 работы [Es2]). В многомерном случае угол Штольца $\Gamma_\alpha(\tau)$, использовавшийся при $k = 2$, заменяется конусом.

Доказательство аналога теоремы 5.9 в $\mathbb{R}^k$, $k > 2$, подобно доказательству в случае $k = 2$. Ясно, как определить множества $F = F(\alpha)$, CF, $CF(\rho)$, $E(t, \rho)$ и семейство $\mathcal{F}$ кубов в $\mathbb{R}^k$. Мы опять проинтегрируем функцию $W_0(\tau)$ по $CF(\rho)$. Рассуждая, как и в предыдущем доказательстве, получим, что

$$\int\limits_{CF(\rho)} W_0(\tau)|d\tau| \leqslant \text{Const.} \sum_n (1 - |w_n|)^{k-1}, \tag{5.11}$$

где мы суммируем по всем кубам $Q_n \in \mathcal{F}$, расположенным не ниже какого-либо другого куба из $\mathcal{F}$. Проекции этих кубов на ∂U по существу не пересекаются и имеют площади, соизмеримые с $(1 - |w_n|)^{k-1}$. Поскольку сумма в правой части (5.11) конечна, функция $W_0(\tau)$ будет конечной п.в. на $CF(\rho)$, и почти все точки из $CF(\rho)$ не принадлежат E_{MF}. Следовательно, теорема 5.9 справедлива также и в многомерном случае.

Замечание. Заметим, что

$$\int\limits_{\partial D} W_0(\tau)|d\tau| \approx \sum_n (1 - |w_n|)^{k-1}.$$

Если эта сумма конечна, то $W_0(\tau)$ будет конечной п.в. на сфере ∂U, и мы имеем $|E_{MF}| = 0$.

Используя теорему A4 в общем виде, можно применить рассуждение того же типа для доказательства следующего обобщения теорем 5.7 и 5.8 (здесь мы ограничимся плоским случаем).

Теорема 5.7′. *Предположим, что* $h \in \mathcal{H}_+$ *и что* $\mu_h(E_{MF}) = 0$. *Тогда найдется гринов потенциал* u *в* U *такой, что*

$$u(z)/h(z) \to \infty, \quad |z| \to 1, \ z \in E.$$

Доказательство. Мы работаем с $\widehat{R}_h^{E_n}$ вместо $\widehat{R}_1^{E_n}$. •

Теорема 5.8′. *Пусть* $\mathcal{B}$ — *множество „квадратов" Уитни в* U *пусть* $E = \bigcup_{Q \in \mathcal{B}} Q$ *и* $h \in \mathcal{H}_+$. *Если* $\mu_h(E_{MF}) = 0$, *то найдется неотрицательная гармоническая функция* h_0 *в* U *такая, что*

$$h_0(z)/h(z) \to \infty, \quad |z| \to 1, \ z \in E.$$

Приложение 2

Следуя [AG], мы, как правило, без доказательств приведем некоторые основные факты из теории потенциала, которые использовались выше. Для простоты мы ограничимся в этом обзоре единичным кругом U на плоскости. Тем не менее все приводимые ниже результаты справедливы в более общих областях и в многомерном случае.

Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется *полярным*, если найдется такая супергармоническая функция u на некотором открытом множестве ω, что $E \subset \{x \in \omega : u(x) = \infty\}$ (см. определение 5.1.1 в [AG]). *Тонкая топология* определяется в гл. 7 из [AG]. Множество E называется *тонким* в точке z_0, если найдется тонкая окрестность точки z_0, не пересекающаяся с $E \setminus \{z_0\}$.

Пусть $G(z, \zeta)$ — функция Грина в U с полюсом в ζ и $P(z, \tau)$, $\tau \in \mathbb{T}$, — ядро Пуассона в U. Для фиксированной точки $z_0 \in U$ определим функцию

$$M(z, \zeta) = G(z, \zeta)/G(z_0, \zeta), \quad z, \zeta \in U, \ z \neq \zeta,$$

называемую ядром Мартина в U (относительно z_0). Граница Мартина круга U может быть идентифицирована с единичной окружностью, и $M(z, \zeta)$ имеет непрерывное продолжение из $U \times (U \setminus \{z_0\})$ в $U \times (U \cup \mathbb{T} \setminus \{z_0\})$. Мы будем считать $z_0 = 0$.

Обозначим через $\mathcal{U}_+ = \mathcal{U}_+(U)$ множество всех неотрицательных супергармонических функций в U. Если $u \in \mathcal{U}_+$ и $E \subset U$, то приведенная функция $R_u^E(z)$ функции u относительно E в U определяется соотношением

$$R_u^E(z) = \inf\{v(z) : v \in \mathcal{U}_+, v \geqslant u \text{ на } E\}.$$

Регуляризованная приведенная функция $\widehat{R}_u^E(z)$ функции u относительно E определяется равенством

$$\widehat{R}_u^E(z) = \liminf_{\zeta\to z} R_u^E(\zeta), \quad z \in U.$$

Функция $\widehat{R}_u^E$ является супергармонической в U и $\widehat{R}_u^E = R_u^E$ п.в. в U (см. определение 5.3.1 в [AG]).

Подмножество $E \subset U$ является *минимально тонким* в $\tau \in \mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда $\widehat{R}^E_{M(\cdot,\tau)}$ — потенциал Грина (см. п. 9.2 в [AG]). Для минимальной тонкости имеются критерии типа Винера (см. основной результат Ж. Лелон-Ферран, приведенный как теорема 11.3 в [AE, с. 71] и теорему 15.1 в [AE, с. 82]; см. также теорему 2 в [Es1]).

Минимально тонкая топология на $U \cup \mathbb{T}$ определяется как система подмножеств W множества $U \cup \mathbb{T}$, удовлетворяющих условиям:

i) $U \setminus W$ является тонким в каждой точке множества $U \cap W$;

ii) $U \setminus W$ является минимально тонким в каждой точке множества $W \cap \mathbb{T}$ (см. определение 9.2.3 в [AG]).

Предел функции u в точке $z \in U \cup \mathbb{T}$ относительно минимально тонкой топологии обозначается через $mf\ \lim_{\zeta\to z} u(\zeta)$. Предел равен a, если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\zeta \in U : u(\zeta) > a+\varepsilon\}$ является минимально тонким в z, в то время как $\{\zeta \in U : u(\zeta) > a-\varepsilon\}$ не является минимально тонким в z.

Обозначим через $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_+(U)$ множество положительных гармонических функций в U. Каждой функции $h \in \mathcal{H}_+$ соответствует единственная мера μ_h на $\mathbb{T}$ такая, что

$$h(z) = \int_{\mathbb{T}} M(z,\tau)d\mu_h(\tau), \quad z \in U.$$

В классическом случае это теорема Ф. Рисса и Г. Герглоца (см. теорему 1.3.8 в [AG]). Она является примером более общей теоремы Мартина о представлении (см. теорему 8.4.1 в [AG]). Каждая функция $u \in \mathcal{U}_+$ представима в виде $p+h$, где p — гринов потенциал в U и h — наибольшая гармоническая миноранта функции u в U (теорема Рисса о представлении, см. теорему 4.4.1 в [AG]).

Теорема А1 (см. теорему 9.3.7 в [AG]). *Пусть $h \in \mathcal{H}_+$, $u \in \mathcal{U}_+$ и пусть*

$$A = \{\tau \in \mathbb{T} : mf\ \limsup_{z\to\tau} u(z)/h(z) \geqslant a\},$$

где $a > 0$. Тогда

$$u(z) \geqslant a \int_A M(z,\tau)d\mu_h(\tau).$$

Если, в частности, $h \equiv 1$, то $d\mu_h(\tau) = |d\tau|$, где $|d\tau|$ обозначает нормированную лебегову меру на $\mathbb{T}$, и мы имеем

$$u(z) \geqslant a \int_A M(z,\tau)|d\tau|, \quad u(0) \geqslant a|A|.$$

Следствие A2 (см. следствие 9.3.8 в [AG]). *Если p — гринов потенциал в U и $h \in \mathcal{H}_+$, то p/h имеет минимально тонкий предел 0 μ_h-п.в. на $\mathbb{T}$. Если $h \equiv 1$, то p имеет минимально тонкий предел 0 п.в. на $\mathbb{T}$.*

Теорема A3 (Фату–Наим–Дуб; см. теорему 9.4.6 в [AG]). *Пусть $u, v \in \mathcal{U}_+$, где $v \not\equiv 0$, и пусть f обозначает производную Радона–Никодима абсолютно непрерывной компоненты меры μ_h относительно μ_v. Тогда u/v имеет минимально тонкий предел $f(\tau)$ в μ_v-п.в. точках $\tau \in \mathbb{T}$.*

Теорема A4. *Пусть $h \in \mathcal{H}_+$ и $E \subset U$. Функция $\widehat{R}_h^E$ является гриновым потенциалом тогда и только тогда, когда E минимально тонко μ_h-п.в. на $\mathbb{T}$.*

Выбирая $h \equiv 1$, получаем $d\mu_h(\tau) = |d\tau|$ и следующее утверждение.

Следствие A5 (см. теорему A в [Es2]). *Функция $\widehat{R}_1^E$ является гриновым потенциалом тогда и только тогда, когда E минимально тонко п.в. на $\mathbb{T}$.*

Поскольку теорема A4 не сформулирована в [AG] в явном виде, приведем ее доказательство.

Доказательство теоремы A4. Как уже говорилось, E является минимально тонким в $\tau \in \mathbb{T}$ тогда и только тогда, когда $\widehat{R}^E_{M(\cdot,\tau)}$ — потенциал Грина. Из следствия 9.1.4 в [AG] получаем, что

$$\widehat{R}_h^E(z) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{R}^E_{M(\cdot,\tau)}(z)\, d\mu_h(\tau).$$

Если E является минимально тонким μ_h-п.в. на $\mathbb{T}$, то в силу следствия 9.1.4 из [AG] $\widehat{R}_h^E$ будет потенциалом Грина. Обратно, предположим, что $\widehat{R}_h^E$ — гринов потенциал. Если E не является минимально тонким в τ, то $\widehat{R}^E_{M(\cdot,\tau)} = M(\cdot,\tau)$, откуда

$$\widehat{R}_h^E(z) \geqslant \int_{E_{MF}} M(z,\tau)\, d\mu_h(\tau).$$

Так как $\widehat{R}_h^E$ — потенциал Грина с наибольшей гармонической минорантой 0, то последнее неравенство возможно только, если $\mu_h(E_{MF}) = 0$, что доказывает теорему A4.

Определение А6 (см. определение 9.7.3 в [AG]). Говорят, что функция $f : U \to [-\infty, \infty]$ имеет некасательный предел a в точке $\tau \in \mathbb{T}$, если для любого угла Штольца $\Gamma_\alpha(\tau)$ будет $\lim_{z\to\tau, z\in\Gamma_\alpha(\tau)} f(z) = a$.

Теорема А7 (см. теорему 9.7.4 в [AG]). *Пусть $u, h \in \mathcal{H}_+$. Если функция u/h имеет минимально тонкий предел a в τ, то u/h имеет некасательный предел a в τ.*

Теорема А8 (см. теорему 9.7.6 в [AG]). *В п.в. точках окружности $\mathbb{T}$, в которых функция $f : U \to [-\infty, \infty]$ имеет некасательный предел, f имеет также равный ему минимально тонкий предел.*

§6. Обобщения и классы функций, отличные от $H^\infty(U)$

Рассмотрим распространение результатов из §1–5 на более широкие классы функций и начнем с теоремы Ушаковой.

Теорема 6.1 (Ушакова [U3]). *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в U и пусть $\delta(t)$ — положительная непрерывная функция такая, что*

$$\int_0^1 T_f(t)\delta(t)\,dt < \infty.$$

Положим

$$\gamma(t) = \int_t^1 \delta(\tau)\,d\tau, \quad \nu(t) = \int_t^1 \gamma(\tau)\,d\tau. \tag{6.1}$$

Пусть, далее, последовательность $\{z_n\}$ такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(|z_k|) = \infty, \tag{6.2}$$

и выполнено хотя бы одно из следующих условий разделения (где $\widetilde{\chi}$ — неевклидово расстояние, определенное в (1.1)):

$$\begin{gathered}
\widetilde{\chi}(z_n, z_m) \geqslant d|n-m|, \quad d > 0,\\
\frac{|z_n - z_m|}{\sqrt{(1-|z_n|)(1-|z_m|)}} \geqslant d\sqrt{|n-m|}, \quad d > 0,\\
\left\{\frac{1}{\nu(|z_{k+1}|)} - \frac{1}{\nu(|z_k|)}\right\} \frac{\nu(|z_k|)}{(1-|z_k|)(-\nu'(|z_k|))} \geqslant d > 0.
\end{gathered} \tag{6.3}$$

Если для некоторого $\theta \in (0,1)$

$$\lim_{k\to\infty} \nu(|z_k| + \theta(1-|z_k|)) \log|f(z_k)| = -\infty, \tag{6.4}$$

то $f \equiv 0$.

И. В. Ушакова отмечает, что при $f \in N$ можно взять $\nu(t) = 1 - t$. Тогда (6.2) совпадет с условием (0.3), а последнее условие из (6.3) перейдет в (2.5). Таким образом, теорема 6.1 является обобщением теоремы 2.2. Функции, мероморфные во всей комплексной плоскости, рассматривались в [U4].

Зафиксируем функцию $\delta(t)$. Тогда теорему 6.1 можно интерпретировать как теорему единственности для класса $\mathcal{F}$ мероморфных функций, определяемого равенством

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\delta) = \Big\{ f : \int_0^1 T_f(t)\delta(t)\,dt < \infty \Big\}.$$

Поскольку мы оцениваем логарифм модуля аналитических или мероморфных функций, естественно рассмотреть теоремы единственности для классов субгармонических или δ-субгармонических функций, т. е. функций вида $u = u_1 - u_2$, где u_1 и u_2 — субгармонические функции. Напомним, что неванлинновская характеристика $T_u(r)$ δ-субгармонической функции u в шаре $U = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leqslant 1\}$ определяется равенством

$$T_u(r) = \frac{1}{\sigma_r} \int_{|x|=r} u^+(x)\,d\sigma_r(x) + \int_{|x|<r} g(y,r)\,d\mu_2(y),$$

где σ_r — площадь сферы $\{|x| = r\}$, μ_2 — мера Рисса, ассоциированная с u_2, и

$$g(y,r) = \begin{cases} \log \frac{r}{|y|}, & k = 2, \\ |y|^{2-k} - r^{2-k}, & k > 2. \end{cases}$$

При $u = \log|f|$, где f — мероморфная функция, это определение совпадает с (2.7) (там мы использовали обозначение T_f вместо $T_{\log|f|}$).

Следует отметить, что такое распространение теорем единственности невозможно без дополнительных условий на меру Рисса μ_1, ассоциированную с функцией u_1. Действительно, пусть $\{z_n\}$ — произвольное счетное множество (возможно даже, всюду плотное в U). Тогда

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \log\left| \frac{z - z_n}{1 - \overline{z}_n z} \right|$$

является нетривиальной функцией с ограниченной неванлинновской характеристикой, и при этом $u(z_n) = -\infty$ для любого n. Таким образом, следует принять, что мера μ_1 имеет достаточно массы в каждой точке z, в которой $\mu_1(z) \neq 0$. Некоторые классы δ-субгармонических функций в шаре были рассмотрены в [Ei2]. Мы приведем результат из [Ei2] (см. также [Ei3]) не в полной общности и в других обозначениях.

Пусть $\nu(t)$ — непрерывная убывающая функция на отрезке $[0, 1]$ такая, что $\nu(t) = O(1-t)$ при $t \to 1$ (но не обязательно вида (6.1)). Пусть W_ν — класс δ-субгармонических функций $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ в единичном шаре $U = \{|x| < 1\} \subset \mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, для которых

$$\nu(t)T_u(t)/(1-t) \leqslant A_u < \infty \tag{6.5}$$

и, кроме того, мера Рисса μ_1, ассоциированная с u_1, дискретна и массы во всех атомах меры μ_1 имеют положительную нижнюю границу.

Например, условие на μ_1 выполнено для функций u вида $u(z) = \log|f(z)|$, где f — мероморфная функция.

Теорема 6.2 (Эйдерман [Ei2, Ei3]). *Предположим, что $u \in W_\nu$, а измеряющая функция $h(t)$ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0 \frac{h(t)}{t^{k-1}}\, dt < \infty. \tag{6.6}$$

Пусть задано число $M \geqslant 1$, а также числа $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ и σ_0 из интервала $(0, 1/2)$, причем $\theta_0 > \theta_1$. Пусть, далее, последовательность точек $\{x_n\}$ единичного шара $U \subset \mathbb{R}^k$ такова, что

i) *для любого шара $D(x, r)$ с $\sigma := r/(1-|x|) < \sigma_0$ справедливо неравенство*

$$\kappa_D \leqslant M\left[\frac{h(\sigma)}{\nu(|x| + \theta_1(1-|x|))} + 1\right], \tag{6.7}$$

где κ_D — количество точек из $\{x_n\}$ в D;

ii) *выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

$$\limsup_{r\to1} \sum_{|x_n|<r} (1-|x_n|)\left\{\int\limits_0^{r+\theta_2(1-r)} (1-t)\, dn(t)\right\}^{-1} = \infty, \tag{6.8}$$

$$\limsup_{r\to1} \sum_{|x_n|<r} \nu(|x_n| + \theta_2(1-|x_n|))\left\{\int\limits_0^{r+\theta_2(1-r)} \nu(t)\, dn(t)\right\}^{-1} = \infty, \tag{6.9}$$

где $n(t) = \mu_1(\{|x| < t\})$. *Тогда существует число* $A_2 > 0$ *такое, что если*

$$\limsup_{n\to\infty}(1 - |x_n|)^{k-2}\nu(|x_n| + \theta_0(1 - |x_n|))u(x_n) < -A_2, \tag{6.10}$$

то $u \equiv -\infty$.

В [Ei2] и [Ei3] показано, что из каждого условия в (6.3) следует (6.7). Кроме того, Ушакова отмечает в [U3], что для функции $\nu(t)$, определенной в (6.1), $\int_0^1 \nu(t)\,dn(t) < \infty$. В этом случае условие (6.9) „почти" эквивалентно (6.2). Но теорема 6.1 не является прямым следствием теоремы 6.2 из-за наличия члена $\theta_2(1 - |x_n|)$ в (6.9).

Выведем следствие для функций $u \in N$.

Следствие 6.3. *Предположим, что* $h(t)$ *удовлетворяет условию* (6.6), *функция* $P(t)(1-t)^{k-2}$ *не убывает и* $P(t)(1-t)^{k-1} \geqslant d > 0$, *а последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что*

$$\sum_n (1 - |x_n|) = \infty, \tag{6.11}$$

$$\kappa_D \leqslant M\left[h(\sigma)P(|x|)(1-|x|)^{k-2} + 1\right]. \tag{6.12}$$

Пусть задано $\theta_4 \in (0, 1/2)$ *и пусть* $u(x)$ — δ*-субгармоническая функция с ограниченной неванлинновской характеристикой и мерой Рисса, состоящей из дискретных зарядов, равномерно отделенных от нуля. Тогда существует постоянная* c *такая, что если*

$$u(x_n) < -cP(|x_n| + \theta_4(1 - |x_n|)), \tag{6.13}$$

то $u \equiv -\infty$.

Доказательство. Выберем $\theta_1 \in (0, \frac{1}{2} - \theta_4)$ и положим

$$\nu(t + \theta_1(1-t)) := \{P(t)(1-t)^{k-2}\}^{-1}.$$

Тогда для $u \in N$ условие (6.6) выполнено, (6.13) эквивалентно условию (6.10) с $\theta_0 = \theta_1 + \theta_4 - \theta_1\theta_4$ и (6.7) совпадает с (6.12). Кроме того, при $u \in N$ интеграл в (6.8) сходится. Следовательно, условия (6.8) и (6.11) эквивалентны, и следствие 6.3 вытекает из теоремы 6.2. •

При $k = 2$ и $P(t) = (1-t)^{-1}$ следствие 6.3 с точностью до константы совпадает с теоремой 2.4. В §3 мы видели, что в этом случае следствие 6.3 является точным. Но если $k = 2$ и $P(t)(1-t) \uparrow \infty$ при $t \to 1$, то согласно теореме 2.5 условие (6.12) точным уже не будет: достаточно сравнить (6.12) и

(2.18) (интеграл в (2.18) стремится к нулю при $|z| \to 1$). Методами, развитыми в §1,2, можно улучшить теорему 6.2 и получить обобщение теоремы 2.5. Мы не приводим подробностей и ограничиваемся только k-мерным аналогом теоремы 1.2 для случая $\nu(t) = 1 - t$ (т. е. для функций с ограниченной характеристикой).

Пусть $G(x, y)$ — функция Грина в единичном шаре $U \subset \mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$ (см. п. 4.1 в [AG]). Рассмотрим супергармоническую функцию $p(x)$ вида

$$p(x) = \sum_i G(x, a_i), \quad a_i \in U. \tag{6.14}$$

При $k = 2$ получаем $p(z) = -\log|B(z)|$, где $B(z)$ — произведение Бляшке. Как и в плоском случае, $p(x) \not\equiv \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_i (1 - |a_i|) < \infty.$$

Теорема 6.4. *Пусть супергармоническая функция $p(x)$ имеет вид* (6.14) *и последовательность $\{X_i\}$ различных точек шара U такова, что $\sum_i (1 - |X_i|) = \infty$. Тогда существует подпоследовательность $x_j = X_{i_j}$, удовлетворяющая* (6.11), *со следующим свойством. Из нее, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность x_{j_p}, для которой*

$$p(x_{j_p}) \leqslant o(1)\eta_{j_p}^{(k)} + \frac{o(1)}{(1 - |x_{j_p}|)^{k-1}}, \quad \eta_{j_p}^{(k)} = \int_0^{(1-|x_{j_p}|)/2} \frac{n_j(t)}{t^{k-1}}\, dt,$$

где $n_j(t)$ — количество точек x_i таких, что $0 < |x_i - x_j| < t$. Кроме того, если супергармоническая функция $u(x)$ имеет ограниченную неванлинновскую характеристику и если $u(x) = h(x) + p(x)$ с функцией $h(x)$, гармонической в U, то либо $u(x) \equiv \infty$, либо

$$u(x_{j_p}) \leqslant o(1)\eta_{j_p}^{(k)} + \frac{O(1)}{(1 - |x_{j_p}|)^{k-1}}.$$

При $k = 2$ это в точности теорема 1.2 Хеймана.

Набросок доказательства. Наше рассуждение аналогично доказательству теоремы 1.2. Воспользуемся хорошо известными оценками функции Грина

$$G(x, y) \leqslant c|x - y|^{2-k}, \tag{6.15}$$

$$G(x, y) \leqslant c\frac{(1 - |x|)(1 - |y|)}{|x - y|^k}, \quad x \in U, \ y \in \overline{U}. \tag{6.16}$$

Из оценки (6.16) вытекает следующий аналог леммы 1.4:

$$\sum_{|x-a_i|>\delta(1-|x|)} G(x,a_i) = \frac{o(1)}{(1-|x|)^{k-1}} \quad \text{при } |x| \to 1.$$

Оставшаяся часть доказательства также подобна нашему доказательству теоремы 1.2. Для оценки суммы по точкам a_i, для которых $|x_{j_p}-a_i| < (1-|x_{j_p}|)/4$, мы пользуемся леммой 1.6 и неравенством (6.15). Мы опускаем подробности. •

Возможно также обобщить результаты §4. Для получения аналога леммы 4.3 мы пользуемся обобщенной версией теоремы 2.10 [Ku, Ei7] и следующей теоремой.

Теорема 6.5 (Эйдерман [Ei8]). *Пусть $P(t)$ — непрерывная неубывающая функция на интервале $(0,1)$, стремящаяся к бесконечности при $t \to 1$.*

1. *Для любой δ-субгармонической функции $u(x)$ в $U \subset \mathbb{R}^k$ найдется множество $E \subset U$ такое, что*

$$\operatorname{mes}_{k-1}(E \cap S_r) \leqslant A/P(r), \quad 0 < r < 1,$$

где $\operatorname{mes}_{k-1}(\cdot)$ означает $(k-1)$-мерную лебегову меру, $S_r = \{|x| = r\}$ и постоянная A зависит только от k, и при этом

$$u(x) < P(|x|)T_u(|x|), \quad x \in U \setminus E.$$

2. *Пусть $P(t)(1-t)^{k-1}$ — невозрастающая функция на интервале $(0,1)$ и пусть задано $T > 0$. Положим $c_0 := \lim_{t\to 1} P(t)(1-t)^{k-1}$. Тогда найдутся положительная гармоническая функция $u(x)$ в U и число $c_1 \geqslant \min\{a/c_0, 1\}$ с $a = a(k)$ такие, что*

a) $T_u(1) = T$;

b) *если $\mathcal{E} = \{x \in U : u(x) > c_1 P(|x|)T_u(|x|)\}$, то*

$$\operatorname{mes}_{k-1}(\mathcal{E} \cap S_r) \geqslant c_2/P(r) \quad \text{для любого } r \in (r_0, 1),$$

где $c_2 = c_2(c_0, k) > 0$.

Мы не будем выводить здесь соответствующие теоремы единственности, ограничившись указанием, как это можно сделать.

Имеется большое количество работ, в которых классы $\mathcal{F}$ аналитических или мероморфных функций определяются в терминах, не зависящих в явном виде от роста неванлинновской характеристики.

В [Va2] Вагаршакян распространил свою теорему 4.9 на классы таких аналитических функций в единичном круге U, для которых

$$\sup_{|z|<1} \frac{\log|f(z)|}{K(1-|z|)} < \infty,$$

где $K(t)$ — непрерывная невозрастающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\,dt < \infty.$$

Как уже упоминалось во Введении, большое количество теорем единственности для целых функций или функций, аналитических в полуплоскости, имеется в классических книгах Левинсона [Lev] и Боаса [Bo] (см. также работу Шатте [Sc]). Эйдерман получил следующий результат, инспирированный теоремами Фукса, Карлсона, Кахана и Левинсона.

Теорема 6.6 (Эйдерман [Ei4]). *Пусть $p(t)$ — неубывающая функция на $[0,\infty)$, стремящаяся к бесконечности при $t \to \infty$ и такая, что $\log p(t)/\log t \to 0$ при $t \to \infty$. Предположим, что $F(z)$ — голоморфная функция в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, для которой*

$$|F(re^{i\varphi})| = O(\exp\{(a\log r\cos\varphi + b\cos\varphi + \pi c|\sin\varphi|)r\}), \quad |\varphi| < \pi/2, \tag{6.17}$$

где $a \geqslant 0$ и $c \geqslant -a/2$. Пусть последовательность $\{\Lambda_n\}$ положительных чисел такова, что

$$\limsup_{r\to\infty} \kappa(r)/r < \infty, \tag{6.18}$$

$$\Lambda_{n+1} - \Lambda_n \geqslant \{Mp(\Lambda_{n+1})\}^{-1}, \quad M > 0, \tag{6.19}$$

$$\limsup_{r\to\infty} \sum_{\Lambda_n<r} \left\{\frac{1}{\Lambda_n} - \left(c + \frac{a}{2}\right)\log r\right\} = \infty, \tag{6.20}$$

где $\kappa(r)$ — количество точек Λ_n на интервале $(0,r)$. Если

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|F(\Lambda_n)|}{\Lambda_n \log\Lambda_n} < -2c, \tag{6.21}$$

то $F \equiv 0$.

Постоянная $-2c$ в (6.21) является точной. Нельзя также ослабить условие на $p(t)$, заменив его условием $\lim_{t\to\infty} \log p(t)/\log t = d > 0$ с постоянной d, не зависящей от F. Условие (6.19) улучшает стандартное условие разделения $\Lambda_{n+1} - \Lambda_n \geqslant \delta > 0$.

Теорема 6.7 (Эйдерман [Ei4]). *Пусть* $p(t) \uparrow \infty$ *при* $t \to \infty$ *и*

$$\lim_{t\to\infty} \log p(t)/\log t > 0$$

(*возможно, этот предел равен* ∞). *Пусть, далее, выполнены условия* (6.17)–(6.20). *Тогда для любого* $\gamma > 1$ *найдется число* A *такое, что если*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log|F(\Lambda_n)|}{\Lambda_n \log p(\gamma\Lambda_n)} < -A, \tag{6.22}$$

то $F \equiv 0$.

Теорема 6.7 устанавливает связь между условием разделения (6.19) и условием убывания (6.22). В [Ei4] доказано, что эта связь точная. Случай $F(\Lambda_n) = 0$ при всех n можно рассматривать как предельный при $p(t) \equiv \infty$. Тогда условие разделения (6.19) исчезает совсем, и мы получаем улучшенную версию хорошо известных теорем Карлсона и Фукса [Bo, с. 153–158].

Недавно Б. Коренблюм и Ж. К. Раке [KR] получили результат такого типа для класса CW (от Cartwright), состоящего из аналитических функций F экспоненциального типа в $\{\mathrm{Re}\, z > 0\}$ таких, что

$$|F(iy)| \leqslant e^{\pi|y|},$$
$$\lim_{x\to\infty} \log|F(x)|/x = -\infty.$$

Теорема 6.8 (Коренблюм и Раке [KR]). *Если* $F \in CW$ *и*

$$F(n) = o(n^{-2n}e^{-an}) \quad \text{для любого } a > 0, \tag{6.23}$$

то $F \equiv 0$.

Нетрудно видеть, что все функции F из CW удовлетворяют условию (6.17) при $a = b = 0$, $c = 1$. В то же время условие (6.23) более деликатно, чем (6.21) при $\Lambda_n = n$, и (6.20) в этом случае также не выполнено. Заметим, что методы доказательства в [Bo, Lev, Ei4] и [KR] существенно различны.

Серия работ различных авторов посвящена теоремам единственности для функций вида

$$F(z) = \int_\Gamma e^{zt}\,d\mu(t), \tag{6.24}$$

где Γ — кривая в полуплоскости $\{\mathrm{Re}\, z \leqslant a < \infty\}$ и $\mu(t)$ — функция ограниченной вариации на Γ. Такие функции возникают в разнообразных приложениях, таких как проблема моментов, теория аппроксимации и т.д. При различных дополнительных предположениях относительно Γ и μ теоремы единственности для функций вида (6.24) были получены Дж. Г. Микусинским и С. Рылл-Нардзевским [MRN], В. Г. Мазьей и В. П. Хавиным [MH, с. 71, лемма 4], О. А. Мурадян [Mu1, Mu2]. В [Le1] и [Le2] (см. теорему 3.3.3, с. 230), А. Ф. Леонтьев доказал существенно более сильный результат, чем в [MRN].

Теорема 6.9 (Леонтьев [Le1,Le2]). *Пусть* $\Gamma = \{z(x) = x + iy(x),\ x \leqslant a\}$ — *аналитическая кривая с* $y'(x) < 1$. *Пусть, далее,* $\mu(t)$ — *функция ограниченной вариации на* Γ, *не являющаяся постоянной в некоторой окрестности точки* $(a, y(a))$. *Если последовательность* $\{\lambda_n\}$ *положительных чисел такова, что*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqslant d > 0, \quad \sum \lambda_n^{-1} = \infty,$$

то

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} \log |F(\lambda_n)| = a. \tag{6.25}$$

Если $\Gamma \subset (-\infty, a)$, то $e^{-az}F(z) \in H^\infty$, и теорема 6.9 следует из теорем 2.1 и 2.2, за исключением того факта, что мы не получаем значения постоянной в правой части равенства (6.25). В полной общности и с точной постоянной a доказательство теоремы 6.9 использует теорию квазианалитических функций. Близкий результат независимо получен Ж. Кореваром [Ko]. Но соответствующая теорема единственности не была им сформулирована в явном виде. Подобный подход использовали также Б. Коренблюм, А. Маркуилли и Дж. Панарелло [KMP], рассмотревшие родственную задачу.

Пример $F(z) = \sin bz$ показывает, что если кривая Γ содержит две точки, лежащие на вертикальном отрезке, то теорема 6.9 неверна. Из результатов Ж. Коревара и Р. Зейнстры [KZ,Ze] следует, что можно улучшить теорему 6.9 и заменить условие $y'(x) < 1$ на $y'(x) \leqslant M < \infty$. Можно также рассмотреть комплексные числа λ_n, лежащие в угле $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} M - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$.

Далее, мы рассмотрим нормальные аналитические и мероморфные функции. Напомним, что мероморфная в U функция $f(z)$ называется *нормальной*, если семейство функций $\{f(S(z))\}$ нормально в U в смысле Монтеля; здесь $\{S(z)\}$ — семейство всех конформных автоморфизмов (или отображений Мебиуса) круга U. Функция f нормальна тогда и только тогда, когда

$$\frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leqslant \frac{c}{1 - |z|^2}, \quad z \in U$$

(см. [LV] или теорему 6.5 в [Ha1]). Если f не принимает трех значений, то f нормальна.

Ограниченная аналитическая функция нормальна. Но для мероморфных функций с ограниченной характеристикой это уже неверно (см., например, [BS, LV] по поводу дальнейших свойств нормальных функций). В теореме 4 из [Ha2] У. К. Хейман доказал, что теорема 1.2 справедлива также для нормальных функций и последовательностей $\{z_i\}$, содержащихся в интервале (0,1). В. И. Гаврилов [Ga1] установил аналог теоремы 0.1 Шагиняна: если f — нормальная мероморфная функция такая, что при некотором $\varepsilon > 0$ верна оценка

$$(1-|z|)^{1+\varepsilon}\log|f(z)| \leqslant -1, \quad z \in (0,1),$$

то $f \equiv 0$. В [Ga1] имеется также ряд других результатов о нормальных функциях.

Что можно сказать, если известно только, что $f(z_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и нет никаких предположений относительно убывания функции f? В этом случае неестественно определять классы $\mathcal{F}$ функций в терминах роста неванлинновской характеристики. Действительно, если $K(t)$ — возрастающая функция на (0,1), стремящаяся к бесконечности, пусть даже сколь угодно медленно, то найдется нетривиальная аналитическая функция f, для которой $\log|f(z)| \leqslant K(|z|)$ и которая имеет нулевые радиальные пределы почти всюду на $[0, 2\pi]$ (см. Ж. П. Кахан и И. Кацнельсон [KK], где имеется более общий результат). Известен ряд интересных результатов для нормальных функций. В работах Ф. Багемила [Ba] и Ф. Багемила и В. Зейделя [BS] доказано, что если f — нормальная голоморфная функция и $f(z_n) \to 0$ при $n \to \infty$ на последовательности $\{z_n\}$, имеющей более одной предельной точки на ∂U и такой, что $\limsup_{n\to\infty} \widetilde{\chi}(z_n, z_{n+1}) < \infty$, то $f \equiv 0$. Но для мероморфных функций f это утверждение, вообще говоря, неверно. Для нормальных мероморфных функций данное заключение справедливо при более сильном условии: $\lim_{n\to\infty} \widetilde{\chi}(z_n, z_{n+1}) = 0$ [Ga2].

Чтобы обобщить результаты §5 на случай пространства $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, рассмотрим функцию $u = p + h_u \in \mathcal{U}_+$, где h_u — наибольшая гармоническая миноранта супергармонической функции u и p — потенциал Грина. Если u имеет некасательные пределы п.в. на единичной сфере ∂U в $\mathbb{R}^k$, то мы можем, как и при доказательстве теоремы 5.2, использовать поведение функции u на последовательности для изучения минимально тонких пределов. Существование некасательных пределов гармонической компоненты h_u п.в. на ∂U является классическим фактом (см. теорему 4.6.6 в [AG] и теорему A7). Иная ситуация для потенциалов Грина p: в общем случае p имеет минимально тонкий предел 0 п.в. на ∂U (см. следствие A2), но не обязательно имеет некасательные пределы где-либо на ∂U. Обозначим через δ_w меру Дирака в точке w. Мы рассмотрим специальный класс потенциалов

$p(x) = \int_U G(x,y)d\mu(y)$. Здесь мера $d\mu$ имеет вид $\sum a_n \delta_{w_n}$, где $\{w_n\}$ — последовательность точек и $\{a_n\}$ — последовательность положительных чисел, причем

$$\sum (1 - |w_n|)^{k-1} < \infty \tag{6.26}$$

и

$$\sum a_n (1 - |w_n|) < \infty. \tag{6.27}$$

Как и прежде, $G(x,y)$ — функция Грина в единичном шаре.

Чтобы мотивировать эти предположения, заметим вначале, что в силу (1.14) и (6.16) справедливо неравенство

$$\int_U G(x,y)d\mu(y) < c(1 - |x|) \sum |x - w_n|^{-k} a_n (1 - |w_n|), \quad k \geqslant 2,$$

и эта оценка точная. Поэтому потенциал p определен тогда и только тогда, когда имеет место (6.27). Если не выполнено условие (6.26), то ряд $\sum a_n(1 - |w_n|)$ может по-прежнему сходиться, но возможны сложности с некасательными пределами. В самом деле, пусть $s(w_n)$ — „некасательная α-тень" точки w_n на ∂U, т.е. те точки τ сферы ∂U, для которых $w_n \in \Gamma_\alpha(\tau)$, и пусть $S_N = \bigcup_{\{n>N\}} s(w_n)$. Если (6.26) не выполнено, мы можем найти последовательность $\{w_n\}$ такую, что $S_N = \partial U$ для всех достаточно больших N. Далее, для любой точки $\tau \in \partial U$ и для любого $\rho < 1$ множество $\Gamma_\alpha(\tau) \cap \{x \in U : 1 - \rho < |x| < 1\}$ может содержать точки, в которых потенциал Грина p бесконечен. Но если выполнено (6.26), то для почти всех $\tau \in \partial U$ найдется $\rho(\tau)$ такое, что множество $\Gamma_\alpha(\tau) \cap \{x \in U : 1 - \rho(\tau) < |x| < 1\}$ не будет содержать точек, в которых потенциал p бесконечен. Это означает, что $p(x)$ будет иметь нулевой некасательный предел п.в. на ∂U.

Замечания. 1. Условие (6.26) является естественным обобщением условия Бляшке на плоскости.

2. Очевидно, что числа a_n из (6.27) в общем случае зависят от w_n. Приведем пример последовательности $\{a_n\}$, не зависящей от $\{w_n\}$. Для $k > 2$ положим $k' = (k-1)/(k-2)$ и подберем a_n такие, что

$$\begin{cases} \sum a_n^{k'} < \infty, & k > 2, \\ \{a_n\} \in l^\infty, & k = 2. \end{cases}$$

Если выполнено (6.26), то, пользуясь неравенством Гёльдера, получим, что имеет место и (6.27), и, следовательно, потенциал p определен. При $k = 2$ мы получаем в точности условие Бляшке $\sum(1 - |w_n|) < \infty$.

Мы имеем следующее обобщение теорем 5.2 и 5.6.

Теорема 6.10. *Пусть функция* $u \in \mathcal{U}_+$ *имеет каноническое разложение* $p + h_u$, *где потенциал* p *является суммой по точечным массам, удовлетворяющим условиям* (6.26) *и* (6.27). *Если* $\{x_n\}$ *— последовательность в единичном шаре* $U \subset \mathbb{R}^k$ *с некасательным предельным множеством* E_0 *на* ∂U *и если*

$$u(x_n) \geqslant a > 0, \quad n = 1, 2, \dots ,$$

то

$$|E_0| \leqslant h_u(0)/a.$$

Доказательство. По построению p имеет некасательный предел 0 п.в. на ∂U. Известно также, что h_u имеет некасательные пределы п.в. на ∂U. На E_0 эти пределы должны быть не меньше, чем a. По теореме A8 функция u имеет равные им минимально тонкие пределы п.в. на ∂U. Пусть $E(a) = \{x \in U : u(x) \geqslant a\}$. Воспользуемся теперь k-мерным аналогом теоремы 5.6, который доказывается точно так же, как и в случае $k = 2$ (см. теорему 9.3.7 в [AG]). Из него следует, что

$$|E_0| \leqslant |E(a)_{MF}| \leqslant a^{-1} h_u(0). \quad \bullet$$

Справедливо также обобщение теоремы 5.1.

Теорема 6.11. *Пусть* $u = p + h_u$, $\{x_n\}$ *и* E_0 *— такие же, как и в теореме* 6.10. *Предположим, далее, что*

$$u(x_n) \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{6.28}$$

Тогда $|E_0| = 0$. *Обратно, если* $|E_0| = 0$, *то найдется функция* $u \in \mathcal{U}_+$, *удовлетворяющая условию* (6.28).

Доказательство. Если $|E_0| > 0$, то мы рассуждаем, как в первой части доказательства теоремы 5.1, чтобы прийти к противоречию.

Для доказательства обратного утверждения мы должны обобщить теоремы 5.5–5.8 на случай $k > 2$. Как упоминалось в §5, легко видеть, что теорема 5.5 справедлива в $\mathbb{R}^k$, $k > 2$, и что доказательство остается прежним. В многомерном случае теорема 5.6 заменяется теоремой 6.10, и нетрудно сформулировать и доказать аналог теоремы 5.7 для случая $k > 2$ (см. следствие A5). Для обобщения теоремы 5.8 нужны некоторые технические детали, но работают те же идеи. В (5.10) мы теперь интегрируем по дополнению $C(Q)$, т.е. по всем кубам Q' таким, что $Q \cap Q' = \varnothing$. Чтобы оценить функцию Грина возле ∂U, мы используем (6.16). Теперь у нас есть весь инструментарий, нужный для доказательства обратной части теоремы 6.11. $\bullet$

Замечание. Отметим, что теорема 6.11 является обобщением теоремы 5.1 даже в случае $k = 2$.

§7. Условия убывания, отличные от (0.1)

В данном параграфе мы рассмотрим теоремы единственности с условиями убывания, выраженными в терминах комбинаций значений $|f(z_n)|$ на всей последовательности $\{z_n\}$ вместо условий на каждое значение $|f(z_n)|$ отдельно. Необходимость в результатах такого типа возникла из приложений (некоторые из них будут указаны ниже). Н. К. Никольский [Ni] получил следующую теорему.

Теорема 7.1 (Никольский [Ni]). *Пусть Φ — строго возрастающая функция на интервале $[0,\infty)$ и $\lim_{r\to\infty}\Phi(r)=\infty$. Обозначим через E_Φ класс целых функций $f(z)$ таких, что $f(0)=0$ и $|f(z)|<C_f\Phi(|z|)$ для всех $z\in\mathbb{C}$. Тогда существуют последовательности $\{\gamma_n\}$ и $\{z_n\}$ комплексных чисел со следующими свойствами: $\sum|\gamma_n|^2<\infty$, $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$, и если для $f\in E_\Phi$ ряд*

$$\sum_n|\gamma_n|^2|f(z_n)|^2$$

сходится, то $f\equiv 0$.

Очевидно, аналогичная теорема не может иметь место для ограниченных аналитических функций в некоторой области D. Приведем результат С. Я. Хавинсона для аналитических функций $f\in N$.

Теорема 7.2 (Хавинсон [Hav3]). *Пусть задана последовательность $\{t_n\}$ положительных чисел, для которой $\sum_j t_j=\infty$. Тогда существует последовательность различных точек $\{z_n\}$, $|z_n|>1$, $n=1,2,\ldots$, такая, что если f — функция с ограниченной характеристикой в $|z|>1$, $f(\infty)=0$ и*

$$\sum_n t_n|f(z_n)|<\infty,$$

то $f\equiv 0$.

Теоремы 7.1 и 7.2 устанавливают существование последовательности $\{z_n\}$ с нужными свойствами, но не дают каких-либо достаточных условий на $\{z_n\}$. Й. С. Чоу, Т. Трент и Ж. Л.-М. Вонг [CTW] рассмотрели близкую задачу для класса $H^\infty(U)$. Они отметили, что если множество некасательных предельных точек последовательности $\{z_n\}$ имеет положительную лебегову меру на $\partial U=\mathbb{T}$ и $\sum_n|f(z_n)|<\infty$, то $f\equiv 0$ для любой функции $f\in H^\infty(U)$ (ср. с теоремой 5.1). Интересно отметить, что они пришли к этой задаче при изучении определенных биологических процессов (подробнее см. [CTW]). Заметим, что имеется также важное применение в теории аппроксимации — [Hav3, Ei6]. Приведем два других результата из [CTW] в измененной, но эквивалентной форме.

Теорема 7.3 (Чоу, Трент и Вонг [CTW]). *Пусть*

$$cn^{-2} \leqslant \delta_n < 1, \ z_{n,k} = (1-\delta_n)\exp(2\pi ik/n), \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \ n = 1, 2, \dots$$

Если $f \in H^\infty(U)$ *и* $\sum_{n,k} |f(z_{n,k})| < \infty$, *то* $f \equiv 0$.

Разумеется, $\{z_{n,k}\}$ в теореме 7.3 не является последовательностью Бляшке: $\sum_{n,k}(1-|z_{n,k}|) = \sum_n n\delta_n = \infty$. В [CTW] авторы спрашивают, будет ли условие $\sum_n n\delta_n = \infty$ достаточным для заключения теоремы 7.3.

Теорема 7.4 (Чоу, Трент и Вонг [CTW]). *Пусть последовательность* $\{z_n\} \subset U$ *такова, что*

$$\text{a)} \quad |z_n| = 1 - (\log\log n)^{-p}, \quad p > 1,$$

или

$$\text{b)} \quad |z_n| = 1 - (\log n)^{-p}, \quad 0 < p \leqslant 1/2.$$

Если $f \in H^\infty(U)$ *и* $\sum_n |f(z_n)| < \infty$, *то* $f \equiv 0$.

В [CTW] авторы ставят следующий вопрос: можно ли в случае b) взять $0 < p < 1$? Они отмечают, что нельзя взять $p = 1$ (пример: $f(z) = \exp[-\frac{1+z}{1-z}]$).

Эйдерман [Ei5] рассмотрел более общую задачу. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс аналитических функций в U и пусть $\Phi(t)$, $-\infty < t < \infty$, — возрастающая положительная функция, стремящаяся к 0 при $t \to -\infty$. Задача состоит в нахождении такого условия на последовательность $\{z_n\} \subset U$, $|z_n| \to 1$, что если $f \in \mathcal{F}$ и $\sum_n \Phi(\log|f(z_n)|) < \infty$, то $f \equiv 0$.

Теорема 7.5 (Эйдерман [Ei5]). *Пусть* $\nu(t)$ *— непрерывная убывающая функция на отрезке* $[0,1]$ *такая, что* $\nu(t) = O(1-t)$, *и пусть*

$$\mathcal{F} = \{f : \nu(t)T_f(t)/(1-t) \leqslant A_f < \infty\}.$$

Обозначим через $\Psi(t)$ *и* $\eta(t)$ *функции, обратные к* $\Phi(t)$ *и* $\nu(t)$ *соответственно. Предположим, что* $p_n \uparrow \infty$, $p_n = o(-\Psi(n^{-1}))$, $L > 1$,

$$|z_n| = 1 - L\{1 - \eta(-p_n/\Psi(n^{-1}))\}.$$

Если $f \in \mathcal{F}$ *и* $\sum_n \Phi(\log|f(z_n)|) < \infty$, *то* $f \equiv 0$.

Для $f \in N$ имеем $\nu(t) = \eta(t) = 1 - t$. Полагая $\Phi(t) = \exp t$, мы получаем следующее утверждение.

Следствие 7.6. *Предположим, что* $p_n \uparrow \infty$, $p_n = o(\log n)$ *и*

$$|z_n| = 1 - p_n/\log n. \tag{7.1}$$

Если $f \in N$ *и* $\sum_n |f(z_n)| < \infty$, *то* $f \equiv 0$.

Ясно, что следствие 7.6 улучшает теорему 7.4 и дает утвердительный ответ на вопрос из [CTW], сформулированный после теоремы 7.4. В [Ei5] показано, что теорема 7.5 и следствие 7.6 точные. Более того, в [Ei5] теорема 7.5 распространена на класс W_ν δ-субгармонических функций в единичном шаре (определение класса W_ν дано в §6). При этом вместо (7.1) рассмотрено более общее условие: прелполагается, что $|z_n| = 1 - p_n/\log t_n$, где $t_{n+1} - t_n \geqslant \delta > 0$.

Рассмотрим теперь еще одну близкую задачу в единичном круге U. Следуя А. Николау, Дж. По и П. Дж. Тома [NPT], будем говорить, что последовательность $\{z_n\} \subset U$ является (H^∞)-*редкой*, если существует функция $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$, такая, что $\sum_n (1 - |z_n|)|f(z_n)| < \infty$. Последовательность, не являющаяся редкой, называется *густой*. Зафиксируем $\alpha \in (0, \pi/2)$, и пусть (как и в §5) $\Gamma_\alpha(\tau)$ — угол Штольца с вершиной в τ. Для данной последовательности $\{z_i\} \subset U$ обозначим через $\kappa_\alpha(\tau)$ количество точек из $\{z_i\}$ в $\Gamma_\alpha(\tau)$.

Теорема 7.7 (Николау, По и Тома [NPT]). *Пусть последовательность* $\{z_i\}$ *удовлетворяет условию* (4.2).

a) *Если найдется* $\alpha > 0$ *такое, что* $\log^+ \kappa_\alpha(\tau) \in L^1(\mathbb{T})$, *то последовательность* $\{z_i\}$ *редкая.*

b) *Если последовательность* $\{z_i\}$ *редкая, то для любого* $\alpha > 0$ *существует постоянная* $C = C(\alpha) > 0$ *такая, что*

$$|\theta \in [0, 2\pi) : \log^+ \kappa_\alpha(\tau) \geqslant \lambda| \leqslant C/\lambda \quad \text{для всех } \lambda > 0.$$

Авторы замечают, что условие a) не является необходимым, а условие b) не является достаточным. Они получают более точное описание редких последовательностей в терминах генераций (подробнее см. §2 в [NPT]).

Мы тоже рассмотрим последовательности, удовлетворяющие условию разделения (4.2). Но наш подход отличается от подхода, использованного в [CTW] и [NPT]. Мы покажем, что рассуждения, основанные на теореме 2.10, позволяют изучить задачи обоих типов, рассмотренных в теореме 7.3 и в теореме 7.7.

Предложение 7.8. *Пусть* $0 < \delta_n < 1$, $\delta_{n+1}/\delta_n \leqslant \beta < 1$. *Пусть, далее,* k_n — *заданные натуральные числа, и*

$$z_{n,j} = (1 - \delta_n)\exp(2\pi i j/k_n), \quad 1 \leqslant j \leqslant k_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для любой функции $f \in H^\infty$ *из условия*

$$\sum_{n,j} |f(z_{n,j})| < \infty \tag{7.2}$$

следует тождество $f \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $\{z_{n,j}\}$ *не является последовательностью Бляшке, т.е.*

$$\sum_n \delta_n k_n = \infty. \tag{7.3}$$

Доказательство. Если вышеуказанная импликация имеет место для любой функции $f \in H^\infty$, то $\{z_{n,j}\}$ не является последовательностью Бляшке.

Обратно, предположим, что выполнено условие (7.3). Выберем произвольное число $K > 1$. Без ограничения общности можно предполагать, что $k_{n+1} \geqslant K k_n$. Действительно, пусть индексы n_i таковы, что

$$n_1 = 1, \quad k_n < K k_{n_i}, \ n_i \leqslant n \leqslant n_{i+1} - 1, \quad k_{n_{i+1}} \geqslant K k_{n_i}.$$

Тогда в силу (7.3) имеем

$$\infty = \sum_n \delta_n k_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=n_i}^{n_{i+1}-1} \delta_n k_n \leqslant K \sum_{i=1}^{\infty} k_{n_i} \sum_{n=n_i}^{n_{i+1}-1} \delta_n \leqslant c \sum_{i=1}^{\infty} k_{n_i} \delta_{n_i}, \quad c = c(K, \beta).$$

Таким образом, достаточно доказать наше утверждение для подпоследовательности $\{z_{n_i,j}\}$; мы будем использовать для нее то же самое обозначение $\{z_{n,j}\}$. Можно предполагать также, что $\operatorname{dist}(z_{n,j}, z_{n,j+1}) \approx k_n^{-1} > \delta_n$ (в противном случае мы опять выделим подпоследовательность, удалив часть точек $z_{n,j}$ для каждого n, для которого $k_n^{-1} \leqslant \delta_n$).

Пусть P — фиксированное положительное число, которое будет выбрано позже. Возьмем произвольную функцию $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$, и пусть $D^k(w_k, r_k)$ — система кружков из теоремы 2.10. Достаточно установить существование подпоследовательности $\{z'_{n,j}\}$, лежащей в $U \setminus \bigcup_k D^k$. Действительно, из (2.35) получаем

$$\sum_{n,j} |f(z_{n,j})| \geqslant \sum_{n,j} |f(z'_{n,j})| = \infty,$$

что нам и требуется.

Допустим, что $z_{n,j} \in \bigcup_k D^k$ для всех достаточно больших n. Разделим все круги D^k на две группы:

$$\mathcal{D}_1 = \{D^k : r_k < \tfrac{1}{8}(1 - |w_k|)\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{D^k : r_k \geqslant \tfrac{1}{8}(1 - |w_k|)\}.$$

Будем использовать то же обозначение для объединения соответствующих кругов. Покажем, что

$$\sum_{z_{n,j}\in\mathcal{D}_1}(1-|z_{n,j}|)<\infty.$$

По построению каждый круг $D^k\in\mathcal{D}_1$ содержит не более $N=N(\delta)$ точек $z_{n,j}$. Кроме того, круги из $\mathcal{D}_1$ не пересекают ∂U, и в силу (2.34)

$$\eta(D^k)=\sum_{a_i\in D^k}\log\frac{1}{|a_i|},\qquad D^k\in\mathcal{D}_1,$$

где a_i — нули функции f. Согласно неравенству (2.37), каждый круг $D^k\in\mathcal{D}_1$ содержит хотя бы один нуль, и каждый нуль принадлежит не более чем A_2 кругам $D^k\in\mathcal{D}_1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{z_{n,j}\in\mathcal{D}_1}(1-|z_{n,j}|)&\leqslant\sum_{D^k\in\mathcal{D}_1}\sum_{z_{n,j}\in D^k}(1-|z_{n,j}|)\\&\leqslant c\sum_{D^k\in\mathcal{D}_1}\sum_{a_i\in D^k}(1-|a_i|)\leqslant cA_2\sum_i(1-|a_i|)<\infty.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Пусть $\mathcal{J}$ — множество таких индексов n, что количество точек $z_{n,j}$ в $\mathcal{D}_1$ больше, чем $k_n/6$. Тогда

$$\sum_{n\in\mathcal{J}}\delta_n k_n<6\sum_{z_{n,j}\in\mathcal{D}_1}(1-|z_{n,j}|)<\infty.$$

Исключим точки $z_{n,j}$ с $n\in\mathcal{J}$ из нашей последовательности. Таким образом, мы можем предполагать, что не менее $\frac{5}{6}k_n$ точек $z_{n,j}$ принадлежит $\mathcal{D}_2$ для каждого n. Введем следующие множества кругов:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^1_{2,n}&=\{D^k\in\mathcal{D}_2: D^k \text{ содержит ровно одну точку } z_{n,j} \text{ и}\\&\qquad\qquad\text{хотя бы одну точку } z_{i,j} \text{ с } i<n\};\\\mathcal{D}^2_{2,n}&=\{D^k\in\mathcal{D}_2: D^k \text{ содержит хотя бы две точки } z_{n,j}\};\\\mathcal{D}^3_{2,n}&=\{D^k\in\mathcal{D}_2: D^k \text{ содержит ровно одну точку } z_{n,j} \text{ и}\\&\qquad\qquad\text{не содержит точки } z_{i,j} \text{ с } i<n\}.\end{aligned}$$

Заметим, что все круги D^k из $\mathcal{D}^3_{2,i}$ и $\mathcal{D}^3_{2,j}$, $i\neq j$, различны. Обозначим через $N^i_{2,n}$, $i=1,2,3$, количество точек $z_{n,j}$ в соответствующих кругах. Каждая точка $z\in U$ принадлежит не более чем A_2 кругам D^k. Следовательно,

$$N^1_{2,n}\leqslant A_2\sum_{i=1}^{n-1}k_i<A_2k_{n-1}\sum_{i=0}^{\infty}K^{-1}\leqslant A_2(K-1)^{-1}k_n<k_n/6,$$

если K достаточно велико.

Оценим теперь $N^2_{2,n}$. Положим $d_n = \min_{i\neq j}|z_{n,i} - z_{n,j}|$. Если $D^k(w_k, r_k) \in \mathcal{D}^2_{2,n}$, то $2r_k \geqslant d_n$, и D^k содержит не более $2r_k/d_n + 1 \leqslant 4r_k/d_n$ точек $z_{n,j}$. Согласно оценке (2.36),

$$N^2_{2,n} < \sum_k \frac{4r_k}{d_n} < \frac{4}{d_n P} < \frac{4k_n}{cP} < \frac{k_n}{6},$$

если выбрать P достаточно большим. Так как каждая точка $z_{n,j}$ принадлежит хотя бы одному кругу D^k, то

$$N^3_{2,n} \geqslant \tfrac{5}{6}k_n - N^1_{2,n} - N^2_{2,n} > \tfrac{1}{2}k_n.$$

Заметим, что если $z_{n,j} \in D^k \in \mathcal{D}_2$, то $r_k > \frac{1}{9}\delta_n$. Действительно, если $r_k \leqslant \frac{1}{9}\delta_n$, то $|w_k| < |z_{n,j}| + r_k$, откуда

$$r_k \geqslant \tfrac{1}{8}(1 - |w_k|) > \tfrac{1}{8}(\delta_n - r_k) \geqslant \tfrac{1}{8}\cdot 8r_k = r_k,$$

и мы приходим к противоречию. Так как множество $\mathcal{D}^3_{2,n}$ состоит из не менее чем $N^3_{2,n}$ кругов D^k, и каждый круг D^k принадлежит не более чем одному множеству $\mathcal{D}^3_{2,n}$, имеем

$$\sum_n k_n\delta_n \leqslant 2\sum_n N^3_{2,n}\delta_n \leqslant 2\cdot 9\sum_n \sum_{D^k\in\mathcal{D}^3_{2,n}} r_k \leqslant 18\sum_k r_k < 18/P < \infty$$

(мы использовали также (2.36)). Таким образом, предположив, что $z_{n,j} \in \bigcup_k D^k$ для всех достаточно больших n, мы пришли к противоречию с (7.3), и доказательство предложения 7.8 закончено. •

Положим

$$Y_m = \{z : 1 - 2^{-m} \leqslant |z| < 1 - 2^{-m-1}\}.$$

Для заданной последовательности $\{z_i\}$ обозначим через N_m количество точек z_i в Y_m.

Предложение 7.9. а) *Предположим, что последовательность* $\{z_i\}$ *удовлетворяет условию* (4.2). *Если*

$$\sum_m N_m 2^{-m}\exp\{-\gamma 2^m/N_m\} = \infty \quad \textit{для любого } \gamma > 0, \tag{7.5}$$

то последовательность $\{z_i\}$ *густая.*

b) *Пусть последовательность* $\{N_m\}$ *натуральных чисел такова, что* $N_m 2^{-m} \downarrow 0$ *при* $m \to \infty$ *и*

$$\sum_m N_m 2^{-m} \exp\{-\gamma 2^m / N_m\} < \infty \quad \text{при некотором } \gamma > 0. \tag{7.6}$$

Тогда существует последовательность $\{z_i\}$, *удовлетворяющая условию* (4.2), *для которой* N_m *совпадают с данными числами и которая не является густой.*

Например, (7.5) выполнено при $N_m = p_m 2^m / \log m$, где $p_m \to \infty$ и $p_m = O(\log m)$. Если же $N_m \leqslant p 2^m / \log m$ с положительной постоянной p, то выполнено (7.6).

Предложения 7.8 и 7.9 не зависят от результатов из [CTW] и [NPT], но имеется определенная связь с теоремой 6 из [NPT].

Доказательство предложения 7.9. a) Пусть задана функция $f \in H^\infty$, $f \not\equiv 0$. Положим $P_m = C_f 2^m / N_m$, где постоянная C_f будет выбрана позже, и пусть $D^{m,k}(w_{m,k}, r_{m,k})$ — система кружков из теоремы 2.10 с $P = P_m$. Положим

$$\mathcal{D}_1 = \{D^{m,k} : D^{m,k} \cap Y_m \neq \varnothing,\ r_{m,k} < \tfrac{1}{8}(1 - |w_{m,k}|),\ m = 1, 2, \ldots\}.$$

Каждый круг из $\mathcal{D}_1$ пересекает не более двух множеств Y_m. Для каждого m кратность семейства $\{D^{m,k}\}$ равна абсолютной постоянной A_2. Поэтому кратность кругов из $\mathcal{D}_1$ не превосходит $3A_2$. Те же соображения, что и в (7.4), показывают, что

$$\sum_{z_i \in \mathcal{D}_1} (1 - |z_i|) < \infty.$$

Обозначим через $\mathcal{J}$ множество таких индексов m, для которых либо $N_m = 0$, либо количество точек z_i в $\mathcal{D}_1 \cap Y_m$ больше, чем $N_m / 6$. Тогда

$$\sum_{m \in \mathcal{J}} N_m 2^{-m} < c \sum_{z_i \in \mathcal{D}_1} (1 - |z_i|) < \infty.$$

Исключим множества Y_m, $m \in \mathcal{J}$, и соответствующие точки z_i из нашего рассмотрения. Множество оставшихся индексов $m \notin \mathcal{J}$ обозначим через $\mathcal{M}$. Очевидно, (7.5) выполнено и в том случае, если суммировать по $m \in \mathcal{M}$. Зафиксируем $m \in \mathcal{M}$. Положим

$$\mathcal{D}^1_{2,m} = \{D^{m,k} : D^{m,k} \notin \mathcal{D}_1 \text{ и } D^{m,k} \text{ содержит не менее двух точек } z_i \in Y_m\};$$
$$\mathcal{D}^2_{2,m} = \{D^{m,k} : D^{m,k} \notin \mathcal{D}_1 \text{ и } D^{m,k} \text{ содержит ровно одну точку } z_i \in Y_m\},$$

и пусть $N^i_{2,m}$, $i = 1, 2$, — количество точек $z_i \in Y_m$ в соответствующих кругах. В силу (4.2) каждый круг $D^{m,k} \in \mathcal{D}^1_{2,m}$ содержит не более чем $c_\delta r_{m,k} 2^m$ точек $z_i \in Y_m$. Отсюда и из (2.36) получаем

$$N^1_{2,m} \leqslant c_\delta 2^m \sum_k r_{m,k} < \frac{c_\delta 2^m}{P_m} = \frac{c_\delta N_m}{C_f} < \frac{N_m}{6},$$

если выбрать C_f достаточно большим.

Оценим теперь $N^2_{2,m}$. Как и в доказательстве предложения 7.8, показываем, что если $z_i \in D^{m,k} \notin \mathcal{D}_1$, то $r_{m,k} > \frac{1}{9}(1 - |z_i|)$. В силу (2.37)

$$\eta(D^{m,k}) > cP_m r_{m,k} > c_1 \frac{C_f 2^m}{N_m}(1 - |z_i|) > \frac{c_2 C_f}{N_m}.$$

Так как кратность семейства $\{D^{m,k}\}$ с фиксированным m равна A_2, имеем

$$A_2 \eta(U) \geqslant \sum_{D^{m,k} \in \mathcal{D}^2_{2,m}} \eta(D^{m,k}) > \sum_{D^{m,k} \in \mathcal{D}^2_{2,m}} \frac{c_2 C_f}{N_m} \geqslant \frac{c_2 C_f N^2_{2,m}}{N_m}.$$

Таким образом, $N^2_{2,m} < N_m/6$, если C_f достаточно велико.

Мы видим, что для любого $m \in \mathcal{M}$ не менее чем $N_m/2$ точек $z_i \in Y_m$ не принадлежат объединению $\bigcup_k D^{m,k}$. Согласно (2.35),

$$\log |f(z_i)| > -\gamma 2^m / N_m, \quad z_i \in Y_m \setminus \bigcup_k D^{m,k}$$

с некоторой положительной постоянной γ. Используя (7.5) с $m \in \mathcal{M}$, находим

$$\begin{aligned}\sum_i (1 - |z_i|)|f(z_i)| &\geqslant c \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{z_i \in Y_m \setminus \bigcup_k D^{m,k}} 2^{-m} \exp\{-\gamma 2^m / N_m\} \\ &\geqslant \frac{c}{2} \sum_{m \in \mathcal{M}} N_m 2^{-m} \exp\{-\gamma 2^m / N_m\} = \infty,\end{aligned}$$

и первая часть предложения 7.9 доказана.

b) Для ограниченных последовательностей $\{N_m\}$ наше утверждение тривиально. Предположим, что последовательность $\{N_m\}$ неограниченна. Без потери общности можно считать, что $N_m \uparrow \infty$ при $m \to \infty$. В противном случае мы возьмем $N'_m = \max\{N_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Легко видеть, что (7.6) выполняется с N'_m вместо N_m. Так как $N_m 2^{-m} \downarrow 0$, то существует возрастающая функция $P_1(t)$ такая, что

$$c_1 2^m / N_m < P_1(t) < c_2 2^m / N_m, \quad 1 - 2^{-m} \leqslant t \leqslant 1 - 2^{-m-1},$$

где положительные числа c_1, c_2 будут выбраны позднее, $P_1(t) \uparrow \infty$, $P_1(t)(1-t) \downarrow 0$ при $t \to 1$. Положим $\phi(t) = 1-t$ и применим вторую часть леммы 4.3. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность из леммы 4.3. Из (4.8) получаем

$$N_z(t) > N_m, \quad 1 - 2^{-m} \leqslant t \leqslant 1 - 2^{-m-1},$$

если выбрать c_1, c_2 достаточно малыми. Если взять число T достаточно большим, то в силу (4.6)

$$\log |f(z_k)| \leqslant -c_1 2^m T/N_m < -\gamma 2^m/N_m, \quad z_k \in Y_m.$$

Для каждого m отберем N_m точек из $\{z_n\}$, лежащих в Y_m. Полученную последовательность будем также обозначать $\{z_n\}$. Используя (7.6), находим

$$\begin{aligned}\sum_k (1 - |z_k|)|f(z_k)| &= \sum_m \sum_{z_k \in Y_m} (1 - |z_k|)|f(z_k)| \\ &\leqslant c \sum_m 2^{-m} N_m \exp\{-\gamma 2^m/N_m\} < \infty.\end{aligned}$$

Итак, последовательность $\{z_n\}$ не является густой, и доказательство предложения 7.9 завершено. •

Список литературы

[AE] Aikawa H., Essén M., *Potential theory-selected topics*, Lecture Notes in Math., vol 1633. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[AG] Armitage D. H., Gardiner S. J., *Classical potential theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag London, Ltd., London, 2001.

[Ba] Bagemihl F., *Some identity and uniqueness theorems for normal meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 No. 299 (1961).

[BS] Bagemihl F., Seidel W., *Sequential and continuous limits of meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 No. 280 (1960), 1–17.

[Be] Besicovitch A. S., *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions*. I, II, Proc. Cambridge Philos. Soc. **41** (1945), 103–110; **42** (1946), 1–10.

[Bo] Boas R. Ph., *Entire functions*, Academic Press, Inc., New York, 1954.

[CTW] Chow Y. S., Trent T., Wang J. Li-Ming, *A separating problem on function spaces*, J. Math. Anal. Appl. **111** (1985), 177–187.

[Da] Danikas N., *On an identity theorem in the Nevanlinna class N*, J. Approx. Theory 77 (1994), 184–190.

[Ei1] Эйдерман В. Я., *Теорема единственности для мероморфных функций*, Изв. АН АрмССР. Мат. **15** (1980), №2, 110–126.

[Ei2] Эйдерман В. Я., *Об убывании δ-субгармонических в шаре функций на последовательности точек*, Моск. инж.-строит. ин-т, М., 1982. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 18 мая 1982 г., №2514-82 Деп.)

[Ei3] Эйдерман В. Я., *Оценки вне исключительных множеств и теоремы единственности для δ-субгармонических функций*, Дисс. на соиск. учен. ст. канд. физ.-мат. наук, М., 1983.

[Ei4] Эйдерман В. Я., *Об убывании аналитической в полуплоскости функции на последовательности точек*, Сиб. мат. ж. **24** (1983), №2, 180–192.

[Ei5] Эйдерман В. Я., *О сумме значений функций из некоторых классов на последовательности точек*, Изв. вузов. Мат. **1992**, №1, 89–97.

[Ei6] Эйдерман В. Я., *Об аппроксимации полиномами с малыми коэффициентами*, Мат. заметки **57** (1995), №1, 150–153.

[Ei7] Эйдерман В. Я., *Оценки потенциалов и δ-субгармонических функций вне исключительных множеств*, Изв. РАН. Сер. мат. **61** (1997), №6, 181–218.

[Ei8] Эйдерман В. Я., *Метрические характеристики исключительных множеств и теоремы единственности в теории функций*, Дисс. на соиск. учен. ст. докт. физ.-мат. наук. М., 1999.

[Es1] Essén M., *On Wiener conditions for minimally thin and rarefied sets*, Complex Analysis (J. Hersch and A. Huber, eds.), Birkhäuser, Basel-Boston, MA, 1988, 41–50.

[Es2] Essén M., *On minimal thinness, reduced functions and Green potentials*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **36** (1993), 87–106.

[Ga1] Гаврилов В. И., *Об одной теореме А. Л. Шагиняна*, Вестн. МГУ. Сер. 1 мат. мех. **1966**, №2, 3–10.

[Ga2] Гаврилов В. И., *О пределах по последовательностям точек нормальных мероморфных функций*, Докл. АН СССР **138** (1961), №1, 16–17.

[Go] Говоров Н. В., *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге*, Теория функций. функц. анал. и их прил. (Харьков) **6** (1968), 130–150.

[Gr] Гришин А. Ф., *О регулярности роста субгармонических функций*, Теория функций. функц. анал. и их прил. (Харьков) **6** (1968), 3–29; **7** (1968), 59–84; **8** (1969). 126–135.

[Gu] de Guzmán M., *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Math., vol. 481. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[Hav1] Хавинсон С. Я., *Об экстремальных задачах для функций, удовлетворяющих дополнительным ограничениям внутри области, и применении этих задач к вопросам аппроксимации*, Докл. АН СССР **135** (1960), №2, 270–273.

[Hav2] Хавинсон С. Я., *Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области*, Успехи мат. наук **18** (1963), №2, 25–98.

[Hav3] Хавинсон С. Я., *О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов*, Изв. АН АрмССР. Мат. **6** (1971), №2–3, 221–234.

[Ha1] Hayman W. K., *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964; Пер. на рус. яз.. Мир, М., 1966.

[Ha2] Hayman W. K., *Identity theorems for functions of bounded characteristic*, J. London Math. Soc. (2) **58** (1998), 127–140.

[He] Heins M., *The minimum modulus of a bounded analytic function*, Duke Math. J. **14** (1947), 179–215.

[HSS] Hwang J. S., Schnitzer F, Seidel W., *Uniqueness theorems for bounded holomorphic functions*. Math. Z. **122** (1971), 366–370.

[KK] Kahane J.-P., Katznelson Y., *Sur le comportement radial des fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), A718–A719.

[KMP] Korenblum B., Mascuilli A., Panariello J., *A generalization of Carleman's uniqueness theorem and a discrete Phragmén-Lindelöf theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 7. 2025–2032.

[KR] Korenblum B., Racquet J. C., *Concurrence of uniqueness and boundedness conditions for regular sequences*, Complex Variables Theory Appl. **41** (2000), 231–239.

[Ko] Korevaar J., *Approximation on curves by linear combinations of exponentials*, Approximation Theory (Proc. Internat. Sympos., Univ. Texas, Austin, 1973), Academic Press, New York. 1973, pp. 387–393.

[KZ] Korevaar J., Zeinstra R., *Transformées de Laplace pour les courbes à pente bornée et un résultat correspondant du type Müntz-Szász*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 14, 695–698.

[Ku] Кудина Л. С., *Оценки для функций, представимых в виде разности субгармонических в шаре*, Теория функций, функц. анал. и их прил. (Харьков) **14** (1971), 58–67.

[La] Ландкоф Н. С., *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.

[LV] Lehto O., Virtanen K. J., *Boundary behaviour and normal meromorphic functions*, Acta Math. **97** (1957), no. 1-2, 47–65.

[Le1] Леонтьев А. Ф., *О росте целой функции экспоненциального типа на последовательности точек*, Мат. сб. **96(138)** (1975), №4, 601–613.

[Le2] Леонтьев А. Ф., *Последовательности полиномов из экспонент*, Наука, М., 1980.

[Lev] Levinson N., *Gap and density theorems*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 26, Amer. Math. Soc., New York, 1940.

[LS] Lyubarskiĭ Yu. I., Seip K., *A uniqueness theorem for bounded analytic functions*, Bull. London Math. Soc. **29** (1997), 49–52.

[MH] Мазья В. Г., Хавин В. П., *О решениях задачи Коши для уравнения Лапласа (единственность, нормальность, аппроксимация)*, Тр. Моск. мат. о-ва **30** (1974), 61–114.

[Me] Мейман Н. Н., *К теории функций ограниченного вида*, Докл. АН СССР **204** (1972). №1, 34–37.

[MRN] Mikusinski J. G., Ryll-Nardzewski C., *A theorem on bounded moments*, Studia Math. **13** (1953), №1, 51–55.

[Mu1] Мурадян О. А., *О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца*, Изв. АН АрмССР. Мат. **8** (1973), №1, 70–87.

[Mu2] Мурадян О. А., *О некоторых теоремах единственности и величинах коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в задаче Мюнца*, Изв. АН АрмССР. Мат. **12** (1977). №6, 435–446.

[NPT] Nicolau A., Pau J., Thomas P. J., *Smallness sets for bounded holomorphic functions*, J. Anal. Math. **82** (2000), 119–148.

[Ni] Никольский Н. К., *Полные расширения вольтерровых операторов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **33** (1969), 1349–1355.

[PT] Pau J., Thomas P. J., *Decrease of bounded holomorphic functions along discrete sets*. Preprint, 2001.

[Ru] Rung D. C., *Behavior of holomorphic functions in the unit disk on arcs of positive hyperbolic diameter*, J. Math. Kyoto Univ. **8** (1968), 417–464.

[Š] Шагинян А. Л., *Об одном основном неравенстве в теории функций и его приложениях*. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук **12** (1959), №1, 3–25.

[Ša1] Шахвердян А. Ю., *Гиперболическая емкость и убывание мероморфных в круге функций*. Докл. АН АрмССР **66** (1978), №2, 76–79.

[Ša2] Шахвердян А. Ю., *Гиперболическая емкость и скорость убывания мероморфных в круге функций*, Докл. АН АрмССР **68** (1979), №2, 88–94.

[Ša3] Шахвердян А. Ю., *Об убывании ограниченных аналитических в круге функций*, Изв. АН АрмССР. Мат. **14** (1979), №3, 157–167.

[Ša4] Шахвердян А. Ю., *К теоремам А. Л. Шагиняна о предельном убывании мероморфных функций*, Докл. АН АрмССР **70** (1980), №5, 266–273.

[Ša5] Шахвердян А. Ю., *Условия типа критерия Н. Винера и оценки для потенциалов и субгармонических функций*, Докл. АН АрмССР **76** (1983), №1, 3–7.

[Sc] Schatte P., *Über beschränkte analytische Funktionen*, Math. Nachr. **34** (1967), no. 5/6. 257–275.

[T] Thomas P. J., *Sampling sets for Hardy spaces on the disk*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 10, 2927–2932.

[U1] Ушакова И. В., *Теорема единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге*, Докл. АН СССР **130** (1960), №1, 29–32.

[U2] Ушакова И. В., *Об одной теореме единственности для функций, голоморфных и ограниченных в полуплоскости*, Харьков. политехн. ин-т, Харьков, 1980. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 21 июля 1980 г., №3197-80 Деп.)

[U3] Ушакова И. В., *Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге*, Докл. АН СССР **137** (1961), №6, 1319–1322.

[U4] Ушакова И. В., *Некоторые теоремы единственности мероморфных функций*, Вестн. Харьк. ун-та №93. Мат. вып. **38** (1973), 32–43.

[U5] Ушакова И. В., *Теорема единственности для функций конечной степени и класса A в полуплоскости*, Харьк. политехн. ин-ст, Харьков, 1982. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 дек. 1982 г., №6427-82 Деп.)

[Va1] Вагаршакян А. А., *Теоремы единственности для ограниченных аналитических функций и их приложение в теории аппроксимации*, Изв. АН АрмССР. Мат. **12** (1977), №5. 345–357.

[Va2] Вагаршакян А. А., *О единственности аналитических функций, растущих вблизи границы*, Изв. АН АрмССР. Мат. **16** (1981), №1, 3–24.

[Vu] Vuorinen M., *Koebe arcs and quasiregular mappings*, Math. Z. **190** (1985), 95–106.

[Ze] Zeinstra R., *Zeros and regular growth of Laplace transforms along curves*, J. Reine Angew. Math. **424** (1992), 1–15.

Московский государственный
строительный университет
129337 Москва, Ярославское шоссе, 26
E-mail: eiderman@orc.ru

Поступило 15 августа 2002 г.

Department of Mathematics
Uppsala University
Box 480, S-751 06 Uppsala
Sweden
E-mail: matts.essen@math.uu.se