

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Гинзбург, Новые обобщения геометрической теоремы Пуанкаре, *Функц. анализ и его прил.*, 1987, том 21, выпуск 2, 16–22

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

19 марта 2025 г., 09:38:27



УДК 514 + 515.16

[НОВЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ ПУАНКАРЕ

В. Л. Г и н з б у р г

В работе доказано, что число замкнутых траекторий поля ядер замкнутой невырожденной и сохраняющей центр тяжести 2-формы на тотальном пространстве ориентируемого расслоения со слоем окружность над ориентируемой компактной двумерной базой не меньше минимального числа критических точек гладкой функции на базе, если поле ядер C^1 -близко к вертикальному. С учетом кратности это число не меньше минимального числа критических точек морсовской функции на базе. Мы также оцениваем снизу число замкнутых траекторий в случае многомерной базы. Форма сохраняет центр тяжести, если ее кохомологический класс поднят с базы. В качестве приложения мы доказываем, что число замкнутых траекторий частицы на поверхности в сильном и мало меняющемся перпендикулярном поверхности магнитном поле не меньше, чем минимальное число критических точек функции на поверхности.

Автор благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи о замкнутых траекториях полей ядер форм, сохраняющих центр тяжести и за помощь в работе.

I. Условие сохранения центра тяжести. Пусть $S^1 \rightarrow M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над замкнутым (компактным и без края) ориентируемым многообразием B .

О п р е д е л е н и е 1. Замкнутая 2-форма ω на M сохраняет центр тяжести (СЦТ), если выполнено одно из следующих равносильных условий:

1) для любой замкнутой кривой Γ в B интеграл ω по 2-цепи $p^{-1}(\Gamma)$ равен нулю;

2) существует замкнутая 2-форма ω_0 на B такая, что $[\omega] = p^*[\omega_0]$;

3) $p_![\omega] = 0$, где $p_!$ — прямой образ в кохомологиях — трансфер ($p_! = D_B^{-1} p_* D_M$, $D: H^* \rightarrow H_*$ — отображение двойственности Пуанкаре).

Равносильность условий 1) — 3) вытекает из точной последовательности Гизина.

Предположим раз и навсегда, что B четномерно. Тогда любая 2-форма на M имеет в каждой точке ненулевое ядро и называется невырожденной, если это ядро одномерно (в каждой точке).

О п р е д е л е н и е 2 (см. [1]). Симплектический диффеоморфизм $\varphi_1: B \rightarrow B$ называется гомологичным тождественному (ГТ), если его можно соединить с тождественным гладкой кривой φ_t , состоящей из симплектических диффеоморфизмов так, что поле скоростей $\dot{\varphi}_t$ имеет однозначную функцию Гамильтона h_t . Если φ_1 ГТ диффеоморфизм, то φ_t можно выбрать так, что h_t периодична по t с периодом 1.

Исследование неподвижных точек ГТ диффеоморфизмов можно свести к исследованию невырожденных СЦТ форм.

Рассмотрим прямое произведение $M = B \times S^1$, $S^1 = [0, 1]/0 \sim 1$. Пусть ω — такая замкнутая невырожденная 2-форма на M , что поле направлений $\text{Ker } \omega$ трансверсально «горизонтальным» многообразиям $B_t = B \times \{t\}$, $t \in S^1$. Зафиксируем $0 \in S^1$. Поле $\text{Ker } \omega$ определяет симплектическое отображение Пуанкаре $\Phi(\omega): (B_0, \omega_0) \rightarrow (B_0, \omega_0)$, $\omega_0 = \omega | B_0$. Любой

ГТ диффеоморфизм $(B_0, \omega_0) \rightarrow (B_0, \omega_0)$ можно получить как отображение Пуанкаре СЦТ-формы $\omega = p^* \omega_0 - dh \wedge dt$.

Проекция p позволяет отождествить все B_t с B .

У т в е р ж д е н и е 1. а) ω СЦТ $\Rightarrow \Phi(\omega)$ ГТ, если либо база B двумерна, либо $\omega_t = \omega | B_t$ C^0 -близка к ω_0 при всех $t \in S^1$. Более того, существует диффеоморфизм $H: M \rightarrow M$ такой, что $H(B_t) = B_t$ при всех $t \in S^1$, $H|B_0 = \text{id}$ и $H^* \omega = p^* \omega - dh \wedge dt$, где $h \in C^\infty(M)$.

б) $\Phi(\omega)$ ГТ $\Rightarrow \omega$ СЦТ, если $\omega - p^* \omega_0$ C^0 -мала, и либо класс когомологий $[\omega_0]$ целочисленный, либо $\cup[\omega_0]^{n-1}: H^1(B; \mathbf{R}) \rightarrow H^{2n-1}(B; \mathbf{R})$ -изоморфизм ($2n = \dim B$).

З а м е ч а н и е. $\Phi(\omega)$ ГТ $\not\Rightarrow \omega$ СЦТ. Пример: B — двумерный тор с координатами p и q , $\omega = dp \wedge dq + dp \wedge dt$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ориентируем $[0,1]$ от 0 к 1. Эта ориентация задает ориентацию поля направлений $\text{Ker } \omega$. Ориентированное поле направлений $\text{Ker } \omega$ определяет семейство диффеоморфизмов $B_0 \rightarrow B_t$, $t \in [0, 1]$, переводящих $x \in B_0$ в первое пересечение траектории с началом в x с B_t . Отождествив при помощи p B_t , $t \in S^1$, с B , получим диффеоморфизмы $\Phi_t(\omega): B \rightarrow B$, $t \in [0,1]$, $\Phi_0 = \text{id}$, $\Phi_1 = \Phi(\omega)$. Отображение $\omega \mapsto \{\Phi_t(\omega)\}$ — взаимно однозначное соответствие между множеством замкнутых невырожденных 2-форм на M , для которых $\text{Ker } \omega$ трансверсально B_t при всех $t \in S^1$, и множеством путей $[0, 1] \rightarrow \text{Diff } B$ с тождественным началом и симплектическим концом. Пусть φ_t — такой путь, $\bar{\varphi}$ — его гомотопический тип (с закрепленными концами), Γ — 1-цикл в B . Следуя А. Баньяге [5; 6], положим $\mathcal{S}(\bar{\varphi})(\Gamma) = \int \omega_0$, где интеграл берется по 2-цепи, «составленной» из 1-циклов $\varphi_t(\Gamma)$. $\mathcal{S}(\bar{\varphi})(\Gamma)$ не зависит от выбора $\{\varphi_t\} \in \bar{\varphi}$ и равен нулю, если Γ гомологичен нулю, поэтому $\mathcal{S}(\bar{\varphi}) \in H^1(B; \mathbf{R})$. Если ω такова, что $\Phi_t(\omega) = \varphi_t$, то $\mathcal{S}(\bar{\varphi})(\Gamma)$ равен интегралу ω по $p^{-1}(\Gamma)$, т. е. $\mathcal{S}(\bar{\varphi}) = p_![\omega]$.

Докажем а).

Л е м м а 1. Существует гомотопный тождественному сохраняющий все B_t диффеоморфизм $\Psi: M \rightarrow M$, для которого $\Psi^* \omega | B_t = \omega_0$, при всех $t \in S^1$ и $\Psi|B_0 = \text{id}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Так как все стандартные сечения $B \rightarrow B_t$ гомотопны, то $[\omega_t] = [\omega_0]$. Если $\dim B = 2$ или ω_t C^0 -близка к ω_0 , то для каждого $t \in S^1$ найдется такое гладкое по t и $\tau \in [0, 1]$ семейство замкнутых невырожденных 2-форм $\omega_{t,\tau}$ на B_t , соединяющее ω_0 и ω_t , что $[\omega_{t,\tau}] = [\omega_0]$ и $\omega_{0,\tau} = \omega_0$ при всех $\tau \in [0, 1]$. По теореме Мозера [9] существует семейство диффеоморфизмов $\Psi_{t,\tau}: (B_t, \omega_0) \rightarrow (B_t, \omega_{t,\tau})$, гладко зависящее от t и τ , для которого $\Psi_{t,\tau_0} = \text{id}$, $\Psi_{0,\tau} = \text{id}$ при всех t и τ . Семейство $\{\Psi_{t,\tau}\}$ задает искомый Ψ . Лемма доказана.

Форма $\omega' = \Psi^* \omega$ сохраняет центр тяжести и $\omega' | B_t = \omega_0$, т. е. диффеоморфизмы $\varphi_t = \Phi_t(\omega') = \Psi_{t,1}^{-1} \Phi_t(\omega)$ — симплектические при всех $t \in [0, 1]$ и $\mathcal{S}(\bar{\varphi}) = 0$.

Обозначим связную компоненту единицы в группе симплектических диффеоморфизмов $(B, \omega_0) \rightarrow (B, \omega_0)$ через G .

Л е м м а 2. Пусть $\{\varphi_t\}$ — путь в G , $\varphi_0 = \text{id}$ и $\mathcal{S}(\bar{\varphi}) = 0$, тогда существует такой гомотопный (с закрепленными концами) ему в G путь g_t , что поле \dot{g}_t гамильтоново при всех $t \in [0, 1]$. Обратно, если $\{\varphi_t\}$ — путь в G и $\dot{\varphi}_t$ — гамильтоново поле при всех $t \in [0, 1]$, то $\mathcal{S}(\bar{\varphi}) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы дано А. Баньягой [5]. Положим: $F_t = g_t^{-1} \varphi_t$, $\varphi_t = \Phi_t(\omega')$. Петля $\{F_t\}$ гомотопна id и определяет такой диффеоморфизм $F: M \rightarrow M$, что $F^* \omega' = p^* \omega_0 - dh \wedge dt$ для некоторой $h \in C^\infty(M)$. Диффеоморфизмы Ψ и F гомотопны id , для завершения доказательства п. а) осталось положить $H = F\Psi$.

Докажем б). Так как $\Phi(\omega)$ — ГТ, существует такое семейство симплектических диффеоморфизмов $g_t: (B, \omega_0) \rightarrow (B, \omega_0)$, $t \in [0, 1]$, что $g_0 = \text{id}$,

$g_t = \Phi(\omega)$ и поле \dot{g}_t гамильтоново при всех t . Разность $\omega_t - \omega_0$ C^0 -мала при всех $t \in S^1$. Из леммы 1 вытекает, что найдется $\{\varphi_t\}$ — путь в G , гомотопный (в $\text{Diff } B$) пути $\Phi_t(\omega)$. Тогда $\mathcal{S}(\bar{\varphi}) = \mathcal{S}(\bar{\Phi}) = p_1[\omega]$, а по лемме 2 $\mathcal{S}(\bar{g}) = 0$. Пусть $\psi_t: (B, \omega_0) \rightarrow (B, \omega_0)$ — петля в G , полученная последовательным прохождением путей g_{2t} , $t \in [0, 1/2]$ и φ_{2-2t} , $t \in [1/2, 1]$, тогда $\mathcal{S}(\bar{\psi}) \in \mathcal{S}(\pi_1(G, \text{id}))$. Очевидно, что если $[\omega_0]$ — целочисленный, то последняя группа дискретна в $H^1(B, \mathbf{R})$. Как показал А. Баньяга [5], это также верно, если $\bigcup [\omega_0]^{n-1}: H^1(B; \mathbf{R}) \rightarrow H^{2n-1}(B; \mathbf{R})$ — изоморфизм ($2n = \dim B$). Выберем 1-циклы $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, задающие базис в $H_1(B; \mathbf{R})$, тогда все значения $|\mathcal{S}(\bar{\psi})(\Gamma_j)| = |\langle [\omega], p^{-1}(\Gamma_j) \rangle|$ достаточно малы, если разность $p^*\omega_0 - \omega$ достаточно C^0 -мала. Следовательно, эти значения равны нулю, так как подгруппа $\mathcal{S}(\pi_1(G, \text{id}))$ дискретна. Значит, $p_1[\omega] = \mathcal{S}(\bar{\psi}) = 0$ и ω СЦТ. Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Лемма 1 доказана для $B = T^2$ [7].

Кратностью неподвижной точки отображения φ называется размерность локальной алгебры роста отображения $\varphi - \text{id}$ в этой точке [3]. Кратностью замкнутой траектории поля направлений называется кратность отображения Пуанкаре этой траектории. Если траектория невырождена (мондромия не имеет собственных чисел, равных 1), то ее кратность равна 1. Если поле направлений имеет вид $\text{Ker } \omega$ (ω — невырожденная 2-форма), то найдется сколь угодно C^1 -близкая к ω невырожденная 2-форма ω' такая, что $\text{Ker } \omega'$ имеет только невырожденные замкнутые траектории, и их число не больше, чем число замкнутых траекторий поля $\text{Ker } \omega$ с учетом кратности. Когда ω замкнута и СЦТ можно выбрать обладающую этими свойствами ω' . Доказательство стандартно.

С л е д с т в и е 1. Пусть B — поверхность рода g , а ω — такая замкнутая невырожденная СЦТ 2-форма на $B \times S^1$, что $\text{Ker } \omega$ трансверсально многообразиям $B \times \{t\}$ при всех $t \in S^1$, тогда $\text{Ker } \omega$ имеет не менее двух при $g = 0$ и трех при $g \geq 1$ геометрически различных замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $2g + 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следствие вытекает из утверждения 1 а) и результатов Н. А. Никишина [10] при $g = 0$, теоремы Кюнли и Цендера [7] при $g = 1$, результатов Ж.-К. Сикорова [12] при $g > 1$.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть ω — такая замкнутая 2-форма на $B \times S^1$, $\dim B = 2n$, что $\bigcup [\bar{\omega}]^{n-1}: H^1(B; \mathbf{R}) \rightarrow H^{2n-1}(B; \mathbf{R})$ — изоморфизм, где $\bar{\omega}$ — среднее значение формы $\omega|_{B \times \{t\}}$ по $t \in S^1$. Тогда ω СЦТ, если и только если $[\omega]^n \in \text{ann } p^*H^1(B; \mathbf{R})$, ($p: B \times S^1 \rightarrow B$ — естественная проекция).

Д о к а з а т е л ь с т в о стандартно.

З а м е ч а н и е. В утверждении 2 нельзя отказаться от изоморфности $\bigcup [\bar{\omega}]^{n-1}$. Действительно, если B — многообразие Делиня — Терстона [4] и $\omega = p^*\omega_0 + (p^*d\varphi) \wedge dt$, где ω_0 — симплектическая структура на B , а φ — угловая координата на слое расслоения $B \rightarrow T^2$, инвариантная относительно мондромии, то $[\omega]^2 \in \text{ann } p^*H^1(B; \mathbf{R})$, но ω не СЦТ.

Сформулируем теперь определения величин, через которые мы оценим число замкнутых траекторий поля $\text{Ker } \omega$.

II. Число критических многообразий функции на пространстве одномерного расслоения со слоем S^1 . Пусть, как и в п. I, $S^1 \rightarrow M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над ориентируемым замкнутым многообразием. Обозначим $\mathcal{E}_g(p)$ множество таких функций на M , что: 1) их критические многообразия — гладкие кривые; 2) проекции критических многообразий на базу гомологичны нулю. $\mathcal{E}_a(p)$ — подмножество в $\mathcal{E}_g(p)$, состоящее из функций f , критические многообразия которых невырождены по Ботту, т. е. ограничения d^2f на трансверсали к критическим многообразиям невырождены.

О п р е д е л е н и е 3. Геометрической (алгебраической) критичностью $K_g(B)$ ($K_a(B)$) многообразия B называется минимальное число критических точек гладкой (морсовской) функции на B . Геометрической (алгебраической) критичностью $K_g(p)$ ($K_a(p)$) расслоения p называется минимальное число критических многообразий функции из $\mathcal{E}_g(p)$ ($\mathcal{E}_a(p)$).

Имеют место следующие оценки:

$$2 \leq \underset{\wedge}{K_g(p)} \leq \underset{\wedge}{K_a(p)}, \tag{1}$$

$$K_g(B) \leq K_a(B),$$

$$K_a(p) \geq \Sigma \dim H_k(M; \mathbf{R})/2, \quad 0 \leq k \leq \dim M. \tag{2}$$

Оценка (1) очевидна, а (2) вытекает из неравенств Морса для функций с невырожденными критическими многообразиями.

Например, если B — ориентируемая поверхность рода g и p не тривиально, то (2) дает

$$K_a(p) \geq 2g + 1. \tag{3}$$

Это показывает, что (2) — грубая оценка: при $g = 0$ неравенство (3) хуже, чем (1). Когда $M = B \times S^1 \xrightarrow{p} B$ — тривиальное расслоение,

$$K_a(p) \geq \Sigma \dim H_k(B; \mathbf{R}), \quad 0 \leq k \leq \dim B. \tag{4}$$

Неравенство (4) следует из (2).

Т е о р е м а 1. Пусть B — ориентируемая, связная и компактная поверхность рода g , а p — ориентируемое расслоение над B со слоем S^1 ; тогда

- 1) $K_a(p) = 2g + 2$,
- 2) $K_g(p) = 3$ при $g > 0$,
- 3) $K_g(p) = 2$ при $g = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство 3) вытекает из (1). Нам надо показать, что число критических многообразий функции из $\mathcal{E}_g(p)$ ($\mathcal{E}_a(p)$) не меньше трех ($2g + 2$) при $g > 0$. Если число критических многообразий бесконечно, то все доказано, значит, мы можем считать, что все критические многообразия изолированы. Далее все (ко)гомологии — с коэффициентами в \mathbf{R} .

Докажем 2). Достаточно показать, что если $K_g(p) = 2$, то B диффеоморфно S^2 . Пусть $f \in \mathcal{E}_g(p)$, и f имеет ровно два критических многообразия: l_0 и l_1 . В этом случае $M \setminus l_0$ стягивается к l_1 , а $M \setminus l_1$ — к l_0 . Значит, $[l_0]$ и $[l_1]$ порождают $H_1(M)$, и так как $p(l_0)$ и $p(l_1)$ гомологичны нулю, то $p_*H_1(M) = 0$. Но $p_* \mid H_1(M)$ — эпиморфизм (это следует из последовательности Гизина). Следовательно, $H_1(B) = 0$ и B диффеоморфно S^2 .

Докажем 1). Если $g = 0$ или p тривиально, то 1) следует из (1) или (4). Пусть p не тривиально и $g > 0$. Согласно (3) достаточно показать, что $K_a(p) \neq 2g + 1$. Пусть $K_a(p) = 2g + 1$, т. е. найдется $f \in \mathcal{E}_a(p)$, имеющая ровно $2g + 1$ критическое многообразие. Тогда f имеет одно критическое многообразие индекса 0 (по Ботту), одно — индекса 2 и $2g - 1$ — индекса 1. Это следует из неравенств Морса для функций с невырожденными критическими многообразиями.

Пусть L — подпространство в $H_1(M)$, порожденное критическим многообразием индекса 0, тогда $\dim H_1(M) \leq \dim L + 2g - 1$. Действительно, $\dim H_1(M_{c+\varepsilon}) - \dim H_1(M_{c-\varepsilon}) \leq 1$, где $M_a = \{x \in M \mid f(x) \leq a\}$, $\varepsilon > 0$ мало, c — критическое значение индекса 1. Если $c = \max f$, то $H_1(M_{c-\varepsilon}) = H_1(M)$. Поскольку $p_*: H_1(M) \rightarrow H_1(B)$ — эпиморфизм и $p_* \mid L = 0$, $\dim H_1(B) \leq \dim p_*H_1(M) \leq 2g - 1$. Но $\dim H_1(B) = 2g - 1$ противоречие. Теорема доказана.

П р о б л е м а. Верно ли, что при любых p и B (p ориентируемо, B компактно и ориентируемо) имеют место равенства: $K_a(p) = K_a(B)$, $K_g(p) = K_g(B)$.

III. Основной результат.

Теорема 2. Пусть $S^1 \rightarrow M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над замкнутым ориентируемым четномерным многообразием B и ω — замкнутая невырожденная СЦТ 2-форма на M такая, что поле направлений $\text{Кег } \omega$ C^1 -близко к вертикали. Тогда $\text{Кег } \omega$ имеет не меньше $K_g(p)$ замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $K_a(p)$.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 число замкнутых траекторий поля $\text{Кег } \omega$ в расслоении над S^2 не меньше двух, в расслоении над поверхностью рода $g > 0$ — не меньше трех, а с учетом кратности — не меньше $2g + 2$.

З а м е ч а н и я. 1. Следствие 2 доказывает частный случай гипотезы В. И. Арнольда, согласно которой, если ω замкнута, невырожденна и СЦТ, а поле $\text{Кег } \omega$ трансверсально некоторой связности на расслоении p , то поле $\text{Кег } \omega$ имеет не менее $K_g(B)$ замкнутых траекторий, а учитывая кратности — не менее $K_a(B)$.

2. Если p тривиально, то следствие 2 покрывается следствием 1.

3. В случае $B = S^2$ достаточно C^0 -близости поля $\text{Кег } \omega$ к вертикали. Это вытекает из результата К. Саймона [13], по которому бездивергентное поле на S^3 , C^0 -близкое к вертикали, имеет не менее двух замкнутых траекторий, и того, что S^3 послойно покрывает тотальное пространство любого нетривиального S^1 -расслоения над S^2 .

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Зададим на p ориентацию, а на B — метрику. Зафиксируем для каждой точки $b \in B$ окрестность D_b радиуса меньшего, чем радиус инъективности. Пусть также P — какая-нибудь связность на p .

Для каждой точки $x \in M$ найдется единственное сечение $j_x: D_{p(x)} \rightarrow p^{-1}(D_{p(x)})$, $j_x(p(x)) = x$, P — плоское вдоль каждой геодезической с началом в $p(x)$. Введем на M метрику, в которой связность P ортогональна слоям и $p_* \upharpoonright P_x: P_x \rightarrow T_{p(x)} B$ — изометрия при всех $x \in M$. Пусть z_1 — векторное поле на M , имеющее вертикальную компоненту единичной длины, такое, что $i_{z_1}\omega = 0$, и z — проекция z_1 на P вдоль слоя. Поле $\text{Кег } \omega$ C^1 -близко к вертикали тогда и только тогда, когда поле z C^1 -мало. В этом случае траектория поля $\text{Кег } \omega$ с началом в $x \in M$, проходящая в положительном направлении, пересечет вложенный диск $\mathcal{D}_x = j_x(D_{p(x)})$ после одного оборота над слоем $p^{-1}(p(x))$. Обозначим эту точку пересечения $\varphi(x)$, а отрезок траектории от x до $\varphi(x)$ — через Γ_x . Соединим $p(x)$ и $p(\varphi(x))$ единственной геодезической, лежащей в $D_{p(x)}$, и обозначим ее подъем в \mathcal{D}_x через Δ_x . Ориентируем Γ_x и Δ_x от x к $\varphi(x)$.

Определим теперь функцию $S \in C^\infty(M)$, критические многообразия которой являются замкнутыми траекториями поля $\text{Кег } \omega$. Для этого зафиксируем $x_0 \in M$. Пусть $x \in M$ и $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ — кривая, соединяющая x_0 с x . Обозначим через $c(\gamma)$ 2-цепь, «составленную» из 1-циклов $\Gamma_{\gamma(t)}$ — $\Delta_{\gamma(t)}$, $t \in [0, 1]$. Положим $S(x) = \int \omega$ по 2-цепи $c(\gamma)$. Если $x = x_0$ (кривая замкнута), то 2-цикл $c(\gamma)$ гомологичен 2-циклу $p^{-1}(p(\gamma))$ и $\int \omega = 0$, так как ω СЦТ. Следовательно, $S(x)$ не зависит от выбора кривой γ , соединяющей x_0 с x . Очевидно, $S \in C^\infty(M)$.

Условимся считать, что геодезическая $p(\Delta_x)$ на B параметризована отрезком $[0, 1]$. Положим: $w_x = \dot{\Delta}_x(0)$.

Л е м м а 3. $d_x S = 0 \Leftrightarrow \Gamma_x$ замкнута.

Д о к а з а т е л ь с т в о. \Leftarrow) Немедленно следует из принципа наименьшего действия. \Rightarrow) Пусть $v \in T_x M$, тогда $d_x S(v)$ равно интегралу ω по инфинитезимальному четырехугольнику Π (рисунок). Это вытекает из определения функции S и принципа наименьшего действия. Если Γ_x C^1 -мало, то φ C^1 -близко к id , и Π близок к инфинитезимальному параллелограмму, полученному параллельным переносом v вдоль Δ_x . Интеграл ω по последнему

равен $\omega_x(v, w_x) + o(\|w_x\|) O(\|v\|)$. Поэтому $d_x S = i_{w_x} \omega + O(\|z\|_{C^1}) \cdot O(\|w_x\|)$. Значит, если z достаточно C^1 -мало, то $w_x \neq 0 \Rightarrow d_x S \neq 0$. Лемма доказана.

Очевидно, что $S \in \mathcal{E}_g(p)$. Таким образом, если z C^1 -мало, то число замкнутых траекторий поля Кер ω не меньше $K_g(p)$. Осталось показать, что если монодромия поля Кер ω вдоль замкнутой траектории Γ_x невырожденна, то квадратичная форма $d_x^2 S|_{P_x}$ невырожденна.

Из определения S и принципа наименьшего действия следует, что $d_x^2 S(y, y) = \omega_x(y, Ay)/2$, где $y \in P_x$ и $A: P_x \rightarrow P_x$ — оператор монодромии. Очевидна

Л е м м а 4. Пусть Ω — симплектическая форма на \mathbb{R}^{2n} и $A: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ — невырожденный симплектический линейный оператор. Квадратичная форма $\Omega(y, Ay)$, $y \in \mathbb{R}^{2n}$ невырожденна тогда и только тогда, когда A не имеет собственных чисел ± 1 .

Монодромия не имеет собственных чисел ± 1 , так как поле Кер ω C^1 -близко к вертикали и траектория Γ_x невырожденна. По лемме 5 форма $d_x^2 S|_{P_x}$ невырожденна. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если p тривиально, то в условиях теоремы 2 поле Кер ω имеет не менее $K_g(B)$ замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $K_a(B)$. Это легко доказать, если заметить, что угол между критическими многообразиями функции S и слоем и угол между Кер dS и слоем (в некритических точках) малы.

IV. Обсуждение результатов. Магнитные поля на поверхностях. Рассмотрим роль условия сохранения центра тяжести. Пусть $u \in H^1(B; \mathbb{R})$. Определим константы $K_g(u, p)$ и $K_a(u, p)$ аналогично константам $K_g(p)$ и $K_a(p)$, но с заменой функций на замкнутые формы когомологического класса p^*u . Аналогично теореме 2 доказывается

Т е о р е м а 3. Пусть $S^1 \xrightarrow{p} M \xrightarrow{p} B$ — ориентируемое расслоение над замкнутым ориентируемым многообразием B и ω — замкнутая невырожденная 2-форма на M такая, что поле Кер ω C^1 -близко к вертикальному. Тогда поле Кер ω имеет не менее $K_g(p; [\omega], p)$ замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $K_a(p; [\omega], p)$.

Применим теперь полученные результаты к исследованию магнитных полей на замкнутых ориентируемых поверхностях.

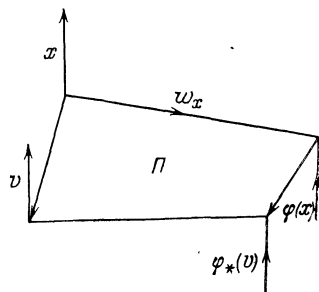
Пусть B — такая поверхность с метрикой H на T^*B , и $K: B \rightarrow \mathbb{R}^+$ — положительная гладкая функция. Следуя В. И. Арнольду [2], рассмотрим движение точки с единичной скоростью по B под действием поперечного магнитного поля K , т. е. движение со скоростью 1 по кривым, геодезическая кривизна которых в точке x есть $K(x)$. Это движение задается векторным полем $v = v_m + v_f$ на гиперповерхности $M = \{\xi \in T^*B \mid H(\xi) = 1/2\}$, где v_m — поле геодезического потока на M (т. е. v_m определяет движение свободной частицы на B), а $v_f = K \cdot X$, X — генератор действия $U(1)$ на M . Пусть $d\lambda$ — ограничение стандартной симплектической структуры (на кокасательном расслоении) на M , а dS — форма объема на B .

Очевидна

Л е м м а 5. Движение в магнитном поле K происходит по проекциям траекторий поля направлений Кер $(p^*K dS + d\lambda)$.

У т в е р ж д е н и е 3. Обозначим род B через g .

1) Если $g = 0$ и $K^{-1} C^0$ -мала, то движение имеет не менее двух замкнутых траекторий.



2) Если $g = 1$ и K^{-1} достаточно C^0 -мала (при фиксированной H) или H достаточно C^1 -близка к стандартной (при фиксированном K), то движение имеет не менее трех замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее четырех.

3) Если $g > 1$ и K^{-1} C^1 -мала, то движение имеет не менее трех замкнутых траекторий, а с учетом кратности — не менее $2g + 2$.

Доказательство. Форма $\omega = p^*K dS + dL$ замкнута, невырождена и СЦТ. В случае 1) $\text{Ker } \omega$ C^0 -близко к вертикали, в случае 3) — C^1 -близко к вертикали, а в случае 2) поле $\text{Ker } \omega$ трансверсально многообразиям $B \times \{t\}$ в тривиализации $M = B \times S^1$, соответствующей плоской метрике на $B = T^2$. Случай 1) доказывается аналогично результату К. Саймона [13] (см. замечание 3 после теоремы 2; 2) вытекает из следствия 1; 3) — из следствия 2. Доказательство закончено.

Утверждение 3.2) при $g = 0$ и в невырожденном случае при $g \geq 1$ проверяется результатами С. П. Новикова и И. А. Тайманова [11; 14]. В случае плоской метрики на T^2 утверждение доказано В. И. Арнольдом и В. В. Козловым [8].

Как сообщил автору В. В. Козлов, утверждение 3.2) можно вывести из результатов работы [8] следующим образом. Введем глобальные изотермические угловые координаты x, y на T^{2n} в которых метрика имеет вид $\lambda(dx^2 + dy^2)/2$. Следуя Биркгофу, сделаем замену времени по формуле $dt = \lambda dt$. Согласно принципу Мопертюи, траектория частицы с энергией h совпадает с траекторией частицы нулевой энергии на плоском торе в том же магнитном поле, но с добавочным потенциалом $-\lambda h$. Используя результат работы [8] о существовании трех (с учетом кратности — четырех) замкнутых траекторий частицы на плоском торе с потенциалом в достаточно сильном магнитном поле, получаем утверждение 3.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1979.
2. Арнольд В. И. Несколько замечаний о потоках линейных элементов и реперов // ДАН СССР.— 1961.— Т. 138, № 2.— С. 255—257.
3. Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений.— Т. 1.— М.: Наука, 1982.
4. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— Т. 4. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР.— М.: 1985.— С. 7—139.
5. Banyaga A. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique // Comment. Math. Helv.— 1978.— V. 53, № 2.— P. 174—227.
6. Banyaga A. The geometry of the flux homomorphism. Prepublications of the Institut Fourier. Grenoble, 1984.
7. Conley C. C., Zehnder E. The Birkhoff — Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold // Inv. Math.— 1983.— V. 73, № 1.— P. 33—49.
8. Козлов В. В. Вариационное исчисление в целом и классическая механика // УМН.— 1985.— Т. 40, № 2.— С. 33—60.
9. Moser J. On the volume elements on a manifold // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 120, № 2.— P. 286—294.
10. Никишин Н. А. О неподвижных точках диффеоморфизмов двумерной сферы, сохраняющих ориентированную площадь // Функцион. анализ и его прил. 1974.— Т. 8, № 1.— С. 84—85.
11. Новиков С. П., Тайманов И. А. Периодические экстремали многозначных или не всюду положительных функционалов // ДАН СССР.— 1984.— Т. 274, — № 1.— С. 26—28.
12. Sikorav J.-C. Points fixes d'un symplectomorphisme homologue, à l'identité. Preprint F-91405-ORSAY cedex. Université de Paris, 1984.
13. Simon C. A bound for fixed-point index for an area preserving map with application to mechanics // Inv. Math.— 1974.— V. 26, № 2.— P. 187—200.
14. Тайманов И. А. Принцип перекидывания циклов в теории Морса — Новикова // ДАН СССР.— 1983.— Т. 268, № 1.— С. 46—50.