Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Ш. С. Маматов, Р. А. Минлос, Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора,
ТМФ, 1989, том 79, номер 2, 163–179

https://www.mathnet.ru/tmf4866

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.172
23 января 2026 г., 06:50:18

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 79, № 2
май, 1989

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ДВУХЧАСТИЧНОГО КЛАСТЕРНОГО ОПЕРАТОРА

Маматов Ш. С., Минлос Р. А.

Изучен спектр двухчастичного кластерного оператора

$$(Af)(T)=\sum_{T'}[\omega(t_1-t_1',t_2-t_2')+\omega(t_1-t_2',t_2-t_1')+\beta S(T,T')]f(T'),$$

$T=(t_1,t_2)$, $T'=(t_1',t_2')$, t_i, $t_i'\in Z^\nu$, $i=1,2$, $f\in l_2(C^2_{Z^\nu})$, $C^2_{Z^\nu}$ – совокупность двухточечных подмножеств решетки Z^ν, $\beta\ll 1$ – малый параметр. Для функций ω и S «общего положения» показано, что для значений размерности $\nu\geqslant 3$ у оператора A имеется лишь непрерывный двухчастичный спектр, а для размерностей $\nu=1,2$ у него в некоторых областях значений полного квазиимпульса могут, вообще говоря, появиться ветви связанных состояний. В работе подробно исследуется расположение этих областей, а также выясняется, при каких условиях относительно функций ω и S действительно появляются ветви связанных состояний.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение трансфер-матриц гиббсовских случайных полей на решетке Z^ν (решетчатые модели квантового поля, модели статистической физики, см. [1–3]), а также моделей из теории твердого тела (спиновые волны; см. [4–5]) приводит к задаче о спектральном анализе так называемого двухчастичного **кластерного оператора.** Такой оператор действует в гильбертовом пространстве $l_2(C^2_{Z^\nu})$ функций $f(T)$ от двухточечных подмножеств $T\subset Z^\nu$ по формуле

$$(Af)(T)=\sum_{T'\in C^2_{Z^\nu}} a_{T,T'}f(T'),$$

где

$$a_{T,T'}=\omega(t_1-t_1',\ t_2-t_2')+\omega(t_1-t_2',\ t_2-t_1')+S(T,\ T'), \tag{1}$$

$$T=\{t_1,t_2\},\quad T'=\{t_1',t_2'\},\quad t_i,t_i'\in Z^\nu,\quad i=1,2.$$

Здесь $\omega(s_1,s_2)$ – вещественная функция переменных s_1, $s_2\in Z^\nu$, симметричная относительно них и четная по каждому переменному, которую мы назовем **кинетической частью** оператора A. Мы предположим, что $\omega(s_1,s_2)$ удовлетворяет оценке

$$|\omega(s_1,s_2)|<C_0\lambda^{|s_1|+|s_2|}, \tag{2}$$

где $C_0>0$ – константа, а λ – параметр, $0<\lambda<1$, $|s|=\sum_{i=1}^{\nu}|s^{(i)}|$, $s=(s^{(1)},\ldots,s^{(\nu)})$. Далее $S(T,T')$ – вещественная функция от пары подмножеств T, $T'\in C^2_{Z^\nu}$, симметричная относительно них, которую мы назовем

связной частью A. Функция $S(T, T')$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Трансляционная инвариантность:

$$S(T+t, T'+t)=S(T, T')$$

для любого $t \in Z^\nu$ ($T+t$ — сдвиг множества T на вектор t).

2. Кластерная оценка

$$|S(T, T')|<C_0'\lambda^{d_{T,T'}}, \tag{3}$$

$C_0'>0$ — константа, а величина $d_{T,T'}$ равна $d_{T,T'}=\min\limits_G\{d(G)+\varkappa(G)\}$, где минимум берется по всем связным графам G, множество вершин которых образовано точками t_1, t_2, t_1', t_2' (все точки рассматриваются как различные), $d(G)$ — длина графа G, а $\varkappa(G)$ — число ребер в G, соединяющих точки из множества T с точками T'.

Легко проверить, что кластерный оператор является ограниченным самосопряженным оператором в $l_2(C^2_{Z^\nu})$, коммутирующим с группой «операторов трансляций» $(U_t f)(T)=f(T-t)$, $f \in l_2(C^2_{Z^\nu})$, $t \in Z^\nu$. Кластерный оператор с нулевой связной частью $S(T, T')\equiv 0$ назовем свободным. В этой работе мы изучаем малое возмущение свободного кластерного оператора. Более того, мы рассматриваем семейство A_β кластерных операторов вида

$$A_\beta=A_0+\beta\hat{A}_\beta, \tag{4}$$

где β — вещественный параметр, $|\beta|<\beta_0$; A_0 — свободный кластерный оператор с кинетической частью $\omega_0(s_1, s_2)$, а $\hat{A}_\beta$ — семейство кластерных операторов с кинетической частью $\hat{\omega}(s_1, s_2; \beta)$, гладко (аналитически) зависящей от β и удовлетворяющей оценке (2) (с константой C_0, не зависящей от β), и связной частью вида $S(T, T', \beta)=S_0(T, T')+\beta S_1(T, T', \beta)$, где S_0 и S_1 удовлетворяют требованиям 1 и 2, причем $S_1(T, T'; \beta)$ гладко (аналитически) зависит от β. В дальнейшем мы изучаем инвариантные подпространства оператора A_β, инвариантные одновременно и для группы $\{U_t, t \in Z^\nu\}$.

Эти подпространства описываются в следующей теореме. Обозначим через $\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)$ «символ» оператора A — преобразование Фурье его кинетической части

$$\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)=\sum_{s_1, s_2 \in Z^\nu} \exp\{i[(s_1, \lambda_1)+(s_2, \lambda_2)]\}\,\omega(s_1, s_2),$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in T^\nu$ — точки ν-мерного тора T^ν,

$$(s, \lambda)=\sum_{k=1}^{\nu} s^{(k)}\lambda^{(k)}, \qquad \lambda=(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(\nu)}).$$

Из (2) следует, что функция $\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)$ аналогична в некоторой комплексной окрестности тора T^ν.

Теорема 1. *При любом достаточно малом β у операторов $A=A_\beta$ и U_t, $t \in Z^\nu$ существует общее инвариантное подпространство $\mathscr{H}_0 \subseteq l_2(C^2_{Z^\nu})$ та-*

кое, что их части $A|_{\mathscr{H}_0}$ и $U_t|_{\mathscr{H}_0}$ в этом подпространстве унитарно-эквивалентны операторам

$$(5)\qquad (\tilde{A}_0 f)(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) f(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$(\tilde{U}_t f)(\lambda_1, \lambda_2) = \exp\{i(t, (\lambda_1+\lambda_2))\} f(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$f \in L_2^{\mathrm{sym}}(T^\nu \times T^\nu), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in T^\nu,$$

действующим в гильбертовом пространстве $L_2^{\mathrm{sym}}(T^\nu \times T^\nu, d\lambda_1 d\lambda_2)$ симметричных функций $f(\lambda_1, \lambda_2)$ от двух переменных λ_1, λ_2, пробегающих ν-мерный тор T^ν ($d\lambda$ — нормированная мера Хаара на торе T^ν). Кроме $\mathscr{H}_0$, у операторов A и U_t существует, быть может, конечное число общих инвариантных подпространств $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_s$, в каждом из которых операторы $A|_{\mathscr{H}_j}$, $U_t|_{\mathscr{H}_j}$ унитарно-эквивалентны операторам

$$(\tilde{A}_j f)(\lambda) = \varepsilon_j(\lambda) f(\lambda), \quad \lambda \in G_j,$$

$$(\tilde{U}_t^j f)(\lambda) = \exp\{i(t, \lambda)\} f(\lambda), \quad f \in L_2(G_j, d\lambda),$$

действующим в гильбертовом пространстве $L_2(G_j, d\lambda)$, где $G_j \subseteq T^\nu$ — область на торе T^ν, а $\varepsilon_j(\lambda)$ — гладкая функция, определенная в G_j. Подпространства $\mathscr{H}_j$, $j=0, 1, \ldots, s$, ортогональны друг другу и исчерпывают все $l_2(C^2_{Z^\nu})$:

$$(6)\qquad l_2(C^2_{Z^\nu}) = \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{H}_s.$$

Замечание 1. Сформулированная теорема верна, по-видимому, для любого кластерного оператора без предположения о малости β (при довольно общих предположениях о кинетической части $\omega(s_1, s_2)$ оператора A), и во многих частных случаях (специальный вид функции $\omega(s_1, s_2)$, малые размерности ν) она следует из известных результатов (см., например, [6, 7]); в частности, существование подпространства $\mathscr{H}_0$ довольно просто вытекает из общих теорем абстрактной теории рассеяния (см. [5]).

Замечание 2. Подпространства $\mathscr{H}_j$, $j=1, \ldots, s$, (если они существуют) будем, следуя обычной физической интерпретации, называть подпространствами **«связанных состояний»**, область G_j — областью **квазиимпульсов** j-го «связанного состояния», а функцию $\varepsilon_j(\lambda)$ — его **дисперсией** (или спектром).

Основная цель настоящей работы — изучить эти «связанные состояния» (существуют ли они, сколько их, каковы области G_j и функции $\varepsilon_j(\lambda)$ и т. д.). Оказывается, что при довольно общих предположениях относительно функции $\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)$ и достаточно малых значениях параметра β эта задача допускает полное решение. В некотором упрощенном варианте она изучалась в работе одного из авторов [8].

2. ПЕРЕХОД К ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ФУРЬЕ. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О СИМВОЛЕ $\tilde{\omega}$

Пространство $l_2(C^2_{Z^\nu})$ можно отождествить с подпространством $\tilde{l}_2^{\mathrm{sym}} = \tilde{l}_2^{\mathrm{sym}}(Z^\nu \times Z^\nu) \subset l_2^{\mathrm{sym}}(Z^\nu \times Z^\nu)$ симметричных функций $f(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in Z^\nu$ от двух переменных на решетке Z^ν таких, что $f(t, t) = 0$, $t \in Z^\nu$.

Перейдем к преобразованию Фурье

$$F: \tilde{l}_2^{\mathrm{sym}} \to \tilde{L}_2^{\mathrm{sym}} = \tilde{L}_2^{\mathrm{sym}}(T^\nu \times T^\nu);$$

$$f \to \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{t_1, t_2} f(t_1, t_2) \times$$

$$\times \exp\{i[(t_1, \lambda_1) + (t_2, \lambda_2)]\}, \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in T^\nu,$$

$\tilde{L}_2^{\mathrm{sym}} \subset L_2^{\mathrm{sym}}(T^\nu \times T^\nu)$ означает гильбертово пространство симметрических функций $\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in T^\nu$ таких, что

$$\int_{T^\nu \times T^\nu} \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2)\, h(\lambda_1 + \lambda_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 = 0$$

для любой функции $h \in L_2(T^\nu)$. Образы $\tilde{A} = FAF^{-1}$, $\tilde{U}_t = FU_tF^{-1}$ кластерного оператора A и группы U_t при преобразовании $F: \tilde{l}_2^{\mathrm{sym}} \to \tilde{L}_2^{\mathrm{sym}}$ действуют в $\tilde{L}_2^{\mathrm{sym}}$ по формулам

$$(\tilde{U}_t \tilde{f})(\lambda_1, \lambda_2) = \exp\{i(t, (\lambda_1 + \lambda_2))\} \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2),$$

$$(\tilde{A}\tilde{f})(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)\, \tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2) +$$

$$+ \int_{T^\nu \times T^\nu} \hat{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)\, \tilde{f}(\mu_1, \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2, \quad \tilde{f} \in \tilde{L}_2^{\mathrm{sym}}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in T^\nu,$$

где $\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2)$ — преобразование Фурье функции $\omega(t_1, t_2)$, а ядро $\hat{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$ (обобщенное) имеет вид

$$\hat{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = \delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2) \Big[-\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) - \tilde{\omega}(\mu_1, \mu_2) +$$

$$+ \int_{\nu_1 + \nu_2 = \lambda_1 + \lambda_2} \tilde{\omega}(\nu_1, \nu_2)\, d\nu_1\, d\nu_2 \Big] + \tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)\, \delta(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2),$$

где второе слагаемое является преобразованием Фурье функции $S(T, T')$. При этом функция $\tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$, определенная на многообразии $\Gamma = \{(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) : \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2\} \subset (T^\nu)^4$, симметрична в отдельности по переменным λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2 и удовлетворяет условиям $\tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = \overline{\tilde{S}(\mu_1, \mu_2; \lambda_1, \lambda_2)}$, и

$$\int_{\mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2} \tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2 = \tag{7}$$

$$= \int_{\mu_1 + \mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2} \tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \equiv 0.$$

В силу оценки (3) функция $\tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$ допускает аналитическое продолжение в комплексную окрестность многообразия Γ. Далее разложение (4) порождает разложение $\tilde{\omega}(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{\omega}_0(\lambda_1, \lambda_2) + \beta\tilde{\omega}_1(\lambda_1, \lambda_2; \beta)$, причем обе функции $\tilde{\omega}_0(\lambda_1, \lambda_2)$ и $\tilde{\omega}_1(\lambda_1, \lambda_2; \beta)$ аналитичны в одной и той же комплексной окрестности $T^\nu \times T^\nu$, а $\tilde{\omega}_1(\lambda_1, \lambda_2)$ ограничена в этой окрестности равномерно по β. Далее, $\tilde{S}(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) = \beta\tilde{S}_0(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2) + \beta^2\tilde{S}_1(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2)$, и $\tilde{S}_0$ и $\tilde{S}_1$ аналитичны в одной и той же комплексной окрестности Γ (и равномерно ограничены в ней).

Если перейти к переменным $\Lambda=\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda=\Lambda/2-\lambda_1={}^1/_2(\lambda_2-\lambda_1)$, то легко видеть, что оператор $\tilde{A}$ действует «только на переменную λ», т. е. представляется как прямой операторный интеграл (см. [9]) семейства операторов

$$(8)\qquad (\tilde{A}_\Lambda f)(\lambda)=\tilde{\omega}_\Lambda(\lambda)f(\lambda)+\int\limits_{T^\nu}\tilde{s}_\Lambda(\lambda,\mu)f(\mu)\,d\mu,$$

действующих при каждом $\Lambda\in T^\nu$ в пространстве $\tilde{L}_2^{\text{четн}}(T^\nu)\subset L_2^{\text{четн}}(T^\nu)$, состоящем из четных функций $f(\lambda)$ на T^ν таких, что

$$(9а)\qquad \int\limits_{T^\nu} f(\lambda)\,d\lambda=0.$$

$$\text{В}\ (8)\qquad \tilde{\omega}_\Lambda(\lambda)=\tilde{\omega}(\Lambda/2-\lambda,\Lambda/2+\lambda),\quad \lambda,\Lambda\in T^\nu,$$

$$\Lambda/2=(\Lambda^{(1)}/2,\ldots,\Lambda^{(\nu)}/2),\quad -\pi\leqslant\Lambda^{(i)}<\pi,$$

$$\tilde{s}_\Lambda(\lambda,\mu)=-\tilde{\omega}_\Lambda(\lambda)-\tilde{\omega}_\Lambda(\mu)+\int\limits_{T^\nu}\tilde{\omega}_\Lambda(\nu)\,d\nu+$$

$$+\tilde{S}(\Lambda/2-\lambda,\Lambda/2+\lambda;\Lambda/2-\mu,\Lambda/2+\mu).$$

В дальнейшем мы примем, что оператор $\tilde{A}_\Lambda$, определенный формулой (8), действует во всем пространстве $L_2^{\text{четн}}(T^\nu)$, причем, как это следует из (7), пространство констант, ортогональное к $\tilde{L}_2^{\text{четн}}(T^\nu)$, переводится им в нуль.

Сформулируем теперь предположения об исходном символе $\tilde{\omega}_0(\lambda_1,\lambda_2)$, точнее о семействе функций $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda}(\lambda),\ \Lambda\in T^\nu\}$. Заметим, что при всех $\Lambda\in T^\nu$ точки

$$(9б)\qquad \lambda_{\{\sigma_i\}}=\{\lambda_{\sigma_1},\ldots,\lambda_{\sigma_\nu}\}\in T^\nu,\quad \sigma_i=0,0',\quad \lambda_0=0,\quad \lambda_{0'}=\pi$$

являются критическими точками функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ (а также и функции $\tilde{\omega}_\Lambda$); будем их называть **основными критическими точками.** Кроме них существуют, быть может, пары $(\bar{\lambda},-\bar{\lambda})$ дополнительных критических точек функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$, симметричных относительно всех основных критических точек (9б); эти точки мы будем называть **парными** критическими точками и каждую такую пару рассматривать как одну критическую точку. Это связано с тем, что $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}(\bar{\lambda})=\tilde{\omega}_{0,\Lambda}(-\bar{\lambda})$ и $\tilde{S}_\Lambda(\bar{\lambda},\mu)=\tilde{S}_\Lambda(-\bar{\lambda},\mu)$, $\tilde{S}_\Lambda(\lambda,\bar{\lambda})=\tilde{S}_\Lambda(\lambda,-\bar{\lambda})$ при всех λ и μ.

I. Предположим, что при любом Λ множество критических точек $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ конечно.

Дальнейшие предположения о семействе $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda},\ \Lambda\in T^\nu\}$ мы сформулируем в отдельности для размерностей $\nu=1,2,3$ и $\nu>3$.

Случай $\nu=1$.

II. Предположим, что существует лишь конечное число каустических значений $\Lambda_1^{\text{каust}},\ldots,\Lambda_s^{\text{каust}}$ параметра Λ, при которых вырождается или одна из основных критических точек $\lambda_0=0$, или $\lambda_{0'}=\pi$, или какая-нибудь парная критическая точка $(\bar{\lambda},-\bar{\lambda})$. При этом вырождение в любой основ-

ной точке имеет тип A_3 (см. [10], т. е. ряд Тейлора $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ в этой точке начинается с четвертого члена), а в парной точке — тип A_2 (ряд Тейлора начинается с третьего члена).

Предположим далее, что в случае, когда какая-нибудь из основных критических точек, скажем λ_0, вырождается (при $\Lambda=\Lambda_1^{\text{кауст}}$),

$$\left.\frac{\partial^3\tilde{\omega}_{0,\Lambda}}{\partial\Lambda\partial^2\lambda}\right|_{\substack{\Lambda=\Lambda_1^{\text{кауст}}\\ \lambda=\lambda_0}}\neq 0.$$

При этом при прохождении параметра Λ через значение $\Lambda_1^{\text{кауст}}$ от критической точки λ_0 отщепляется пара дополнительных критических точек $(\bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$. В случае же вырождения какой-нибудь парной точки $(\bar{\lambda}_0, -\bar{\lambda}_0)$ (при $\Lambda=\Lambda_1^{\text{кауст}}$) предполагается, что

$$\left.\frac{\partial^2\tilde{\omega}_{0,\Lambda}}{\partial\Lambda\partial\lambda}\right|_{\substack{\Lambda=\Lambda_1^{\text{кауст}}\\ \lambda=\lambda_0}}\neq 0.$$

При этом при прохождении Λ через каустическое значение $\Lambda_1^{\text{кауст}}$ в точках $(\bar{\lambda}_0, -\bar{\lambda}_0)$ сливаются две парные критические точки $(\bar{\lambda}, -\bar{\lambda})$ и $(\bar{\bar{\lambda}}, -\bar{\bar{\lambda}})$, существующие при значениях Λ, расположенных по одну сторону $\Lambda_1^{\text{кауст}}$, которые затем исчезают (при Λ, находящихся по другую сторону $\Lambda_1^{\text{кауст}}$).

III. Существует конечное число кратных значений $\Lambda_1^{\text{крат}}, \ldots, \Lambda_q^{\text{крат}}$ параметра Λ, при которых совпадают ровно два критических значения $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$: либо значения в двух основных критических точках, либо значения в основной и парной, либо, наконец, значения в двух различных парных точках. При этом предполагается, что кратные критические значения функция $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ принимает в невырожденных точках. Обозначим через $\Lambda_1^{\text{ext}}, \ldots, \Lambda_p^{\text{ext}}$, $p\leqslant q$, то значения $\Lambda_i^{\text{крат}}$, при которых совпадают экстремальные значения функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$.

Таким образом, при всех значениях Λ, кроме каустических и кратных значений, все критические точки $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ невырождены и все критические значения однократны.

Случай $\nu=2$.

II′. Каустическое множество значений параметра $\Lambda\subset T^2$ состоит из элементарных каустик (см. [9]) двух типов $\Gamma_{\alpha,\beta}$ и $\Gamma_{\beta,\beta'}$, примыкающих друг к другу в концевых точках (α — индекс, помечающий основные критические точки, а β и β' помечают дополнительные парные критические точки $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$). При значениях $\Lambda\in\Gamma_{\alpha,\beta}$ вырождается основная критическая точка λ_α (ранг вырождения 1, а тип вырождения во внутренних точках $\Gamma_{\alpha,\beta}$—A_3). При этом мы предполагаем, что в любой внутренней точке $\bar{\Lambda}\in\Gamma_{\alpha,\beta}$ производные

$$\left.\frac{\partial^3\tilde{\omega}_{0,\Lambda}}{\partial\Lambda^{(i)}\partial^2\lambda_{\text{выр}}}\right|_{\substack{\Lambda=\bar{\Lambda}\\ \lambda=\lambda_\alpha}},\quad i=1,2,$$

не обращаются одновременно в нуль, здесь $\lambda_{\text{выр}}$ — координата точки

$\lambda \in T^2$ в малой окрестности вырожденной точки λ_α вдоль вырожденного направления в этой точке. При переходе Λ через внутреннюю точку каустики $\Gamma_{\alpha,\beta}$ от точки λ_α отщепляется пара $(\bar\lambda_\beta, -\bar\lambda_\beta)$ дополнительных критических точек. В случае, когда $\Lambda \in \Gamma_{\beta,\beta'}$ (Λ — внутренняя точка каустики $\Gamma_{\beta,\beta'}$), у функции $\tilde\omega_{0,\Lambda}$ имеется вырожденная парная критическая точка $(\bar\lambda_\beta^0, -\bar\lambda_\beta^0) = (\bar\lambda_{\beta'}^0, -\bar\lambda_{\beta'}^0)$ с рангом вырождения 1 и типом A_2. При этом в любой внутренней точке $\bar\Lambda \in \Gamma_{\beta,\beta'}$ производные

$$\left.\frac{\partial^2 \tilde\omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(i)} \partial \bar\lambda_{\text{выр}}}\right|_{\substack{\Lambda=\bar\Lambda \\ \lambda=\bar\lambda_\beta^0}}, \quad i=1,2,$$

не обращаются одновременно в нуль. При этом при переходе параметра Λ через каустику $\Gamma_{\beta,\beta'}$ (во внутренней точке $\Gamma_{\beta,\beta'}$) две парные критические точки $(\bar\lambda_\beta, -\bar\lambda_\beta)$ и $(\bar\lambda_{\beta'}, -\bar\lambda_{\beta'})$ функции $\omega_{0,\Lambda}$ сливаются в одну парную точку $(\bar\lambda_\beta^0, -\bar\lambda_\beta^0)$ и затем исчезают.

Далее, в случае, когда Λ совпадает с концевой точкой $\bar\Lambda_{\text{конц}}$ каустики $\Gamma_{\alpha,\beta}$ вырождение $\tilde\omega_{0,\Lambda}$ в основной критической точке λ_α имеет ранг 1 и тип A_5. При условии, что

$$\det \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial^3 \tilde\omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(1)} \partial^2 \bar\lambda_{\text{выр}}} & \dfrac{\partial^5 \tilde\omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(1)} \partial^4 \bar\lambda_{\text{выр}}} \\ \dfrac{\partial^3 \tilde\omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(2)} \partial^2 \bar\lambda_{\text{выр}}} & \dfrac{\partial^5 \tilde\omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(2)} \partial^4 \bar\lambda_{\text{выр}}} \end{matrix} \right|_{\substack{\Lambda=\bar\Lambda_{\text{конц}} \\ \lambda=\lambda_\alpha}} \neq 0$$

картина расположения каустик в окрестности концевой точки $\bar\Lambda_{\text{конц}}$ каустики $\Gamma_{\alpha,\beta}$ имеет вид, изображенный на рис. 1. В области $\Lambda \in \mathrm{I}$ в любой малой окрестности основной точки λ_α нет парных критических точек. При переходе Λ через каустику $\Gamma_{\alpha,\beta}$ в область II от λ_α отщепляется парная точка $(\bar\lambda_\beta, -\bar\lambda_\beta)$, а при переходе Λ через каустику $\Gamma_{\alpha,\beta'}$ в область III отщепляется еще одна парная точка $(\bar\lambda_{\beta'}, -\bar\lambda_{\beta'})$. Наконец, при переходе Λ через каустику $\Gamma_{\beta,\beta'}$ из области III в область I обе парные точки, сливаясь, исчезают. В случае, когда концевая точка $\Lambda_{\text{конц}}$ каустики $\Gamma_{\beta,\beta'}$ не совпадает с концевой точкой каустики $\Gamma_{\alpha,\beta}$ у функции $\tilde\omega_{0,\Lambda}$, имеется вырожденная парная критическая точка $(\bar\lambda_\beta^0, -\bar\lambda_\beta^0)$ с рангом вырождения 1 и типом A_3. При условии, что

$$\det \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \tilde\omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(1)} \partial \bar\lambda_{\text{выр}}} & \dfrac{\partial^3 \omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(1)} \partial^2 \bar\lambda_{\text{выр}}} \\ \dfrac{\partial^2 \tilde\omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(2)} \partial \bar\lambda_{\text{выр}}} & \dfrac{\partial^3 \omega_{0,\Lambda}}{\partial \Lambda^{(2)} \partial^2 \bar\lambda_{\text{выр}}} \end{matrix} \right|_{\substack{\Lambda=\bar\Lambda_{\text{конц}} \\ \lambda=\bar\lambda_\beta^0}} \neq 0$$

картина расположения каустик в окрестности концевой точки $\bar\Lambda_{\text{конц}}$ имеет вид, изображенный на рис. 2. В области I у функции $\tilde\omega_{0,\Lambda}$ имеется одна парная критическая точка $(\bar\lambda_{\beta''}, -\bar\lambda_{\beta''})$. При переходе Λ через каустику $\Gamma_{\beta,\beta'}$ из области I в область II рождаются две парные критические точки $(\bar\lambda_\beta, -\bar\lambda_\beta)$ и $(\bar\lambda_{\beta'}, -\bar\lambda_{\beta'})$. При переходе Λ из области II в область I через каустику $\Gamma_{\beta',\beta''}$ точки $(\bar\lambda_{\beta'}, -\bar\lambda_{\beta'})$ и $(\bar\lambda_{\beta''}, -\bar\lambda_{\beta''})$ сливаясь исчезают (а точка $(\bar\lambda_\beta, -\bar\lambda_\beta)$ переименовывается в $(\bar\lambda_{\beta''}, -\bar\lambda_{\beta''})$).

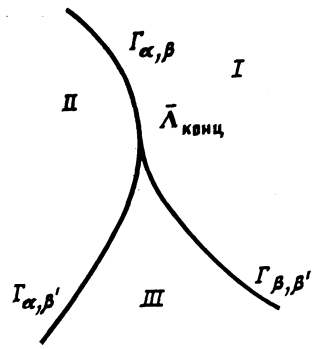

Рис. 1

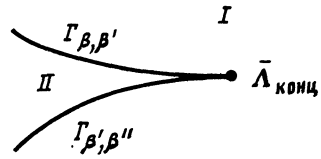

Рис. 2

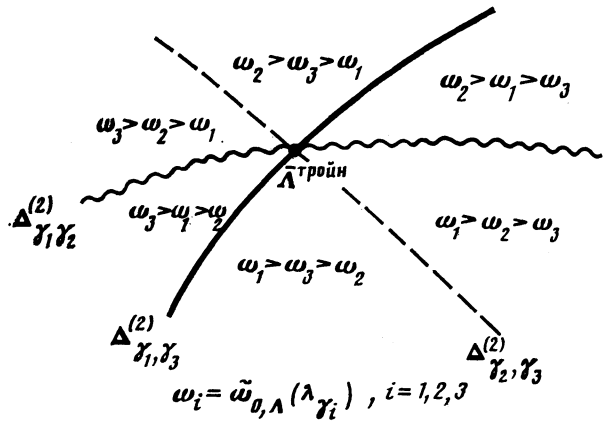

Рис. 3

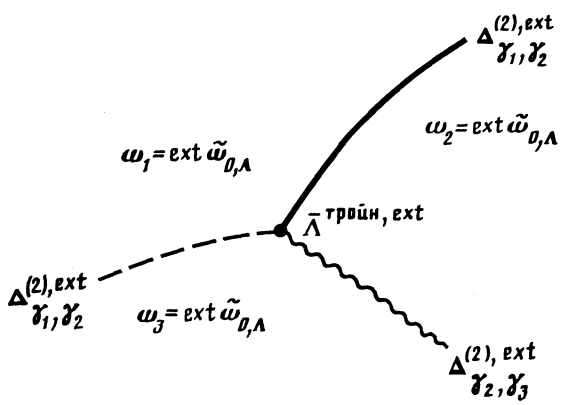

Рис. 4

III′. Обозначим через $\Delta\subset T^2$ кратное множество значений параметра Λ, при которых у функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ имеется хотя бы одно кратное критическое значение (т. е. значение, применимое, по крайней мере, в двух критических точках λ_{γ_1} и λ_{γ_2} функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$). Обозначим через $\Delta^{(k)}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}\subseteq\Delta$ подмножество Δ, в точках Λ которого у функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ совпадают значения в k критических точках $\lambda_{\gamma_1},\ldots,\lambda_{\gamma_k}$ $(\gamma_i=\alpha,\beta)$, $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}(\lambda_{\gamma_i})=\tilde{\omega}_{0,\Lambda}(\lambda_{\gamma_j})$, $i,j=1,\ldots,k$.

Мы предположим, что нет более чем тройных точек (т. е. $\Delta^{(k)}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_k}$ пусто при $k>3$), множества $\Delta^{(3)}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ состоят не более чем из конечного числа точек $\Lambda^{\text{тройн}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$, а множества $\Delta^{(2)}_{\gamma_1,\gamma_2}$ — из конечного числа гладких кривых, примыкающих к точкам $\overline{\Lambda}^{\text{тройн}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ (двухкратные кривые). Расположение этих кривых в окрестности тройной точки $\overline{\Lambda}^{\text{тройн}}=\overline{\Lambda}^{\text{тройн}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ изображено на рис. 3. Кроме того, мы будем предполагать, что при $\Lambda=\overline{\Lambda}^{\text{тройн}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ критические точки λ_{γ_1}, λ_{γ_2}, λ_{γ_3} функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ невырождены, а на кривых $\Delta^{(2)}_{\gamma_1,\gamma_2}$ имеется не более конечного числа точек $\Lambda_j^{\text{кауст}}\in\Delta^{(2)}_{\gamma_1,\gamma_2}$ таких, что одна (и только одна) из критических точек λ_{γ_1} или λ_{γ_2} вырождается (при этом все значения $\Lambda_j^{\text{кауст}}$ не совпадают с концевыми точками каустического множества).

Далее обозначим через $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}=\overline{\Lambda}$ те тройные точки, для которых функция $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}=\overline{\Lambda}$ достигает абсолютного экстремума в точках λ_{γ_1}, λ_{γ_2}, λ_{γ_3} и соответственно обозначим через $\Delta^{(2),\text{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ те из двухкратных кривых, для точек Λ которых функция $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ достигает абсолютного экстремума в точках λ_{γ_1} и λ_{γ_2}. Расположение кривых $\Delta^{(2),\text{ext}}_{\gamma_i,\gamma_j}$, $i, j=1, 2, 3$, в окрестности точки $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ изображено на рис. 4.

Замечание 3. В случае, когда система инвариантна относительно отражения в плоскостях $s^{(1)}=0$ и $s^{(2)}=0$, функция $\omega(s_1, s_2)$ в (1) $s_i\in Z^2$, $i=1, 2$, четна относительно каждой компоненты $(s_i^{(1)}, s_i^{(2)})$ векторов s_i, $i=1, 2$. Тогда, как легко показать, значение $\Lambda=(\pi, \pi)\in T^2$ является четверной точкой: у функции $\tilde{\omega}_{0,(\pi,\pi)}$ (а также у функции $\tilde{\omega}_{(\pi,\pi)}$) совпадают значения во всех четырех основных точках. Для того чтобы не загромождать изложение, мы не рассматриваем здесь такую возможность (см. лишь замечание 6 в конце раздела 3).

Случай $\nu=3$. Здесь мы также предположим, что каустическое множество семейства $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda}, \Lambda\in T^3\}$ состоит из элементарных каустик $\Gamma_{\alpha,\beta}$, $\Gamma_{\beta,\beta'}$ (двухмерных; обозначения имеют тот же смысл, что и при $\nu=2$), примыкающих друг к другу по одномерным границам и концевым точкам. Во всех точках, кроме концевых, ранг вырождения равен 1 (с конечным типом особенности), а в концевых точках ранг вырождения равен двум, а показатель осцилляции (см. [10]) не больше -1.

Случай $\nu>3$. Мы предполагаем, что при всех каустических значениях $\Lambda\in T^\nu$ семейства $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda}, \Lambda\in T^\nu\}$ для всех вырожденных критических точек функции $\tilde{\omega}_{0,\Lambda}$ равномерный показатель осцилляции (см. [10]) меньше -1. Как следует из результатов, приведенных в книге [10], при всех $\nu\leqslant 7$ для этого достаточно, чтобы индивидуальный показатель критической точки (см. там же) был меньше -1.

Замечание 4. Сформулированные нами требования относительно семейства функций $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda}, \Lambda\in T^\nu\}$ выделяют семейство «общего положе-

ния» (см. [10]), и, таким образом, при достаточно малом β этим требованиям удовлетворяет и семейство $\{\tilde{\omega}_\Lambda, \Lambda \in T^\nu\}$. Особые множества параметра Λ у этого семейства (каустики, k-кратные множества) получаются малым возмущением соответствующих множеств семейства $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda}\}$, и мы сохраним за ними прежние обозначения.

3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРА A (ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ)

Рассмотрим сначала наиболее простой случай высоких размерностей.

Теорема 2. *Пусть $\nu \geqslant 3$ и семейство функций $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda}, \Lambda \in T^\nu\}$ удовлетворяет сформулированным выше условиям. Тогда при достаточно малых значениях параметра β у оператора $A = A_\beta$ нет связанных состояний и вместе с группой $\{U_t, t \in Z^\nu\}$ они унитарно-эквивалентны операторам* (5).

В случае размерностей $\nu = 1, 2$ у оператора A при малых β могут существовать, вообще говоря, связанные состояния. Для того чтобы их описать, введем ряд величин. Пусть $\bar{\Lambda} = \Lambda^{(2),\,\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ — значение Λ, при котором у функции $\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}$ совпадают ровно два экстремума, принимаемых в точках λ_{γ_1} и λ_{γ_2}: $\mathrm{ext}\,\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}} = \tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}) = \tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_2}) = s$.

Введем величину

$$B_{\gamma_1,\gamma_2}(\bar{\Lambda}) = D^{(2)}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(T^\nu)^n} \frac{D^{(n+2)}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}(\varkappa_i) - s)} \prod_{i=1}^{n} d\varkappa_i, \tag{10}$$

где

$$D^{(m)}_{\Lambda}(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m) = \sum_{l=1}^{m} \det\{\tilde{S}_\Lambda(\varkappa_i, \varkappa_j)\}^l, \tag{10a}$$

где $\{a_{ij}\}^l$ обозначает матрицу, полученную из матрицы $\{a_{ij}\}$ заменой всех элементов ее l-го столбца единицами.

Заметим, что

$$D^{(n+2)}_{\Lambda}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)\,|_{\varkappa_i = \lambda_{\gamma_1} \text{ или } \lambda_{\gamma_2}} = 0$$

при любом i. Отсюда следует сходимость всех интегралов в сумме (10). Легко доказать сходимость всего ряда (10), оценивая каждое его слагаемое по неравенству Адамара (см. [11]).

Значение $\bar{\Lambda} = \Lambda^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ мы назовем **пороговым**, если $B_{\gamma_1,\gamma_2}(\bar{\Lambda}) > 0$ при $\mathrm{ext} = \max$ или $B_{\gamma_1,\gamma_2}(\Lambda) < 0$ при $\mathrm{ext} = \min$.

Теорема 3. *Пусть $\nu = 1$, семейство $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda}, \Lambda \in T^1\}$ удовлетворяет сформулированным выше условиям и β достаточно мало. Тогда для каждого порогового значения $\bar{\Lambda}_i = \bar{\Lambda}^{(2),\,\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ существуют его окрестность $G_i \subset T^1$ (не содержащая других пороговых значений) и подпространство $\mathcal{H}_i$ свя-*

занных состояний с интервалом квазиимпульсов, совпадающим с G_i. При этом для любого $\Lambda \in G_i$

$$|\Lambda - \bar{\Lambda}_i| < C\beta^2,$$

где $C>0$ — константа. Дисперсия $\varepsilon_i(\Lambda)$, $\Lambda \in G_i$, в этом пространстве удовлетворяет оценкам $\max \tilde{\omega}_\Lambda < \varepsilon_i(\Lambda) < \max \tilde{\omega}_\Lambda + \bar{C}\beta^4$, ext=max, $\min \tilde{\omega}_\Lambda > \varepsilon_i(\Lambda) > \min \tilde{\omega}_\Lambda - \bar{C}\beta^4$, ext=min, $\bar{C}>0$ — *константа.*

Описанными подпространствами $\mathscr{H}_i$ исчерпываются подпространства связанных состояний (иными словами, справедлива формула (6), в которой все $\mathscr{H}_i$ — введенные нами пространства).

Замечание 5. Из формулы (10) следует, что

$$B_{\gamma_1,\gamma_2}(\bar{\Lambda}) = \beta D^{(2)}_{0,\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}) + O(\beta^2),$$

где

$$D^{(2)}_{0,\Lambda}(\lambda_1, \lambda_2) = \tilde{S}_{0,\Lambda}(\lambda_1, \lambda_1) + \tilde{S}_{0,\Lambda}(\lambda_2, \lambda_2) - \\ - \tilde{S}_{0,\Lambda}(\lambda_1, \lambda_2) - \tilde{S}_{0,\Lambda}(\lambda_2, \lambda_1)$$

— функция $D^{(2)}_{\Lambda}$, вычисленная с помощью ядра $\tilde{S}_{0,\Lambda}$. Таким образом, для существования связанного состояния в окрестности точки $\bar{\Lambda} = \Lambda^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ достаточно, чтобы $D^{(2)}_{0,\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}) > 0$ при ext=max или $D^{(2)}_{0,\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}) < 0$ при ext=min.

Случай $\nu=2$. Обозначим для каждой двойной линии $\Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ **через** $\delta_{\gamma_1,\gamma_2} \subseteq \Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ совокупность всех ее пороговых точек. Очевидно, что $\delta_{\gamma_1,\gamma_2}$ распадается на конечное число интервалов $\delta^{(i)}_{\gamma_2,\gamma_2}$. Интервалы, примыкающие к концевым (тройным) точкам, назовем **концевыми,** а остальные — **внутренними** пороговыми интервалами. Пусть теперь $\bar{\Lambda} = \Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ — тройная точка, являющаяся концевой точкой для кривых $\Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$, $\Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_3}$, $\Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_2,\gamma_3}$ (как изображено на рис. 4).

Введем величину

$$D_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(\bar{\Lambda}) = D^{(3)}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\gamma_3}) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int\limits_{(T^2)^n} \frac{D^{(n+3)}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\gamma_3}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n} (\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}(\varkappa_i) - s)} \prod_{i=1}^{n} d\varkappa_i. \tag{11}$$

Поскольку

$$D^{(n+3)}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\gamma_3}, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)\Big|_{\substack{\varkappa_i = \lambda_{\gamma_j} \\ j=1,2,3}} = 0$$

при любом $i=1, \ldots, n$, интегралы в этой сумме сходятся (а сходимость ряда следует из оценок по неравенству Адамара).

Лемма 1. *Рассмотрим функцию*

$$(12)\qquad h_k(x)=D^{(2)}_{\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_i},\lambda_{\gamma_j})+$$
$$+\sum\frac{1}{n!}\int\limits_{(T^2)^n}\frac{D^{(n+2)}_{\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_i},\lambda_{\gamma_j},\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\tilde{\omega}_{\overline{\Lambda}}(\varkappa_i)-s-x)}\prod_{i=1}^{n}d\varkappa_i,$$

$i,j,k=1,2,3$; $i\neq j\neq k\neq i$, где $x>0$ при ext=max и $x<0$ при ext=min. Тогда при $x\to 0$ справедлива асимптотика

$$(13)\qquad h_k(x)=C_kD_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(\Lambda)\ln|x|+\hat{B}_k+o(1),$$

где $C_k=\pm\pi(\mathrm{Det}\,\tilde{\omega}''_{\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_k}))^{-1/2}$ ($\tilde{\omega}''_{\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_k})$ — матрица вторых производных функций $\tilde{\omega}_{\overline{\Lambda}}$ в критической точке $\lambda=\lambda_{\gamma_k}$; знак «+» соответствует случаю ext=max, а знак «−» случаю ext=min).

Как следует из (11)–(13),

$$(14)\qquad D_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(\overline{\Lambda})=\beta^2D^{(3)}_{0,\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1},\lambda_{\gamma_2},\lambda_{\gamma_3})+O(\beta^3),$$
$$\hat{B}_k=\beta D^{(2)}_{0,\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_i},\lambda_{\gamma_j})+O(\beta^2),$$

где $D^{(2)}_{0,\Lambda}$ и $D^{(3)}_{0,\Lambda}$ — функции, вычисляемые по формуле (10а) при $\tilde{S}_\Lambda=\tilde{S}_{0,\Lambda}$.

Мы предположим, что во всех тройных точках

$$(15)\qquad D^{(2)}_{0,\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1},\lambda_{\gamma_2})\equiv\hat{B}_k{}^0\neq 0,\qquad k=1,2,3,$$
$$D^{(3)}_{0,\overline{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1},\lambda_{\gamma_2},\lambda_{\gamma_3})\equiv\hat{D}_0\neq 0.$$

Точку $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$, для которой $\hat{D}_0<0$ (и, следовательно, при малых β и $D_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}(\overline{\Lambda})<0$), назовем **умеренной** тройной точкой. Все двухкратные кривые $\Delta^{(2),\text{ext}}_{\gamma_i,\gamma_j}$ примыкают к умеренной точке $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ своими концевыми пороговыми интервалами $\delta^{\text{конц}}_{i,j}$. При этом в случае, когда $\hat{B}_k{}^0>0$ и ext=max или $\hat{B}_k{}^0<0$ и ext=min, интервал $\delta^{\text{конц}}_{i,j}$ имеет длину порядка константы (при малых β), а в противном случае его длина порядка $\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\}$.

Из определений (14), (15) легко получить, что

$$\hat{D}_0={}^1/_2(\hat{B}_3{}^0\hat{B}_2{}^0+\hat{B}_3{}^0\hat{B}_1{}^0+\hat{B}_1{}^0\hat{B}_2{}^0)-{}^1/_4[(\hat{B}_1{}^0)^2+(\hat{B}_2{}^0)^2+(\hat{B}_3{}^0)^2].$$

Отсюда следует, что при $\hat{D}_0>0$ все $\hat{B}_k{}^0$ имеют одинаковый знак. Точку $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$, в которой $\hat{D}_0>0$ и все $\hat{B}_k{}^0>0$ при ext=max или $\hat{B}_k{}^0<0$ при ext=min назовем **вулканической** точкой, а при $\hat{B}_k{}^0$ противоположных знаков — **уединенной** точкой. Как в случае вулканической, так и в случае уединенной точек $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ на кривых $\Delta^{(2),\text{ext}}_{\gamma_i,\gamma_j}$ нет концевых пороговых интервалов, примыкающих к $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$. Однако в первом случае на

каждой из кривых $\Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_i,\gamma_j}$ имеется внутренний пороговый интервал, отстоящий от $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ на расстояние порядка $\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\}$ — назовем их квазиконцевыми пороговыми интервалами, а в случае уединенной точки $\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ пороговые интервалы на кривых $\Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_i,\gamma_j}$ удалены от нее на конечное расстояние.

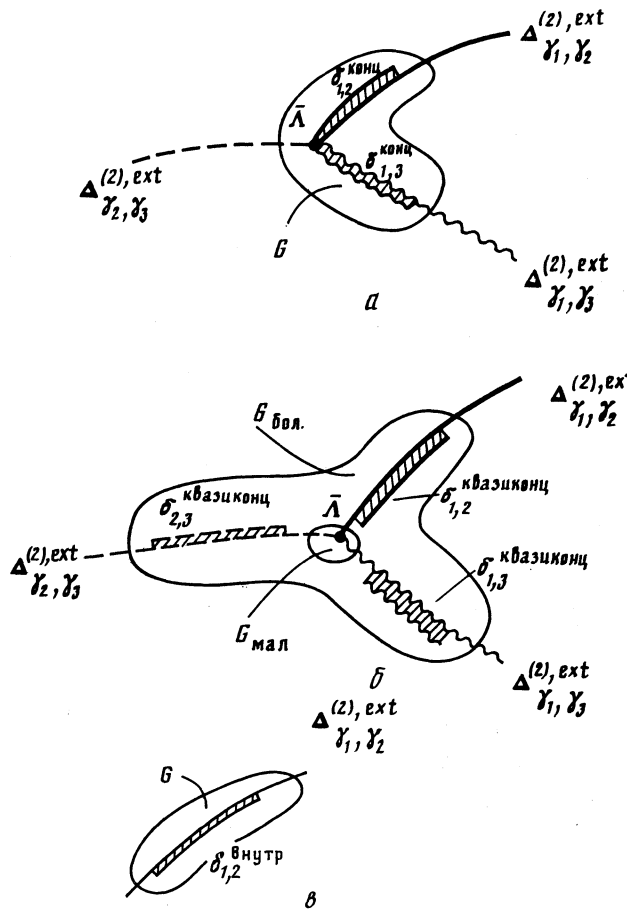

Рис. 5

Теорема 4. *Пусть* $\nu=2$ *и семейство функций* $\{\tilde{\omega}_{0,\Lambda},\ \Lambda\in T^2\}$ *удовлетворяет сформулированным выше условиям, а также выполнены условия* (15). *Тогда при достаточно малых* β *подпространства связанных состояний оператора* A *описываются следующим образом.*

1. *Пусть* $\bar{\Lambda}=\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ — *умеренная тройная точка. Тогда существует единственное подпространство* $\mathcal{H}_G$ *связанных состояний с областью квазиимпульсов* G, *содержащей точку* $\bar{\Lambda}$ *вместе со всеми примыкающими к ней концевыми пороговыми интервалами* $\delta^{\text{конц}}_{i,j}\subseteq\Delta^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_i,\gamma_j}$. *Граница* G *отстоит от* $\cup\delta^{\text{конц}}_{i,j}$ *на расстояние порядка* $\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\}$ (*рис. 5а*). *Дисперсия*

$\varepsilon_G(\Lambda)=\varepsilon(\Lambda)$ *удовлетворяет условиям*

(16а) $$\max \tilde{\omega}_\Lambda<\varepsilon(\Lambda)<\max \tilde{\omega}_\Lambda+C\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\},\quad \Lambda\in G,$$

при ext=max *или*

(16б) $$\min \tilde{\omega}_\Lambda-C\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\}<\varepsilon(\Lambda)<\min \tilde{\omega}_\Lambda,\quad \Lambda\in G$$

при ext=min, $C>0$ – *константа.*

2. *Пусть* $\bar{\Lambda}=\Lambda^{\text{тройн, ext}}_{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3}$ – *вулканическая тройная точка. Тогда существует ровно два подпространства связанных состояний* A: $\mathscr{H}_{G_{\text{мал}}}$ и $\mathscr{H}_{G_{\text{бол}}}$ *таких, что область квазиимпульсов* $G_{\text{бол}}$ *для подпространства* $\mathscr{H}_{G_{\text{бол}}}$ *содержит* $\bar{\Lambda}$ *и все квазиконцевые пороговые интервалы* $\delta^{\text{квазиконц}}_{i,j}$ *на двухкратных кривых* $\Delta^{(2),\text{ext}}_{\gamma_i,\gamma_j}$, *примыкающих к* $\bar{\Lambda}$, *и граница* $\partial G_{\text{бол}}$ *удалена от* $\cup\,\delta^{\text{квазиконц}}_{ij}$ *на расстояние порядка* $\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\}$; *область* $G_{\text{мал}}$ *квазиимпульсов для* $\mathscr{H}_{G_{\text{мал}}}$ *содержит* $\bar{\Lambda}$ *и содержится в* $G_{\text{бол}}$: $\bar{\Lambda}\in G_{\text{мал}}\subseteq G_{\text{бол}}$, *а ее граница* $\partial G_{\text{мал}}$ *отстоит от* $\bar{\Lambda}$ *на расстояние* $\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\}$ (*рис. 5б*). *Дисперсии* $\varepsilon_{\text{мал}}(\Lambda)$ *и* $\varepsilon_{\text{бол}}(\Lambda)$ *в пространствах* $\mathscr{H}_{G_{\text{бол}}}$, *и* $\mathscr{H}_{G_{\text{мал}}}$ *соответственно, удовлетворяет условиям* (16а) *или* (16б), *а кроме того,*

$$\varepsilon_{\text{бол}}(\Lambda)<\varepsilon_{\text{мал}}(\Lambda),\quad \Lambda\in G_{\text{мал}},\quad \text{ext}=\min$$

или

$$\varepsilon_{\text{бол}}(\Lambda)>\varepsilon_{\text{мал}}(\Lambda),\quad \Lambda\in G_{\text{мал}},\quad \text{ext}=\max,$$

при этом

$$|\varepsilon_{\text{бол}}(\Lambda)-\varepsilon_{\text{мал}}(\Lambda)|>\bar{C}\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\},\quad \Lambda\in G_{\text{мал}},$$

$\bar{C}>0$ – *константа,* const>0.

3. *Для любого внутреннего порогового интервала* $\delta^{\text{внут}}_{1,2}\subseteq\Delta^{(2),\text{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ (*не являющегося квазиконцевым интервалом и поэтому не попавшего в описанные выше области* G) *существует единственное подпространство* $\mathscr{H}_G$ *с областью квазиимпульсов* G, *содержащей* $\delta^{\text{внут}}_{1,2}$, *причем ее граница* ∂G *отстоит от* $\delta^{\text{внут}}_{1,2}$ *на расстояние порядка* $\exp\{-\mathrm{const}\,\beta^{-1}\}$ (*рис. 5в*). *Дисперсия* $\varepsilon(\Lambda)$, $\Lambda\in G$ *для* $\mathscr{H}_G$ *удовлетворяет условиям* (16а) *или* (16б).

Описанные подпространства попарно ортогональны друг другу, и их прямая сумма совпадает с ортогональным дополнением к пространству $\mathscr{H}_0$.

На рис. 5а, б, в изображено расположение областей G, описанных в теореме 4: 1) умеренная тройная точка (рис. 5а); 2) вулканическая тройная точка (рис. 5б); 3) внутренний пороговый интервал (рис. 5в).

Замечание 6. В случае, упомянутом в замечании 3, когда точка $\Lambda_0=(\pi,\pi)\in T^2$ является четверной экстремальной точкой $\tilde{\omega}_{\Lambda,0}$, картина расположения кривых $\Delta^{(2),\text{ext}}_{\alpha,\alpha'}$ $((\alpha,\alpha')=(0,0),\ (0,0'),\ (0',0),\ (0',0'))$, примыкающих к Λ_0, имеет вид, изображенный на рис. 6. При этом может возникнуть не более трех подпространств связанных состояний с областями квазиимпульсов, содержащих Λ_0. Возможные картины расположе-

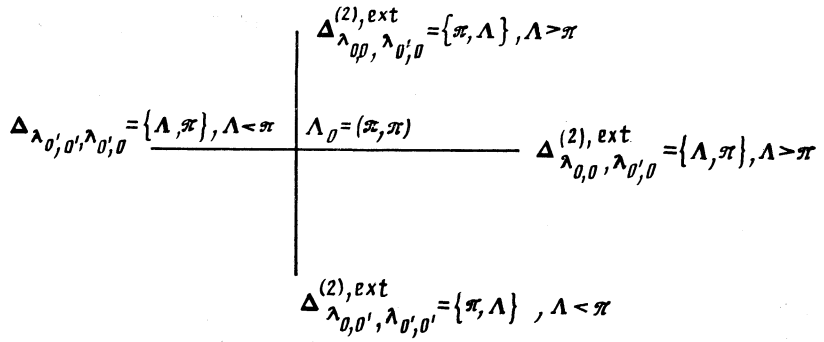

Рис. 6

ния этих областей могут быть полностью описаны подобно тому, как это сделано для случая тройной точки, но мы не будем это рассматривать (подробнее см. в [12]).

4. ЭСКИЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Подробные доказательства сформулированных выше результатов довольно громоздки и составят содержание отдельной публикации (частично их можно найти в [12]). Здесь мы укажем лишь общий план наших рассуждений.

Вычисление резольвенты $R_\Lambda(z)=(\tilde{A}_\Lambda-zE)^{-1}$ оператора $\tilde{A}_\Lambda$ приводит к следующей формуле для ядра $R_\Lambda(\lambda, \mu; z)$ оператора $R_\Lambda(z)$:

$$R_\Lambda(\lambda, \mu; z)=\frac{1}{\tilde{\omega}_\Lambda(\lambda)-z}\,\delta(\lambda-\mu)+\frac{1}{\tilde{\omega}_\Lambda(\lambda)-z}\,T_\Lambda(\lambda, \mu; z)\frac{1}{\tilde{\omega}_\Lambda(\mu)-z},$$

где

$$T_\Lambda(\lambda, \mu; z)=$$
$$=\frac{1}{D_\Lambda(z)}\left[L_0(\lambda, \mu)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(T^\nu)^n}\frac{L_n(\lambda, \mu; \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)}{\prod\limits_{i=n}^{n}(\tilde{\omega}_\Lambda(\varkappa_i)-z)}\prod_{i=1}^{n}d\varkappa_i\right].$$

Здесь $L_n(\lambda, \mu; \varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ — так называемые n-е миноры Фредгольма для ядра $\hat{S}_\Lambda(\lambda, \mu)$ (см. [11]), а $D_\Lambda(z)$ — определитель Фредгольма, равный

$$D_\Lambda(z)=-z\left[\int\limits_{T^\nu}\frac{d\varkappa}{\tilde{\omega}_\Lambda(\varkappa)-z}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\limits_{(T^\nu)^n}\frac{D_\Lambda^{(n)}(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(\tilde{\omega}_\Lambda(\varkappa_i)-z)}\prod_{i=1}^{n}d\varkappa_i\right],$$

где функции $D_\Lambda^{(n)}$ определены выше. Из полученного представления для резольвенты легко выводится существование инвариантного подпространства $\mathscr{H}_{0,\Lambda}$, а также отсутствие сингулярного спектра у $\tilde{A}_\Lambda$ и конечность его дискретного спектра (т. е. все утверждения теоремы 1). Поскольку собственные значения $\tilde{A}_\Lambda$ (порождающие связанные состояния при изменении Λ) являются корнями уравнения $D_\Lambda(z)=0$, остальные результаты

работы доказываются с помощью детального анализа функции $D_\Lambda(z)$ в окрестности «разреза» $\Phi_\Lambda=\{\operatorname{Im}\tilde{\omega}_\Lambda(\lambda)\}\subset R^1$.

При регулярных значениях Λ, т. е. таких, которые не принадлежат каустическому множеству Γ, а в случае размерностей $\nu=1$ и $\nu=2$ и кратному множеству Δ, оказывается, что

$$D_\Lambda(z)=-z\int\limits_{T^\nu}\frac{d\varkappa}{\tilde{\omega}_\Lambda(\varkappa)-z}(1+O(\beta)), \tag{17}$$

причем величина $O(\beta)$ равномерно мала при всех z и всех значениях квазиимпульса Λ, пробегающих любую компактную часть дополнения $(T^\nu\backslash\Gamma)$ при $\nu>2$ или $(T^\nu\backslash(\Gamma\cup\Delta))$ при $\nu=1, 2$. Отсюда и вытекает, что при достаточно малых β и всех таких Λ у оператора $\tilde{A}_\Lambda$ нет дискретного спектра.

Представление (17) оказывается верным и для значений Λ из окрестности каустического множества, а при $\nu>2$ и для всех Λ. Таким образом, подробного изучения требует лишь окрестность кратного множества для случая размерности $\nu=1$ или 2.

В одномерном случае в окрестности точки $\Lambda^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ детерминант $D_\Lambda(z)$ допускает следующее представление.

Лемма 2. *Пусть $\bar{\Lambda}=\Lambda^{(2),\mathrm{ext}}_{\gamma_1,\gamma_2}$ — двухкратное значение параметра Λ, при котором совпадает два экстремальных (скажем, минимальных) значения функции $\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}$: $\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_1})=\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}(\lambda_{\gamma_2})=s=\min\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}$, и пусть $U_\delta=\{x\in R^1:|x-s|<\delta\}$ — небольшая окрестность точки s, не содержащая других критических значений функции $\tilde{\omega}_{\bar{\Lambda}}$. Пусть далее $V_\varepsilon=\{\Lambda\in T^1:|\Lambda-\bar{\Lambda}|<\varepsilon\}$ — небольшая окрестность $\bar{\Lambda}$ такая, что при всех $\Lambda\in V_\varepsilon$ критические точки λ_{γ_1} и λ_{γ_2} функции $\tilde{\omega}_\Lambda$ остаются невырожденными и значения $\tilde{\omega}_\Lambda(\lambda_{\gamma_1})=s_1$ и $\tilde{\omega}_\Lambda(\lambda_{\gamma_2})=s_2$ попадают в U_δ, а значения $\tilde{\omega}_\Lambda$ в остальных ее критических точках лежат вне $U_{2\delta}$. Тогда при $x<\min(s_1, s_2)=\min\tilde{\omega}_\Lambda$, $x\in U_\delta$ и $\Lambda\in V_\varepsilon$ имеем*

$$D_\Lambda(x)=-x\left(\frac{C_1}{\sqrt{s_1-x}}+\frac{C_2}{\sqrt{s_2-x}}+B\frac{C_1C_2}{\sqrt{s_1-x}\sqrt{s_2-x}}+\psi(x)\right), \tag{18}$$

где

$$C_i=\frac{\pi}{(\tilde{\omega}_\Lambda''(\lambda_{\gamma_i}))^{1/2}}+O(\beta),\qquad i=1,2,$$

$$B=D^{(2)}_\Lambda(\lambda_{\gamma_1},\lambda_{\gamma_2})+O(\beta^2),$$

а $\psi(x)$ — непрерывная функция, определенная в окрестности U_δ.

Из представления (18) вытекает теорема 3.

Аналогичные представления детерминант $D_\Lambda(z)$ допускает в окрестности двойных и тройных точек и в случае $\nu=2$ с заменой $(s_i-x)^{-1/2}$ на $\ln(s_i-x)$. Теорема 4 получается после этого из анализа таких представлений.

Замечание 7. Особого внимания заслуживает также окрестность кратных значений Λ, при которых у функции $\tilde{\omega}_\Lambda$ имеется два локальных

(но не абсолютных) экстремума. В этом случае при некоторых исключительных значениях Λ у функции $D_\Lambda(z)$ возможно и появляются нули, лежащие на непрерывном спектре $\tilde{A}_\Lambda$, но они не могут составить связанного состояния. Однако в окрестности таких Λ существуют так называемые резонансы (т. е. комплексные нули $D_\Lambda(z)$, лежащие «за разрезом Φ_Λ»). Их изучение может быть проведено тем же способом, что и настоящих собственных значений $\tilde{A}_\Lambda$, лежащих вне Φ_Λ.

В заключение мы хотим поблагодарить Д. Р. Яфаева и А. Вакуленко, беседы с которыми были для нас очень полезны.

Литература

[1] *Минлос Р. А., Синай Я. Г.* // ТМФ. 1970. Т. 2. № 2. С. 230–243.
[2] *Malyshev V. A., Minlos R. A.* // J. Stat. Phys. 1979. V. 21. № 3. P. 231–242; Commun. Math. Phys. 1981. V. 82. P. 211–226.
[3] *Зайлер Э.* Калибровочные теории. М.: Мир, 1985.
[4] *Ахиезер А. И., Барьяхтар Б. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны. М.: Наука, 1967.
[5] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.
[6] *Фаддеев Л. Д.* О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. Тр. МИАН СССР. 1964. Т. 73. С. 292–313.
[7] *Лакаев С. Н.* Некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса. Тр. сем. им. Петровского. М.: МГУ, 1981. Вып. II. С. 210–238.
[8] *Маматов Ш. С.* // Тр. Моск. матем. об-ва. 1986. Т. 49. С. 71–94.
[9] *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
[10] *Арнольд Д. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Ч. I. М.: Наука, 1982; Часть II. М.: Наука, 1984.
[11] *Ловитт У. В.* Линейные интегральные уравнения. М.: Гостехиздат, 1957.
[12] *Маматов Ш. С.* О связанных состояниях трансфер-матрицы гиббсовского решетчатого поля. Дисс. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1986.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 4.IX.1987 г.

BOUND STATES OF TWO-PARTICLE CLUSTER OPERATOR

Mamatov Sh. S., Minlos R. A.

Spectrum of the two-particle cluster operator

$$(Af)(T)=\sum_{T'}[\omega(t_1-t_1',t_2-t_2')+\omega(t_1-t_2',t_2-t_1')+\beta S(T,T')]f(T'),$$

$$T=(t_1,t_2),\quad T'=(t_1',t_2'),\quad t_i,t_i'\in Z^\nu,\quad i=1,2,$$

$$f\in l_2(C^2_{Z^\nu}),$$

where $C^2_{Z^\nu}$ is the set of all two-element subsets of the lattice Z^ν and β is a small parameter, is studied. For the functions ω and S of the general form it is shown that the operator A in the dimensions $\nu\geqslant 3$ possesses only the continuous two-particle spectrum while in the dimensions $\nu=1,2$ it may have, in the general case, branches of bound states in some regions of quasimomentum values. The location of these regions is investigated in detail and it is found, under which conditions on the functions ω and S the branches of bound states really do appear.