ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 58, № 1
январь, 1984

# О РЕШЕНИЯХ КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА — БАКСТЕРА ДЛЯ ПРОСТЫХ СУПЕРАЛГЕБР

Лейтес Д. А., Серганова В. В.

Найдены все невырожденные решения классического уравнения Янга – Бакстера для простых конечномерных супералгебр Ли в эллиптических и тригонометрических функциях и константные.

1. Классическим уравнением Янга — Бакстера (ЯБ) называется уравнение

$$[X^{12}(u),\ X^{13}(u+v)]+[X^{12}(u),\ X^{23}(v)]+[X^{13}(u+v),\ X^{23}(v)]=0,$$

где $\mathfrak{G}$ — (супер)алгебра Ли, а $X^{ij}:\mathbb{C}\to U(\mathfrak{G})^3$, где $U(\mathfrak{G})$ — универсальная обертывающая алгебра (супер)алгебры Ли $\mathfrak{G}$, причем $X^{12}(\mathbb{C})\subset\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{G}\otimes 1$, $X^{13}(\mathbb{C})\subset\mathfrak{G}\otimes 1\otimes\mathfrak{G}$, $X^{23}(\mathbb{C})\subset 1\otimes\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{G}$. Физический смысл ЯБ-уравнения и его связь с интегрируемыми системами обсуждаются в [1, 2]. В [1] доказано, что следующие условия (невырожденности) эквивалентны, если $\mathfrak{G}$ — простая конечномерная алгебра Ли.

А. Определитель матрицы, образованной координатами тензора $X(u)$, не равен нулю тождественно.

Б. $X(u)$ имеет хотя бы один полюс и не существует подалгебры Ли $\mathfrak{G}'\subset\mathfrak{G}$ такой, что $X(u)\in\mathfrak{G}'\otimes\mathfrak{G}'$ при всех $u$.

В. $X(u)$ имеет полюс порядка 1 при $u=0$ и $\operatorname{Res}X(0)=\Delta_2$, где $\Delta_2$ — квадратичный оператор Казимира на $\mathfrak{G}$.

Оказалось, что любое невырожденное решение является мероморфной функцией на $\mathbb{C}$ с простыми полюсами, образующими дискретную подгруппу $\Gamma\subset\mathbb{C}$. Решения ЯБ-уравнения рассматриваются с точностью до эквивалентности относительно следующих преобразований:

1) $X(u)\to X(u)+r$, где $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{G}$ — подалгебра Ли, $r\in\mathfrak{h}\otimes\mathfrak{h}$, $r^{12}=-r^{21}$, а $[r^{12},r^{23}]+[r^{12},r^{13}]+[r^{13},r^{23}]=0$;

2) $X(u)\to cX(u)$, где $c\in\mathbb{C}\setminus 0$;

3) $X(u_1-u_2)\to(\varphi(u_1)\otimes\varphi(u_2))X(u_1-u_2)$, где $\varphi(u)\in\operatorname{Aut}\mathfrak{G}$.

Невырожденные решения бывают трех видов [1]: $rk\Gamma=2,\ 1,\ 0$.

$rk\Gamma=2$. Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ — такие, что

$$(T_1\otimes 1)X(u)=X(u+\omega_1),\qquad (1\otimes T_2)X(u)=X(u+\omega_2),$$

где $\zeta=\exp(2\pi i/n)$, $T_1=\operatorname{diag}(1,\zeta,\ldots,\zeta^{n-1})$,

$$T_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & & \dots & 1\\ 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathfrak{G}_{k,l}=\{x\in\mathfrak{G}\,|\,T_1x=\zeta^kx,\ T_2x=\zeta^lx\}$, а $\varphi_{k,l}$ — мероморфная функция, полюса которой содержатся в $\Gamma$, причем $\varphi_{k,l}(u+\omega_1)=\zeta^k\varphi_{k,l}(u)$, $\varphi_{k,l}(u+\omega_2)=\zeta^l\varphi_{k,l}(u)$, а $\lim\limits_{u\to 0} u\varphi_{k,l}(u)=1$, и пусть $\Delta_2^{k,l}$ — проекция элемента $\Delta_2$ на $\mathfrak{G}_{k,l}\otimes\mathfrak{G}_{k,l}$. Тогда $\mathfrak{G}=sl(n)$, а

$$X(u)=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}\varphi_{k,l}(u)\,\Delta_2^{k,l}. \tag{1}$$

$rk\Gamma=1$. Пусть $\mathfrak{G}_\sigma^{(n)}=\oplus\mathfrak{G}_j(\sigma)t^{nj+k}$, где $j\in\mathbb{Z}$, $k=0,1,\dots,n-1$, а $\mathfrak{G}_j(\sigma)=\{g\in\mathfrak{G}\,|\,\sigma(g)=\zeta^jg\}$, $\sigma\in\operatorname{Aut}\mathfrak{G}$, $\operatorname{ord}\sigma=n$; пусть $\mathfrak{G}^{(1)}=\mathfrak{G}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ (алгебры Ли $\mathfrak{G}_\sigma^{(n)}$ суть факторы алгебр Каца — Муди по центру). Пусть $B$ — множество (положительных) простых корней алгебры Ли $\mathfrak{G}_\sigma^{(n)}$, отвечающей внешнему автоморфизму $\sigma$. Пусть $h$ — число Кокстера автоморфизма $\sigma$, а $C_\sigma$ — соответствующий автоморфизм Кокстера. Пусть $(,)$ — невырожденная инвариантная симметрическая форма на $\mathfrak{G}$. Пусть $B_1, B_2\subset B$, а $\tau: B_1\to B_2$ — изоморфизм такой, что $(\tau\alpha,\tau\beta)=(\alpha,\beta)$, и для любого $\beta\in B_1$ существует натуральное число $k$ такое, что $\tau^k\beta\in B_1$. Пусть $[B_1,B_2,\tau]$ — класс тройки $(B_1,B_2,\tau)$ относительно автоморфизмов графа Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{G}_\sigma^{(n)}$. Пусть $\mathfrak{A}_i\subset\mathfrak{G}$ — подалгебра Ли, порожденная корневыми пространствами $\mathfrak{G}_\alpha$, где $\alpha\in B_i$. Пусть $\theta:\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$ — изоморфизм, индуцированный изоморфизмом $\tau$. Пусть $P$: $\mathfrak{G}\to\mathfrak{A}_1$ — проекция, сохраняющая градуировку корнями: $\psi=\theta\circ P/(1-\theta\circ P)$.

Решения нумеруются элементами группы $\operatorname{Out}\mathfrak{G}$ внешних автоморфизмов и классами $[B_1,B_2,\tau]$. Они имеют вид

$$X(u)=\frac{\Delta_2}{2}+\frac{1}{e^u-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant h-1}e^{ju/h}\Delta_2{}^j+ \tag{2}$$
$$+\sum_{1\leqslant j\leqslant h-1}[e^{-ju/h}(1\otimes\psi)\Delta_2{}^{-j}-e^{ju/h}(\psi\otimes 1)\Delta_2{}^j],$$

где $\Delta_2{}^j$ — проекция элемента $\Delta_2$ на $\mathfrak{G}_j(C_\sigma)\otimes\mathfrak{G}_j(C_\sigma)$.

$rk\Gamma=0$. Тогда невырожденных решений неописуемо много, и в [1] приведены некоторые примеры, использующие [3].

Ниже мы обобщаем результаты из [1] на простые конечномерные супералгебры Ли (теоремы 1, 2, 5). Отметим, что первые примеры решений уравнения Янга — Бакстера для простых супералгебр Ли получены в [2]. Предварительные сведения см. в [4, 5, 6]. Заметим, что ограничение на четную часть дает решение в алгебрах Ли, причем не всегда полупростых!

**2.** Напомним список классических супералгебр Ли вместе с реализациями.

1. Матричные супералгебры Ли и их близкие родственники. $\mathrm{gl}(n|m)=\left\{X=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right\}$ — матрицы порядка $(n,m)$,

разбитые на блоки, где порядки матриц $A$ и $D$ равны $m$ и $n$, соответственно: четность задается формулой

$$p\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}=0, \quad p\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}=1,$$

а скобка — формулой $[X, Y]=XY-(-1)^{p(X)p(Y)}YX$.

$$\mathrm{sl}(n|m)=\{X\in\mathrm{gl}(n|m)\,|\,\mathrm{str}\,X=0\}, \text{ где } \mathrm{str}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\mathrm{tr}\,A-\mathrm{tr}\,D.$$

$$\mathrm{q}(n)=\{X\in\mathrm{gl}(n|n)\,|\,[X, J_n]=0\}, \text{ где } J_n=\begin{pmatrix} 0 & 1n \\ -1n & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{sq}(n)=\{X\in\mathrm{q}(n)\,|\,\mathrm{otr}\,X=0\}, \text{ где } \mathrm{otr}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}=\mathrm{tr}\,B$$

(в [7] показано, что серию q естественно считать необычным аналогом супералгебры Ли gl).

Если $\mathfrak{s}$ — алгебра Ли скалярных матриц, содержащаяся в $\mathfrak{G}$, то супералгебра Ли $p\mathfrak{G}=\mathfrak{G}/\mathfrak{s}$ называется проективной (типа $\mathfrak{G}$), например, $\mathrm{psl}(n|n)$, $\mathrm{psq}(n|n)$.

Пусть $B(m, 2n)=\mathrm{diag}(\sigma_m, J_n)$, где $\sigma_m=\mathrm{antidiag}(1, \ldots, 1)$ ($m$ раз);

$$\mathrm{osp}(m|2n)=\{X\in\mathrm{gl}(m|2n)\,|\,X^{st}B(m, 2n)+B(m, 2n)X=0\};$$

$$\Pi(n)=\{X\in\mathrm{gl}(n|n)\,|\,X^{st}J_nX=0\};$$

$$\mathrm{s}\Pi(n)=\{X\in\Pi(n)\,|\,\mathrm{str}\,X=0\}.$$

2. Супералгебры Ли векторных полей. Пусть $\Lambda(n)$ — супералгебра Грассмана от $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

$$\mathrm{W}(0|n)=\mathrm{Der}\,\Lambda(n)=\left\{\sum f_i\partial/\partial\xi_i, \text{ где } f_i\in\Lambda(n)\right\},$$

$$\mathrm{S}(0|n)=\{D\in\mathrm{W}(0|n)\,|\,\mathrm{div}\,D=0\}=\{D\in\mathrm{W}(0|n)\,|\,L_Dv_\xi=0\},$$

где определение формы объема $v_\xi$ и производной Ли $L_D$ вдоль поля $D$ от $v_\xi$ см. в [8], а

$$\mathrm{div}\left(\sum f_i\partial/\partial\xi_i\right)=-\sum(-1)^{p(f_i)}\frac{\partial f_i}{\partial\xi_i}.$$

$\mathrm{Po}(0|n)$ как суперпространство совпадает с $\Lambda(n)$, коммутирование называется скобкой Пуассона и задается формулой

$$\{f, g\}_{\text{Р.В.}}=(-1)^{p(f)}\sum\frac{\partial f}{\partial\xi_i}\frac{\partial g}{\partial\xi_i},$$

$$\mathrm{SPo}(n)=\left\{f\in\mathrm{Po}(0|n)\;\middle|\;\int fv_\xi=0\right\}.$$

Сопоставим каждой функции $f\in\Lambda(n)$ векторное поле $D_f=(-1)^{p(f)}\sum\frac{\partial f}{\partial\xi_i}\partial/\partial\xi_i$. Константы, очевидно, составляют ядро отображения $f\mapsto D_f$. Образ супералгебры Ли Po (соответственно SPo) обозначим через H (соответственно SH).

3. Деформации. $D(\alpha)$ — деформация супералгебры Ли $osp(4|2)$. Отождествим $D(\alpha)_{\bar 0}$ с $sl(2)\oplus sl(2)\oplus sl(2)$, а $D(\alpha)_{\bar 1}$ с $id_1\otimes id_2\otimes id_3$, где $id_j$ — тождественное представление $j$-го экземпляра $sl(2)$. Пусть $\psi_j$ — инвариантная форма на $id_j$ с матрицей $J_1$. Определим отображение $p_j$: $id_j\otimes id_j\to sl(2)$ из формулы $p_j(u, v)w=\lambda_j(\psi_j(u, v)w-\psi_j(w, u)v)$, где $\lambda_j\in\mathbb{C}$, а отображение $[\ ,\ ]$: $S^2D(\alpha)_{\bar 1}\to D(\alpha)_{\bar 0}$ формулой

$$[u_1\otimes u_2\otimes u_3,\ v_1\otimes v_2\otimes v_3]=$$
$$=\sum_{(i,j,k)=\sigma(1,2,3),\ \sigma\in S_3}\psi_i(u_i, v_i)\psi_j(u_j, v_j)p_k(u_k, v_k).$$

Оказывается, что тождество Якоби выполняется тогда и только тогда, когда $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$. Числа $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ определены, очевидно, с точностью до перестановки и общего множителя. Положим $\alpha=\lambda_1/\lambda_2$. Из сказанного выше следует, что $D(\alpha)\cong D(\alpha')$, если $\alpha'=\alpha^{-1}$ или $\alpha'=-\alpha/(\alpha+1)$. При $\alpha=1$, $(-2)^{\pm 1}$ супералгебра Ли $D(\alpha)$ изоморфна $osp(4|2)$.

$$S_t'(2n)=\{D\in W(0|2n)\,|\,L_D(1+t\xi_1\ldots\xi_{2n})v_\xi=0\}$$

— деформация супералгебры Ли $S(0|2n)$ с параметром $t$.

$$S_t'(2n+1)=\{D\in\Lambda(\theta)W(0|2n+1)\,|\,L_D(1+t\theta\xi_1\ldots\xi_{2n+1})v_\xi=0\}$$

— деформация с нечетным параметром $t\theta$. Имеем $S_t'(n)=S_{t'}'(n)$ при $t$, $t'\neq 0$. Пусть $S'(n)=S_1'(n)$.

В [9] описано квантование ($Q_h$: символ $\to$ оператор) супералгебры Пуассона $Po(0|2n)$. Оказывается, что оператор квантования $Q_h$ задает деформацию, причем постоянная Планка $h$ — параметр, а $Q_h(Po)\cong Q_{h'}(Po)$ при $h$, $h'\neq 0$, и $Q_h(Po(0|2n)\cong gl(2^{n-1}|2^{n-1})$, $Q_h(Po(0|2n+1))\cong q(2^{n-1})$. Ограничение квантования с Po на SH тоже задает деформацию (в psl и psq, соответственно).

4. Исключительные супералгебры Ли, которые естественно обозначить через $AG_2$ и $AB_3$, описаны в [10].

Теорема [6, 11]. *Супералгебры Ли* $sl(n|m)$ *при* $n\neq m$, $psl(n|n)$ *при* $n>1$, $osp(m|2n)$, $s\Pi(n)$ *при* $n>3$, $psq(n)$ *при* $n>2$, $W(0|n)$ *при* $n>2$, $S(0|n)$ *и* $S'(n)$ *при* $n>2$, $SH(n)$ *при* $n>4$, $AG_2$ *и* $AB_3$ *просты и попарно неизоморфны. Супералгебры Ли* $D(\alpha)$ *просты при* $\alpha\neq 0, -1, \infty$.

*Деформации с нечетным параметром* $t\theta$, *описанные выше, просты над* $\Lambda(\theta)$. *Других деформаций простых супералгебр Ли, кроме перечисленных, нет* (*см.* [11]).

**3.** Пусть $\mathfrak{G}$ — супералгебра Ли со скобкой $[\ ,\ ]$, а $\mathfrak{G}_T$, где $T$ — $t$ или $t\theta$,— ее деформация со скобкой $[\ ,\ ]_T=[\ ,\ ]+Tc+\ldots$ . Кососимметрическая 2-форма $c$: $\mathfrak{G}\otimes\mathfrak{G}\to\mathfrak{G}$ называется коциклом, задающим (инфинитезимальную) деформацию. Определим по такому коциклу $c$ решение $r$ ЯБ-уравнения, положив

$$r=r^{ij}e_i\otimes e_j,\quad (r^{ij})=(c^{ij})^{-1}, \tag{3}$$

где $\{e_i\}$ — базис в $\mathfrak{G}$. Легко видеть [1], что деформация тривиальна, т. е. $\mathfrak{G}_t\cong\mathfrak{G}$ или $\mathfrak{G}_{t\theta}\cong\mathfrak{G}\otimes\Lambda(\theta)$, тогда и только тогда, когда решение $r$ эквивалентно нулевому решению.

Теорема 1. *Определения* «А»—«В» *эквивалентны для простых супералгебр Ли, отличных от* $s\Pi(n)$, $W(0|n)$, $S(0|n)$, $psq(n)$, $osp(4|2)$, $SH(0|n)$, $S'(n)$.

*Для супералгебр Ли серий* S, SH, $D(\alpha)$ *при* $\alpha\neq 0, 1$ *невырожденное в смысле* «А» *решение имеет вид* $X(u)=r$, *где тензор* $r$ *определен формулой* (3), *а решений, невырожденных в смысле* «Б» *и* «В», *нет, если* $\mathfrak{G}=SH(2n)$ *и* $D(\alpha)$.

*Для супералгебр Ли серий* SП, W, psq *и* S′ *решений, невырожденных в смысле* «А»—«В», *нет.*

Доказательство следует из предложений 2.1 и [1] и описания деформаций простых супералгебр Ли.

**4.** Пусть $X$ — мероморфное решение ЯБ-уравнения для простой супералгебры Ли $\mathfrak{G}$ и $\Gamma\subset\mathbb{C}$ — множество полюсов функции $X$. Тогда из предложения 4.4 [1] следует, что $\Gamma$ — дискретная подгруппа в $\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Если* $rk\Gamma=2$, *то* $\mathfrak{G}=psl(n|n)$ *или* $osp(N|2)$, *где* $N=1, 2, 3, 4$ (*соответственно* $SH(2n)$), *а* $X(u)$ *имеет вид* (1), *где* $T_1$ *и* $T_2$ — *продолжения автоморфизмов* $T_1$ *и* $T_2$ *с четной части на всю* $\mathfrak{G}$ (*соответствующий образ решения* (1) *при сжатии* $psl(2^{2n-1}|2^{2n-1})\to SH(2n)$, *которое можно описать как сопоставление оператору его символа, см. в* [9]).

Доказательство следует из [1, предложения 4, 5; 9, § 5].

Приведем явный вид оператора $\Delta_2$ на простых супералгебрах Ли. Для этого нам понадобится напомнить описание инвариантных симметрических невырожденных билинейных форм на них.

Теорема 3. *Форма Киллинга* $(x, y)=\mathrm{str}\,\mathrm{ad}\,x\,\mathrm{ad}\,y$ *невырождена на* $sl(n|m)$ *при* $n\neq m$, *на* $osp(n|2m)$ *при* $n\neq 2m+2$, *на* $AG_2$ *и* $AB_3$. *Четная форма* $(x, y)=\mathrm{str}\,xy$ (*соответственно* $\int x(\xi)y(\xi)v_\xi$) *невырождена на* $gl(n|m)$ *и* $osp(2n+2|2n)$ (*соответственно на* $Po(0|2n)$), *а нечетная форма* $(x, y)=\mathrm{otr}\,xy$ (*соответственно* $\int x(\xi)y(\xi)v_\xi$) *невырождена на* $q(n)$ (*соответственно* $Po(0|2n-1)$). *На супералгебрах Ли серий* psl, psq *и* SH *эти формы индуцируют невырожденные формы. Все вышеперечисленные формы симметричны и инвариантны.*

*На супералгебрах Ли серий* sП, W, S, S′ *инвариантных невырожденных симметричных форм нет.*

Доказательство следует из [6, 10, 12].

Четная симметрическая невырожденная билинейная форма позволяет отождествлять центральные элементы из универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{G})$ — операторы Лапласа — Казимира — с инвариантными полиномами на $\mathfrak{G}$. Нам нужен лишь квадратичный элемент $\Delta_2$ из центра $Z(U(\mathfrak{G}))$ алгебры $U(\mathfrak{G})$.

Лемма 1. $\Delta_2=0$, *если* $\mathfrak{G}$ *из серий* sП, W, S, S′, psq, $SH(2k+1)$. *По четной симметрической форме* ( , ) *элемент* $\Delta_2$ *определяется так же, как и для алгебр Ли* [1]. *Он имеет вид* $\Delta_2=\sum(-1)^{p(I_\mu)}I_\mu\otimes I_\mu^*$, *где* $\{I_\mu\}$ — *базис супералгебры Ли* $\mathfrak{G}$, *в котором матрица формы* ( , ) *имеет вид*

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1_n & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1_m \\ & -1_m & 0 \end{array}\right),$$

*где* $n|2m=\dim\mathfrak{G}$.

Доказательство того, что $[\Delta_2, \mathfrak{G}]=0$, непосредственное (см. [6, 10]).

5. Чтобы описать случай $rk\,\Gamma=1$, дадим определение контрагредиентной супералгебры Ли (ср. [6]) и ее автоморфизма Кокстера. Подалгеброй Картана $\mathfrak{C}$ супералгебры Ли $\mathfrak{G}$ называется максимальная нильпотентная подсупералгебра Ли, совпадающая со своим нормализатором. В отличие от алгебр Ли подалгебра Картана простой супералгебры Ли может не быть коммутативной; поэтому веса и корни удобно считать функционалами на $\mathfrak{C}^0=\mathfrak{C}_{\bar 0}\cap\mathfrak{G}_0$, где $\oplus\mathfrak{G}_i=\mathfrak{G}$ — стандартная $\mathbb{Z}$-градуировка [6]. Контрагредиентной назовем такую супералгебру Ли, что если $\alpha$ — корень, то $-\alpha$ — корень той же кратности. В каждой простой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{G}$ существует система простых корней (СПК), т. е. минимальное множество $B=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ ненулевых корней кратности 1 такое, что корневые векторы $x_{\pm\alpha_i}$ порождают алгебру $\mathfrak{G}$, и существуют $h_i\in\mathfrak{C}^0\subset\mathfrak{C}$ такие, что $[x_{\alpha_i}, x_{-\alpha_j}]=\delta_{ij}h_j$.

Не всякая контрагредиентная супералгебра Ли имеет СПК. Если же СПК есть, то супералгебре Ли $\mathfrak{G}_\varphi^{(m)}$ (или ее центральному решению ${}^e\mathfrak{G}$, такому что центр принадлежит $({}^e\mathfrak{C})^0$, где ${}^e\mathfrak{C}$ — подалгебра Картана супералгебры ${}^e\mathfrak{G}$) сопоставим матрицу Картана $A=(a_{ij})$, заданную формулами $[h_i, x_{\pm\alpha_j}]=\pm a_{ij}x_{\pm\alpha_j}$.

Условимся нормализовать матрицы Картана с помощью замены базиса в $\mathfrak{G}$ так, чтобы $a_{ii}=2$ или 0, а целых $a_{ij}$ было бы как можно больше. Сопоставим целочисленной матрице Картана граф, изобразив СПК типов $\mathrm{sl}(2)$, $\mathrm{osp}(1|2)$ и $\mathrm{sl}(1|1)$ символами $\circ$, $\bullet$ или $\otimes$, соответственно, и соединим $i$-ю и $j$-ю вершины $\max(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ отрезками и знаком $>$, направленным к вершине $j$, если $|a_{ij}|>|a_{ji}|$.

Теорема 4 (В. Серганова). *Сводка СПК простых контрагредиентных супералгебр Ли вида $\mathfrak{G}_\varphi^{(m)}$, где $\mathfrak{G}$ — простая конечномерная, приведена в приложении. СПК конечномерных простых супералгебр Ли соответствуют связным компонентам графов, полученных из графов приложения вычеркиванием произвольной вершины и нормализацией. Матрицы Картана для* $\mathrm{D}(\alpha)^{(1)}$ *суть*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & -1-\alpha \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right),\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1-\alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha & -1-\alpha \\ -1-\alpha & \alpha & 0 & 1 \\ \hline \alpha & -1-\alpha & 1 & 0 \end{array}\right),$$

*а матрицы Картана для* $\mathrm{D}(\alpha)$ *составляют отмеченные левые углы в этих матрицах* (обозначения, использованные в приложении, см. в п. 6).

Пусть $\varphi$ — представитель смежного класса из группы внешних автоморфизмов простой супералгебры Ли $\mathfrak{G}$ (см. [5]). Автоморфизм $C_\varphi\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{G}$ назовем кокстеровским автоморфизмом, соответствующим автоморфизму $\varphi$, если $\mathfrak{G}_{(0)}(C_\varphi)$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{G}_\varphi^{(m)}$, а $\{x_{\pm\alpha i}\}\in\mathfrak{G}_{(\pm1)}(C_\varphi)$. Порядок $h_\varphi$ автоморфизма $C_\varphi$ назовем числом Кокстера, соответствующим автоморфизму $\varphi$. Правильным назовем такой автоморфизм $\varphi$ простой конечномерной супералгебры Ли $\mathfrak{G}$, что супералгебра Ли $\mathfrak{G}_\varphi^{(m)}$ контрагредиентна и ее матрица Картана целочисленна (из [5]

| $\mathfrak{G}$ — супералгебра Ли<br>$\varphi$ — правильный автоморфизм | СПК (номер в приложении) | $h_\varphi$ | $Y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| (p) sl $(m \mid n)$ $\varphi = \mathrm{id}$ | 1 | $m+n$ | d $(A, B)$ |
| (p) sq $(n)$ $\varphi = \delta_{-1}$ | 1 | $2n$ | d $(C, C)$ |
| osp $(2 \mid 2n)$ $\varphi = \mathrm{id}$ | 2А<br>2Б | $2n+2$<br>$2n+1$ | d $(B, \varepsilon B^{-1}, A, \varepsilon A^{-1})$ |
| osp $(2m \mid 2n)$ $\varphi = \mathrm{id}$<br>((p) sl $(2m \mid 2n)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Ad}\, B\, (2m \mid 2n)$) | 3А, 3Б, 3Г | $2(m+n)-2$<br>$(4(m+n)-4)$ | d $(\varepsilon^{-1}A, \varepsilon A_\sigma, \varepsilon^{-1}B, \varepsilon B^{-1})$ |
| | 3В, 3Е | $2(m+n)-1$<br>$(4(m+n)-2)$ | |
| | 3Ж | $2(m+n)$<br>$(4(m+n))$ | d $(B, \varepsilon B_\sigma, A, \varepsilon A^{-1})$ |
| osp $(2m+1 \mid 2n)$ $\varphi = \mathrm{id}$<br>(sl $(2m+1 \mid 2n)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Ad}\, B\, (2m+$<br>$+1 \mid 2n)$) | 4Д, 4Е | $2(m+n)$<br>$(4(m+n))$ | d $(A, 1, A_\sigma, B, B^{-1})$ |
| | 4Г | $2(m+n)+1$<br>$(4(m+n)+2)$ | |
| | 4А, 4Б | $2(m+n)$<br>$(4(m+n))$ | d $(B, 1, B_\sigma, A, A^{-1})$ |
| | 4Ж | $2(m+n)+1$<br>$(4(m+n)+2)$ | |
| osp $(2m \mid 2n)$<br>$\varphi = \mathrm{Add}\,(D, 1_{2n})$ | 7Б, 7В | $2(m+n)$ | d $(1, A, A_\sigma, 1, B, B^{-1})$ |
| | 7А | $2(m+n)$ | d $(1, B, B_\sigma, 1, A, A^{-1})$ |
| (p) sl $(2m+1 \mid 2n+1)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Add}\,(\sigma_{2m+1}, 1, J_n)$ | 7Б, 7В | $4(m+n)+4$ | d $(A, 1, A_\sigma, 1, B, B^{-1})$ |
| | 7А | $4(m+n)+4$ | d $(B, 1, B_\sigma, 1, A, A^{-1})$ |
| osp $(1 \mid 2n)$ $\varphi = \mathrm{id}$ | 5А | $2n+1$ | d $(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^n, \varepsilon^{-1}, \ldots, \varepsilon^{-n})$ |
| sl $(1 \mid 2n)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Ad}\, B\, (1 \mid 2n)$ | 6Б | $4n$ | d $(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^n, \varepsilon^{-1}, \ldots, \varepsilon^{-n})$ |
| osp $(2 \mid 2n)$<br>$\varphi = \mathrm{Add}\,(\sigma_2, J_n)$ | 8А | $2n+2$ | d $(1, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^n, \varepsilon^{-1}, \ldots, \varepsilon^{-n})$ |
| sl $(1 \mid 2n+1)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Add}\,(1, 1, J_n)$ | 6А | $4n+4$ | d $(1, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^n, \varepsilon^{-1}, \ldots, \varepsilon^{-n})$ |
| sl $(2 \mid 2n)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Add}\,(J_1, \sigma_{2n})$ | 9Б | $4n$ | d $(\varepsilon^n, \varepsilon^{-n}, 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^{1-n}, \ldots, \varepsilon^{-1}, 1)$ |
| | 9Е | $4n+4$ | d $(\varepsilon, 1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{-n}, \ldots, \varepsilon^{-1})$ |
| | 9Ж | $4n+2$ | d $(\varepsilon^{-1}B, \varepsilon B^{-1}, \varepsilon^{-1}A, \varepsilon A^{-1})$ |
| sl $(2 \mid 2n+1)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Add}\,(J_1, \sigma_{2n+1})$ | 9А | $4n+4$ | d $(\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^{-n-1}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^n, 1, \varepsilon^{-n}, \ldots, \varepsilon^{-1})$ |
| | 9Д | $4n+6$ | d $(\varepsilon, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n+1}, 1, \varepsilon^{-n-1}, \ldots, \varepsilon^{-2})$ |
| osp $(4 \mid 2)$ $\varphi = \mathrm{id}$ | 3Д | 4 | d $(1, -1, -1, 1, i, -i)$ |
| osp $(3 \mid 2)$ $\varphi = \mathrm{id}$ | 4В | 4 | d $(-1, 1, -1, i, -i)$ |
| osp $(1 \mid 2)$ $\varphi = \mathrm{id}$ | 5Б | 3 | d $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$ |
| sl $(1 \mid 4)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Ad}\, B\, (1 \mid 4)$ | 6В | 8 | d $(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-2})$ |
| sl $(1 \mid 3)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Add}\,(1, 1, J_1)$ | 6Г | 8 | d $(1, 1, \varepsilon, \varepsilon^{-1})$ |
| osp $(2 \mid 2)$<br>$\varphi = \mathrm{Add}\,(\sigma_2, 1_2)$ | 8Б | 4 | d $(1, 1, i, -i)$ |

Таблица (окончание)

| $\mathfrak{G}$ — супералгебра Ли<br>$\varphi$ — правильный автоморфизм | СПК (номер в приложении) | $h_\varphi$ | $Y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\mathrm{sl}(2\mid 3)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Ad}\,(1_2,\ \sigma_3)$ | 9В | 8 | $\mathrm{d}\,(\varepsilon^2,\ \varepsilon^{-2},\ \varepsilon,\ 1,\ \varepsilon^{-1})$ |
| $\mathrm{sl}(4\mid 2)$<br>$\varphi = -st \circ \mathrm{Ad}\,B\,(4\mid 2)$ | 9Г | 8 | $\mathrm{d}\,(1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^{-1},\ 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^{-2})$ |
| $\mathrm{D}\,(\alpha)$ $\varphi = \mathrm{id}$ | все корни нечетные | 4 | $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ |
| | один нечетный корень | 5 | $\begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ |

следует, что классы неправильных автоморфизмов суть $d_3$ и $d_3^2$ для $\mathrm{D}((-1\pm i\sqrt{3})/2)$; П и По-st для $\mathrm{psl}(n|n)$, а также id (соответственно А) для супераглебр Ли серий S, S′, W, SH, sП (соответственно $\mathrm{SH}(2n)$).

Пусть $\Gamma_\varphi$ — граф СПК в $\mathfrak{G}_\varphi^{(m}$, соответствующий целочисленной матрице Картана.

Лемма 2. *Число $h_\varphi$ равно сумме отметок графа $\Gamma_\varphi$, умноженной на наименьший среди порядков автоморфизмов в смежном классе автоморфизма $\varphi$ по подгруппе внутренних автоморфизмов.*

Пусть $\mathfrak{C}$ и $C_\varphi$ — подалгебра Картана и автоморфизм Кокстера супералгебры Ли $\mathfrak{G}$. Положим

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{G}, C_\varphi) = \{\psi \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{G} \mid \psi \circ C_\varphi = C_\varphi \circ \psi\},$$

$$\mathrm{Int}(\mathfrak{G}, C_\varphi) = \{\psi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}, C_\varphi) \mid \psi|_{\mathfrak{C}} = \mathrm{id}\},$$

$$\mathrm{Out}(\mathfrak{G}, C_\varphi) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}, C_\varphi)/\mathrm{Int}(\mathfrak{G}, C_\varphi).$$

Лемма 3. *Группа* $\mathrm{Out}(\mathfrak{G}, C_\varphi)$ *изоморфна группе автоморфизмов графа* $\Gamma_\varphi$ $(\mathfrak{G} \neq \mathrm{psq}(n))$.

Доказательство лемм 2 и 3 аналогично случаю алгебр Ли (см. [13]).

По определению $C_\varphi = \varphi \circ \mathrm{Ad}\,Y$, где $Y$ — элемент из присоединенной группы алгебры Ли $\mathfrak{G}_{\bar{0}}$.

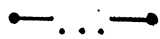
Теорема 5. *Все правильные автоморфизмы простой конечномерной супералгебры Ли $\mathfrak{G}$, соответствующие им автоморфизмы Кокстера и элементы $Y$ перечислены в таблице для* $\mathfrak{G} \neq \mathrm{AB}_3$, $\mathrm{AG}_2$ (обозначения см. в. п. 6).

Доказательство сразу следует из теоремы 3.

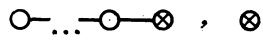
Теорема 6. *Если $rk\ \Gamma = 1$, а $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_\varphi^{(m)}$ — контрагредиентные супералгебры Ли, обладающие СПК, то решения имеют вид* (2).

Доказательство аналогично [1] с учетом лемм 1—3 и теорем 4 и 5.

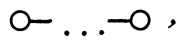
6. **Обозначения.** В приложении нами используются следующие обозначения: $\delta_{-1}$ — автоморфизм $\mathfrak{G}$ такой, что $\delta_{-1}|_{\mathfrak{G}_{\bar{1}}} = -\mathrm{id}$, $l$ — число всех вершин графа, $k$ — четность числа вершин $\otimes$, вместо $\cdot$ может стоять $\circ$ или $\otimes$, а в случае 1 для psq — квадратик. Разобьем максимальный «средний» (легко видеть, что граф имеет три горизонтальных уровня) подграф вида

(4) 

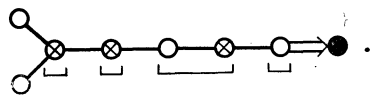
(в случае 1 весь граф) на подграфы вида



или



начиная слева (в случае 1 с любого места), например,



Пусть $i(j)$ — число всех вершин во всех (не)четных группах, числовые отметки — коэффициенты линейной зависимости столбцов в матрице Картана. В случае $(\mathrm{p})\mathrm{sl}(2m|2n)^{(2)}_{-st}$ и $(\mathrm{p})\mathrm{sl}(2m+1|2n+1)^{(2)}_{-st}$, переставляя $m$ и $n$, получим новые графы вида 3 и 7.

В случае 1 мы условимся, что супералгебра Ли $\mathfrak{G}$ серии psq или $\mathrm{psq}^{(1)}$ имеет СПК, соответствующая матрица Картана есть матрица Картана для $\mathfrak{G}_{\bar 0}$, а граф имеет столько же вершин, сколько граф для $\mathfrak{G}_{\bar 0}$, но вершины изображаются квадратиками.

Замечание. Если $n=2k+1$, то вместо $\mathrm{psl}(n|n)^{(\ )}_{-st}$ правильнее писать $\mathrm{psl}(n|n)^{(4)}_{-st}$, ибо порядок автоморфизма $-st$ в группе $\mathrm{Out}\,\mathrm{psl}(n|n)$ равен 4 при $n=2k+1$, см. [5].

В таблице используются следующие обозначения: $\varepsilon=\exp 2\pi i/h_\varphi$. Пусть $\Gamma'$ — максимальный подграф $\Gamma_\varphi$ вида (4), $\Gamma$ — граф, полученный из $\Gamma'$ добавлением справа еще одной вершины $\circ$. Пусть все вершины $\Gamma$ занумерованы справа налево и $r_1, \ldots, r_q$ — номера вершин вида $\otimes$. Тогда

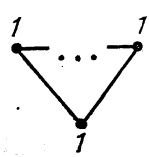
$$A=\mathrm{diag}(\varepsilon, \ldots, \varepsilon^{r_1}, \varepsilon^{r_2+1}, \ldots, \varepsilon^{r_3}, \ldots);$$
$$B=\mathrm{diag}(\varepsilon^{r_1+1}, \ldots, \varepsilon^{r_2}, \varepsilon^{r_3+1}, \ldots),$$
$$C=\mathrm{diag}\,(\varepsilon, \ldots, \varepsilon^{r_1}, -\varepsilon^{r_1+1}, \ldots, -\varepsilon^{r_2}, \varepsilon^{r_3+1}, \ldots),$$

Add — сокращение записи Ad diag. $D=(d_{ij})$, где $d_{1m}=d_{m1}=1$, $d_{ii}$ для всех $1<i<m$, остальные $d_{ij}$ равны 0; $A_\sigma=\sigma_m A \sigma_m$, где $m$ — порядок матриц $A$, $D$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Графы СПК простых контрагредиентных супералгебр Ли $\mathfrak{G}^{(m)}_\varphi$

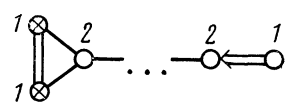
1. $(\mathrm{p})\mathrm{sl}(m|n)^{(1)}: l=m+n,\ k\equiv 0,\ i=m,\ j=n;$ $\mathrm{psq}(n)^{(2)}_{\delta_{-1}}: l=n,\ k\equiv 1,\ i+j=n$




2. $\mathrm{osp}(2|2n)^{(1)}: l=n+2$

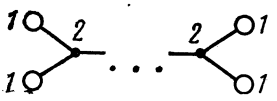
А. $n>1$, есть одна пара $\otimes-\otimes$

Б. $n>1$

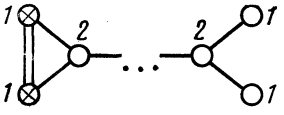


3. $\mathrm{osp}(2m|2n)^{(1)}$, $m>1$ ($(\mathrm{p})\mathrm{sl}(2m|2n)^{(2)}_{-st}$, $m, n>1$): $l=m+n+1$

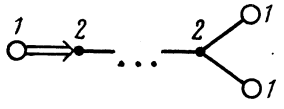
А. $k\equiv 0$, $i=n$, $j=m-3$ ($k\equiv 1$, $i=n-2$, $j=m-1$)



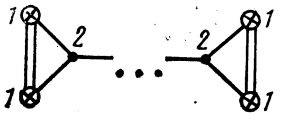
Б. $k\equiv 1$, $i=m-3$, $j=n$ ($k\equiv 0$, $i=m-1$, $j=n-2$)



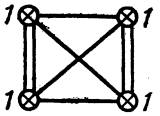
В. $k\equiv 1$, $i=m-2$, $j=n$ ($k\equiv 0$, $i=n$, $j=m-2$)



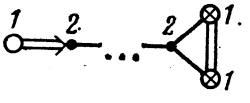
Г. $k\equiv 0$, $i=m-2$, $j=n-1$ ($k\equiv 1$, $i=m-2$, $j=n-1$)



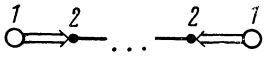
Д. $\mathrm{osp}(4|2)^{(1)}$



Е. $k\equiv 0$, $i=m-1$, $j=n-1$ ($k\equiv 1$, $i=n-1$, $j=m-1$)

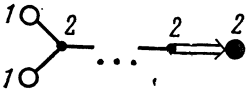


Ж. $k\equiv 0$, $i=m$, $j=n-1$ ($k\equiv 1$, $i=n-1$, $j=m$)

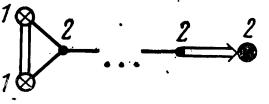


4. $\mathrm{osp}(2m+1|2n)^{(1)}$, $m\geqslant 1$ ($\mathrm{sl}(2m+1|2n)^{(2)}_{-st}$, $m, n\geqslant 1$): $l=m+n+1$

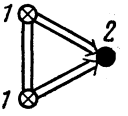
А. $k\equiv 1$, $i=n-1$, $j=m-1$ ($k\equiv 0$, $i=m$, $j=n-2$)



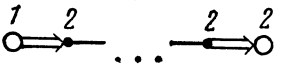
Б. $k\equiv 0$, $i=m-1$, $j=n-1$ ($k\equiv 1$, $i=n-2$, $j=m$)



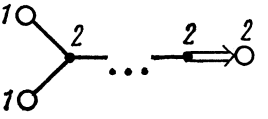
В. $\mathrm{osp}(3|2)^{(1)}$



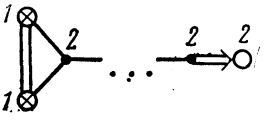
Г. $k\equiv 1$, $i=m-1$, $j=n$ ($k\equiv 0$, $i=n$, $j=m-1$)



Д. $k\equiv 0$, $i=n$, $j=m-2$ ($k\equiv 1$, $i=m-1$, $j=n-1$)



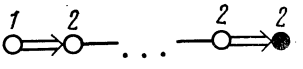
Е. $k\equiv 1$, $i=m-2$, $j=n$ ($k\equiv 0$, $i=n-1$, $j=m-1$)



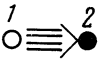
Ж. $k\equiv 0$, $i=m$, $j=n-1$ ($k\equiv 1$, $i=n-1$, $j=m$)

5. $\mathrm{osp}(1|2n)^{(1)}$: $l=n+1$

А. $n>1$

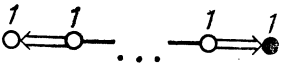


Б. $\mathrm{osp}(1|2)^{(1)}$

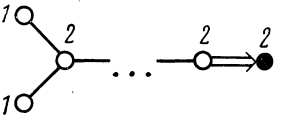


6. $\mathrm{sl}(1|m)^{(2)}_{-st}$: $l=1+[m/2]$

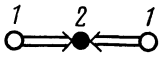
А. $m\equiv 1$



Б. $m\equiv 0$



В. $sl(1|4)^{(2)}_{-st}$



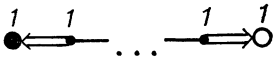
Г. $sl(1|3)^{(2)}_{-st}$

7. $osp(2m|2n)^{(2)}$, $m>1 : l=m+n$

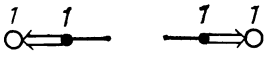
$((p)sl(2m+1|2n+1)^{(2)}_{-st}$, $m, n\geqslant 1 : l=$
$=m+n+1)$

А. $k\equiv 0$, $i=m-1$, $j=n-1$ ($k\equiv 1$, $i=n-1$, $j=m$)

Б. $k\equiv 1$, $i=m-2$, $j=n$ ($k\equiv 0$, $i=m$, $j=$
$=n-1$)

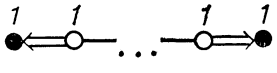


В. $k\equiv 0$, $i=n$, $j=m-2$ ($k\equiv 1$, $i=m-1$, $j=n$)



8. $osp(2|2n)^{(2)} : l=n+1$

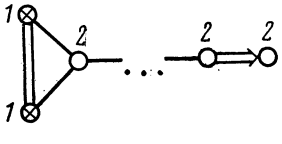
А. $n>1$



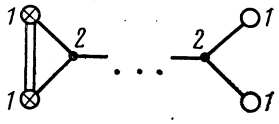
Б. $osp(2|2)^{(2)}$

9. $sl(2|n)^{(2)}_{-st} : l=2+[n/2]$

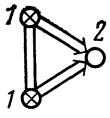
А. $n\equiv 1$



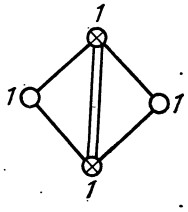
Б. $n\equiv 0$



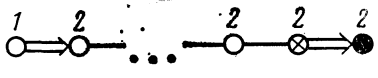
В. $sl(2|3)^{(2)}_{-st}$



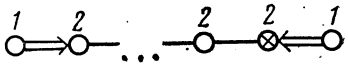
Г. $sl(2|4)^{(2)}_{-st}$



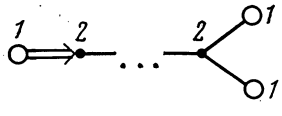
Д. $n\equiv 1$



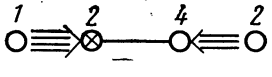
Е. $n\equiv 0$



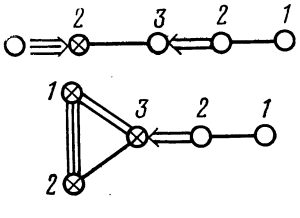
Ж. $n\equiv 0$, $n>2$, есть одна пара $\otimes$—$\otimes$



10. $AG_2^{(1)}$



11. $AB_3^{(1)}$



## Литература


[1] *Белавин А. А., Дринфельд В. Г.*– Функц. анализ и его прилож., 1982, *16*, № 3, 1–29.
[2] *Кулиш П. П., Склянин Е. К.*– Зап. научн. сем. ЛОМИ, 95, Л.: Наука, 1980, 129–160.
[3] *Элашвили А. Г.*– Функц. анализ и его прилож., 1982, *16*, № 4, 94–95.
[4] *Лейтес Д. А.*– УМН, 1980, *35*, № 1, 3–57.
[5] *Лейтес Д. А., Серганова В. В., Фейгин Б. Л.*– Теоретико-групповые методы в физике, т. 1, М.: Наука, 1983, 274–278.
[6] *Kac V. G.*– Adv. Math., 1977, *26*, 8–96.
[7] *Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А.*– ДАН Болгарии, 1982, *35*, 285–286.
[8] *Бернштейн И. Н., Лейтес Д. А.*– Функц. анализ и его прилож., 1977, *11*, № 1, 55–56.
[9] *Shereshevski I. A.*– Lett. Math. Phys., 1981, *5*, 429–431.
[10] *Scheunert M., Nahm W., Rittenberg V. J.*– Math. Phys., 1976, *17*, 1640–1641.
[11] *Алексеевский Д. В., Лейтес Д. А., Щепочкина И. М.*– ДАН Болгарии, 1980, *33*, № 9, 1187–1190.
[12] *Kac V. G.*– Lect. Notes Math., 1978, 676, 597–626.
[13] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. VI–VIII, М.: Мир, 1976.



Карельский филиал
АН СССР
Московский государственный
университет



Поступила в редакцию
18.VIII.1982 г.


## ON SOLUTIONS OF THE CLASSICAL YANG — BAXTER EQUATION FOR SIMPLE LIE SUPERALGEBRAS


**Leites D. A., Serganova V. V.**



All nondegenerate solutions of the classical Yang – Baxter equation for simple finite-dimensional Lie superalgebras are found which are either elliptic or trigonometric or constant functions.