Доклады Академии наук СССР
1963. Том 150, № 5

МАТЕМАТИКА

В. Л. ЛЕВИН, Д. А. РАЙКОВ

ТЕОРЕМЫ О ЗАМКНУТОМ ГРАФИКЕ ДЛЯ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 11 I 1963)

В. Птак ([1], [2]), анализируя известную теорему Банаха об открытом отображении ([3]), ввел класс локально выпуклых пространств, названных им B-полными и характеризуемых тем, что всякое «почти открытое» непрерывное линейное отображение их на какое бы то ни было локально выпуклое пространство открыто. А. и У. Робертсоны ([4]) распространили на B-полные пространства также теорему Банаха о замкнутом графике ([3]), а затем Птак ([5]) охватил оба свойства единой теоремой, являющейся по сути теоремой о замкнутом графике для многозначных линейных отображений B-полных пространств. Птак пользовался методами теории двойственности локально выпуклых пространств. Но Дж. Келли ([6]) показал, что B-полнота локально выпуклого пространства равносильна некоторому свойству ослабленной полноты пространства его замкнутых подмножеств, наделенного «равномерностью Хаусдорфа», и, пользуясь этим, получил значительную часть результатов Птака и Робертсонов без помощи теории двойственности. Это позволило, путем небольшой модификации рассуждений Келли, распространить теорию B-полноты и на не локально выпуклые топологические линейные пространства ([7]).

Целью настоящей заметки является перенесение теории B-полноты на равномерные пространства.

1. Пусть E и F — непустые множества. *Многозначным отображением* (в дальнейшем чаще просто *отображением*) из E в F называется отображение f, относящее каждому элементу $x \in E$ множество $fx \subset F$. *Областью определения* f называется множество D_f тех $x \in E$, образ которых fx не пуст. f называется *однозначным*, если fx одноточечно для каждого $x \in D_f$. f называется *отображением* E в F (а не «из E в F»), если $D_f = E$.

Пусть f — отображение из E в F. Отображение f^{-1} из F в E, *обратное* к f, определяется условием, что отношения $x \in f^{-1}y$ и $y \in fx$ равносильны. *Графиком* f называется множество $\{(x, y) \in E \times F: y \in fx\}$. Под $\tilde{f}$ понимается $f \times f$, т. е. отображение из $E \times E$ в $F \times F$ по формуле

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \{(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2: y_1 \in fx_1, y_2 \in fx_2\}.$$

$R \subset E \times E$ (равно как и отображение из E в E с графиком R) называется *частичной эквивалентностью*, если $R^2 = R^{-1} = R$ или, что равносильно этому, $R^{-1}R = R$.

2. Равномерное пространство, получающееся при наделении множества E равномерностью u (которую мы будем отождествлять с совокупностью ее окружений), обозначается (E, u); (E, u) не предполагается отделимым.

Будем говорить, что отображение f из равномерного пространства (E, u) в равномерное пространство (F, v) *равномерно непрерывно*, если для каждого $V \in v$ найдется такое $U \in u$, что $Ux \subset f^{-1}Vy$ для всех $y \in F$ и всех $x \in f^{-1}y$; *равномерно почти непрерывно*, если для каждого $V \in v$ найдется такое $U \in u$, что $Ux \subset \overline{f^{-1}Vy}$ для всех $y \in F$ и всех $x \in f^{-1}y$ (где черта означает замыкание); *равномерно открыто*, если f^{-1} равномерно непрерывно; *равномерно почти открыто*, если f^{-1} равномерно почти непрерывно; *равномерно* гомоморфно, если f равномерно непрерывно и равномерно открыто, имеет замкнутый график, если график f замкнут в равномерном пространстве $(E, u) \times (F, v)$.

3. Пусть f — отображение из равномерного пространства (E, u) в множество F. Будем говорить, что f регулярно, если $\tilde{f}(u)$ является равномерностью в $f(E)$, а f — равномерно открытым отображением из (E, u) на $(f(E), \tilde{f}(u))$. Будем говорить, что отображение f из (E, u) в (F, v) бирегулярно, если f — регулярное отображение из (E, u) в F, а f^{-1} — из (F, v) в E.

Примеры. а) Взаимно-однозначное отображение из (E, u) в F (соответственно из (E, u) в (F, v)) регулярно (соответственно бирегулярно). б) Отображение, обратное к однозначному отображению из F в (E, u), регулярно. в) Однозначное равномерно гомоморфное отображение из (E, u) в (F, v) бирегулярно. г) Проектирования произведения равномерных пространств на эти пространства бирегулярны. д) Алгебраический гомоморфизм из топологической группы G в группу H (соответственно в топологическую группу H) регулярен (соответственно бирегулярен). е) Каноническое отображение топологической группы G, наделенной правой равномерностью, на однородное пространство G/H левых смежных классов по подгруппе H бирегулярно.

Теорема 1. *Если f — регулярное отображение с замкнутым графиком из (E, u) в (F, v), то образы fx_1, fx_2 точек $x_1, x_2 \in E$, как и прообразы $f^{-1}y_1$, $f^{-1}y_2$ точек $y_1, y_2 \in F$, либо совпадают, либо не пересекаются.*

4. Пусть (E, u) — равномерное пространство. Обозначим через $\mathscr{E}_u$ равномерное пространство, элементами которого служат всевозможные непустые подмножества произведения $E \times E$, а равномерность задается базисом окружений $\{(M, N)\colon M \subset UN,\ N \subset UM\}$, где U пробегает u.

B-сетью для (E, u) будем называть сеть (обобщенную последовательность) $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в $\mathscr{E}_u$, удовлетворяющую следующим условиям: 1) $\{W_\alpha\}$ — фундаментальная система симметричных окружений некоторой равномерности в каком-либо множестве $E_0 \subset E$; 2) частичная эквивалентность $R = \bigcap\limits_{\alpha \in A} W_\alpha$ регулярна; 3) $\bigcap\limits_{\alpha \in A,\, U \in u} UW_\alpha = R$; 4) $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — сеть Коши в $\mathscr{E}_u$ (т. е. для каждого $U \in u$ существует $\alpha_U \in A$ такое, что $W_{\alpha'} \subset UW_\alpha$ для всех $\alpha, \alpha' \geqslant \alpha_U$).

(E, u) будем называть B-полным, если каждая B-сеть $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ в $\mathscr{E}_u$ сходится (тогда она сходится к R, т. е. для каждого $U \in u$ существует $\alpha_U \in A$ такое, что $W_\alpha \subset UR$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_U$).

Теорема 2. *Следующие утверждения о равномерном пространстве (E, u) равносильны:*

1) *(E, u) B-полно;*

2) *каждое равномерно почти непрерывное бирегулярное отображение с замкнутым графиком любого равномерного пространства (F, v) в (E, u) равномерно непрерывно;*

3) *каждое равномерно почти открытое бирегулярное отображение с замкнутым графиком из (E, u) на любое равномерное пространство (F, v) равномерно открыто;*

4) *каждое однозначное равномерно почти открытое регулярное отображение с замкнутым графиком из (E, u) на любое равномерное пространство (F, v) равномерно открыто.*

5. B'-сетью для (E, u) будем называть всякую B-сеть, у которой $E_0 = E$. Пространство (E, u) будем называть B'-полным, если каждая B'-сеть в $\mathscr{E}_u$ сходится. Очевидно, каждое B-полное пространство B'-полно.

Теорема 2'. *Следующие утверждения о равномерном пространстве (E, u) равносильны:*

1') *(E, u) B'-полно;*

2') *каждое равномерно почти непрерывное бирегулярное отображение* *с замкнутым графиком любого равномерного пространства* (F, v) *на* (E, u) *равномерно непрерывно*;

3′) *каждое равномерно почти открытое бирегулярное отображение с замкнутым графиком пространства* (E, u) *на любое равномерное пространство* (F, v) *равномерно открыто*;

4′) *каждое однозначное равномерно почти открытое регулярное отображение с замкнутым графиком пространства* (E, u) *на любое равномерное пространство* (F, v) *равномерно открыто*;

5′) *каждое однозначное равномерно почти непрерывное регулярное отображение с замкнутым графиком любого равномерного пространства* (F, v) *на фактор-пространство* $(E/R, u/R)$ *пространства* (E, u) *по регулярной эквивалентности* R *равномерно непрерывно.*

6. Пусть $\mathfrak{p}(E)$ — множество всех непустых подмножеств равномерного пространства (E, u). Равномерностью Хаусдорфа в $\mathfrak{p}(E)$ называется равномерность $\mathfrak{p}(u)$, задаваемая базисом окружений

$$\{(A, B)\colon A \subset U(B), B \subset U(A)\},$$

где U пробегает u. (E, u) называется ультраполным, если $(\mathfrak{p}(E), \mathfrak{p}(u))$ полно.

(E, u) *ультраполно тогда и только тогда, когда* $\mathscr{E}_u$ *полно.* Тем самым всякое *ультраполное пространство B-полно*, и, значит, обладает «свойствами замкнутого графика» теорем 2—2′.

Теорема 3. *Фактор-пространство* $(E/R, u/R)$ *ультраполного* (*соответственно B-полного, B′-полного*) *пространства* (E, u) *по регулярной эквивалентности* R *ультраполно* (*соответственно B-полно, B′-полно*).

Как известно, полные метризуемые равномерные пространства ультраполны. Другим примером ультраполных пространств могут служить равномерно локально бикомпактные пространства. Необходимые и достаточные условия ультраполноты равномерного пространства были недавно найдены Исбеллом ([8]).

Поступило
11 I 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Птак, Чехослов. матем. журн., 3(78), 301 (1953). [2] V. Pták, Bull. Soc. math. France, 86, 41 (1958); Сборн. пер. Математика, 4, 6 (1960). [3] С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948. [4] A. Robertson, W. Robertson, Proc. Glasgow Math. Assoc., 3, 9 (1956); Сборн. пе . Математика, 4, 6 (1960). [5] V. Pták, Чехословацк. матем. журн., 9, 523 (84) (1959); Сборн. пер. Математика, 4, 6 (1960). [6] J. L. Kelley Michigan Math. J., 5, 235 (1958); Сборн. пер. Математика, 4, 6 (1960). [7] Д. А. Райков, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда (в печати). [8] J. R. Isbell, Pacific J. Math., 12, 1 (1962).