Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. M. Babich, B. A. Samokish, D. B. Dement'ev, Diffraction of a plane wave by a narrow cone, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1995, Volume 221, 67–74

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.88
January 22, 2025, 15:24:21

В. М. Бабич, Б. А. Самокиш, Д. Б. Дементьев

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА УЗКОМ КОНУСЕ

Посвящается юбилею Нины Николаевны Уральцевой

§ 1. Исходные формулы

Эта работа посвящена расчету в первом приближении сферической волны G_{diff}, возникающей как результат рассеяния падающей волны вершиной конуса. Пусть волновой процесс описывается классическим уравнением Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{1}$$

Мы рассмотрим задачу падения плоской волны

$$u^{\text{inc}} = e^{-ik(\omega_0, x)}, \ \omega_0 = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}), \ x = (x_1, x_2, x_3), \ (\omega_0, x) = \omega_{0j} x_j \tag{2}$$

на произвольный конус Ξ (см рис 1). Падающая волна распространяется в направлении $-\omega_0$. На поверхности $\partial\Xi$ конуса пусть

$$u\big|_{\partial\Xi} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial m}\bigg|_{\partial\Xi} = 0 \tag{3}$$

($\frac{\partial}{\partial m}$ – дифференцирование по направлению внешней нормали к конусу Ξ). Мы предполагаем, что

$$u = u^{\text{inc}} + u^s, \tag{4}$$

где u^s – волна, рассеянная конусом – удовлетворяет условиям излучения и в окрестности вершины конуса C – условию Мейкскера. В результате диффракционного процесса в частности возникает волна G_{diff} со сферическим фронтом, центр которого совпадает с вершиной конуса. Хорошо известна формула для G_{diff}:

$$G_{\text{diff}} = 2\pi \frac{e^{ikr}}{kr} \big(f(\omega, \omega_0) + O((kr)^{-1}) \big), \tag{5}$$

Эта работа создавалась при финансовой поддержке гранта РФФИ 93-011-16-96.

здесь r – расстояние от C до точки наблюдения $M(x_1, x_2, x_3)$, ω – единичный вектор, направленный так же, как и вектор $\vec{CM}$:

$$\vec{CM} = \omega \left|\vec{CM}\right| = \omega r. \tag{6}$$

Функция $f(\omega, \omega_0)$, иногда называемая диаграммой рассеянной волны, определяет G_{diff} в первом приближении. Для нее В. П. Смышляевем была выведена формула лежащая в основе наших построений. Эту формулу мы приведем не для самого общего случая. Нам потребуются некоторые построения. Поместим начало координат в вершину C конуса Ξ. Построим S^2 – единичную сферу с центром в точке C. Пусть $N \subset S^2$ – область, получающаяся, если из S^2 удалить все точки принадлежащие Ξ.

Назовем *оазисом Смышляева* те точки $\omega \in S^2$ для которых выполнено неравенство:

$$\min_{s \in \partial N} (\operatorname{dist}(\omega_0, s) + \operatorname{dist}(s, \omega)) > \pi. \tag{7}$$

Здесь $\operatorname{dist}(a, b)$ – расстояние между точками $a, b \in S^2$ вдоль сферы S^2, ω, ω_0 – единичные вектора, фигурирующие в формулах (2), (5), (6).

В том случае, когда направление наблюдения принадлежит оазису Смышляева, имеет место формула Смышляева для $f(\omega, \omega_0)$:

$$f(\omega, \omega_0) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{\tau\pi}\, g_r(\omega, \omega_0, \tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Здесь g_r определяется следующим образом. Пусть Δ_s – оператор Лапласа на сфере S^2, в сферических координатах θ, ϕ имеющий вид:

$$\Delta_s = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Пусть теперь $g(\omega, \omega_0, \tau)$ – функция Грина для оператора $(\Delta_s - \tau^2 - 1/4)$ в области N, т.е. решение задачи

$$(\Delta_s - \tau^2 - 1/4) g(\omega, \omega_0, \tau) = \delta(\omega - \omega_0), \tag{9}$$

$$g\big|_{\omega \in \partial N} = 0 \quad \text{или} \quad \partial_n g\big|_{\omega \in \partial N} = 0, \tag{10}$$

*Наши обозначения, как правило, согласуются с обозначениями работы [3].

все дифференцирования проводятся по координатам точки ω, ∂_n – производная по нормали к ∂N. Направление n лежит в касательной плоскости к S^2. Функция Грина g разбивается на сумму

$$g = g_0(\omega,\omega_0,\tau)+g_r(\omega,\omega_0,\tau) == -\frac{1}{4\cosh\tau\pi}P_{i\tau-\frac{1}{2}}(-\cos\tilde{\theta})+g_r(\omega,\omega_0,\tau). \tag{11}$$

Здесь g_0 функция Грина для всей сферы (когда $N = S^2$, $\partial N = \emptyset$), $P_{i\tau-1/2}$ – функция Лежандра, $\tilde{\theta} = \operatorname{dist}(\omega,\omega_0)$, g_r – так называемая отраженная часть функции Грина.

§ 2. Случай узкого конуса

Пусть $\sigma = S^2 \setminus \bar{N}$. Конус будем называть узким, если диаметр области σ мал, т.е.

$$\sup_{a,b\in\sigma} \operatorname{dist}(a,b) << 1. \tag{12}$$

Используя методику А. М. Ильина [4] в предположении (12) можно вывести приближенные выражения для g_r как в случае задачи Дирихле (Д), так и в случае задачи Неймана (Н). Идея соответствующих построений состоит в том, что для нахождения g_r надо для области $N = S^2 \setminus \bar{\sigma}$ решить задачу (Д) или (Н). Область σ "мала", т.е. g_r есть решение задачи (Д) или (Н) для области с малым отверстием. Для "умеренных" τ методика А. М. Ильина для нахождения g_r применима, для $|\tau| >> 1$ методика неприменима, но в этом случае $|g_r| << 1$ и достаточно безразлично, что стоит вместо g_r в формуле Смышляева (8), лишь бы подынтегральное выражение было экспоненциально мало при $\tau \to +\infty$. Формулы, получающиеся для g_r, имеют разный вид в случае разных краевых условий. Наши формулы – это результат подстановки вместо g_r главного члена асимптотики этой функции, полученной по методике А. М. Ильина при $\operatorname{diam}\sigma \to 0$. Используя технику Мелера-Фелсена [5] соответствующие интегралы можно взять явно. В случае (Д) интеграл явно вычислить не удается. Результаты вычислений таковы:

1. Случай Дирихле:

$$f(\omega,\omega_0) \cong -2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\tau\pi}\, g_0(\omega,O)\, g_0(O,\omega_0)\,\tau}{W_\kappa + \ln 2 - C - \operatorname{Re}\Psi(-\frac{1}{2}+i\tau)}\, d\tau. \tag{13}$$

Здесь необходимы некоторые разъяснения. Прежде всего $O \in \sigma$ – произвольная точка области σ, и $g_0(\omega,O)$ (соответственно

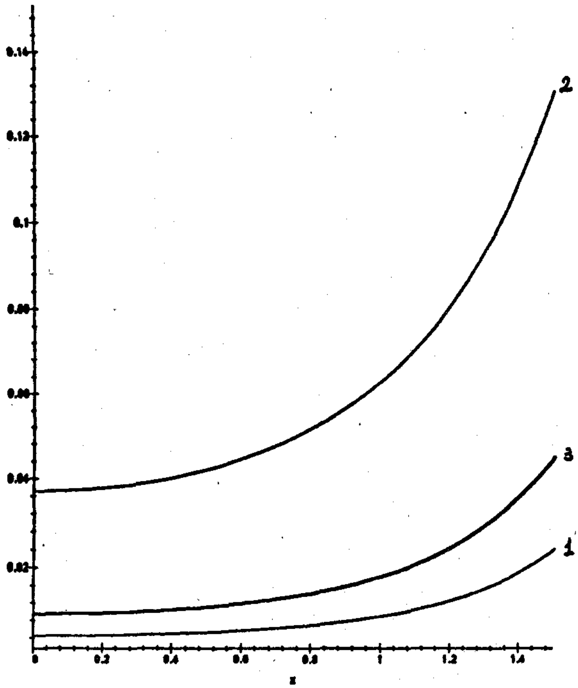

Рисунок 1.

$g_0(O,\omega_0))$ – функция Грина всей сферы S^2 для оператора $\Delta-(\tau^2+1/4)$ для пары точек (ω, O) (соответственно (O,ω_0)), Ψ – логарифмическая производная гамма функции: $\Psi(\xi)=\Gamma'(\xi)/\Gamma(\xi)$, C – постоянная Эйлера. Перейдем к определению W_κ. Проведем в точке O плоскость R^2 касательную к S^2 и спроектируем σ на R^2. Результат этого проектирования обозначим через κ. Число W_κ – это винеровская мера области $R^2\backslash\bar\kappa$. Винеровская мера W_κ определяется следующим образом: найдем в $R^2\backslash\bar\kappa$ гармоническую функцию u, удовлетворяющую условиям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u=0 \quad x_1,x_2\in R^2\backslash\bar\kappa, \tag{14}$$

$$u=\ln R+O(1), \qquad R=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to+\infty, \tag{15}$$

$$u\big|_{\partial\kappa}=0, \tag{16}$$

тогда при $R\to+\infty$

$$u=\ln R+W_\kappa+O\big(R^{-1}\big). \tag{17}$$

Равенства (14)–(17) определяют W_κ.

Знаменатель подынтегрального выражения в (13) при малом $\operatorname{diam}\sigma$ имеет два нуля на оси $-\infty < \tau < +\infty$. Интеграл (13) следует понимать как главное значение (V.p.) по Коши. Нули имеют столь большой модуль, что подынтегральное выражение там экспоненциально мало.

2. Случай Неймана:

Здесь формула для $f(\omega, \omega_0)$ явная:

$$f(\omega,\omega_0) \cong -\frac{i}{4\pi^2}\operatorname{mes}\kappa\,\frac{1+\cos\theta\,\cos\theta'}{(\cos\theta+\cos\theta')^3} - \frac{i}{2\pi}\,d_{ij}(\kappa)\,l_i\,l'_j\,\frac{\sin\theta\,\sin\theta'}{(\cos\theta+\cos\theta')^3}, \tag{18}$$

где $\theta = \operatorname{dist}(\omega_0, O)$, $\theta' = \operatorname{dist}(\omega, O)$, $\operatorname{mes}\kappa$ – оплощадь области κ. Здесь следует определить d_{ij} и l_i. Тензор $d_{ij}(\kappa)$ $(i,j = 1,2)$ – важная глобльная храктеристика области κ (см [6]). Чтобы определить ее – решим внешнюю задачу Неймана для области κ:

$$\Delta V_j = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)V_j = 0 \quad (x_1, x_2) \in R^2\backslash\bar{\kappa} \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial V_j}{\partial n}\right|_{\partial\kappa} = -\left.\frac{\partial x_j}{\partial n}\right|_{\partial\kappa}, \tag{20}$$

$$V_j \to 0 \quad \text{при} \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to +\infty. \tag{21}$$

Решение V_j задачи Неймана (18)–(21) существует и единственно. При $R \to +\infty$ асимптотика V_j имеет вид:

$$V_j \sim d_{jh}\,\frac{\partial \ln R}{\partial x_h} + O(R^{-2}). \tag{22}$$

Известно, что матрица $d = (d_{ij})$ является тензором (имеются в виду только переносы и повороты осей координат). Матрица d симметрична и положительно определенна. Коэффициенты d_{ij} и входят в формулу (18).

Перейдем к определению l_j (соотв. l'_j) $(j = 1,2)$. Проведем отрезок $O\omega$ большого круга соединяющий точку O с ω. Предполагается, что $O\omega$ (соотв. $O\omega_0$) – наикратчайшая кривая, соединяющая эти две точки. Выберем на $O\omega$ (соотв. $O\omega_0$) направление от O к ω (соотв. от O к ω_0) и пусть $l(s)$ – единичный касательный вектор к $O\omega$ (соотв. $O\omega_0$) в произвольной точке s, направленный вдоль того направления, которое выбрано на дуге $O\omega$ (соотв. $O\omega_0$). Тогда

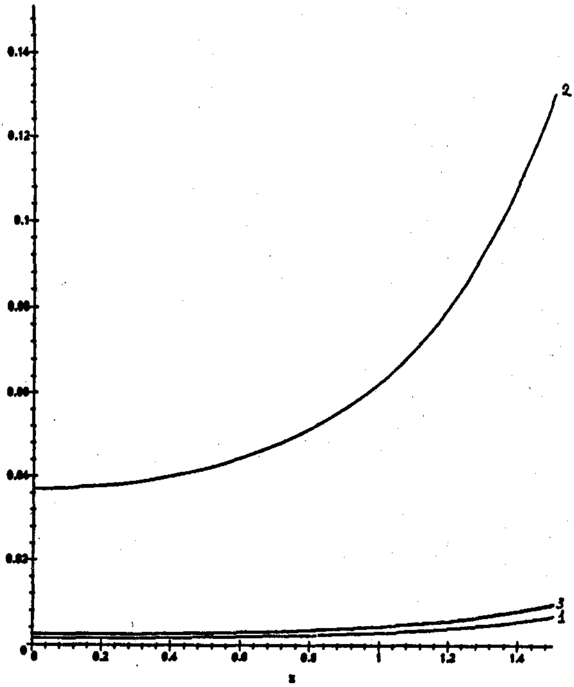

Рисунок 2.

вектор $l = (l_1, l_2) = l(s)|_{s=O}$ (соотв. $l' = (l'_1, l'_2) = l'(s)|_{s=O}$) лежит в плоскости R^2. Компоненты l_j и l'_j и фигурируют в формуле (18).

Формула (18) в том случае, когда конус Ξ круговой, переходит в известную формулу Л. Б. Фелсена [1, 2]. Это не так для формулы (13). Для случая кругового конуса формула (13) является уточнением формулы Фелсена. Формулы (13) и (18) выведены для того случая, когда ω принадлежит оазису Смышляева.

§ 3. Результаты вычислений

Имея приблеженную формулу естественно задаться вопросом, когда ее на самом деле можно применять. Теоретические оценки обычно, за редким исключением, нереалистичны – они дают слишком узкие рамки применимости формулы. Численные оценки дают более хорошую ориентировку в этом вопросе. Далее приводятся результаты вычислений, иллюстрирующие применимость наших формул.

В случае осесимметрического падения волны на прямой круго-

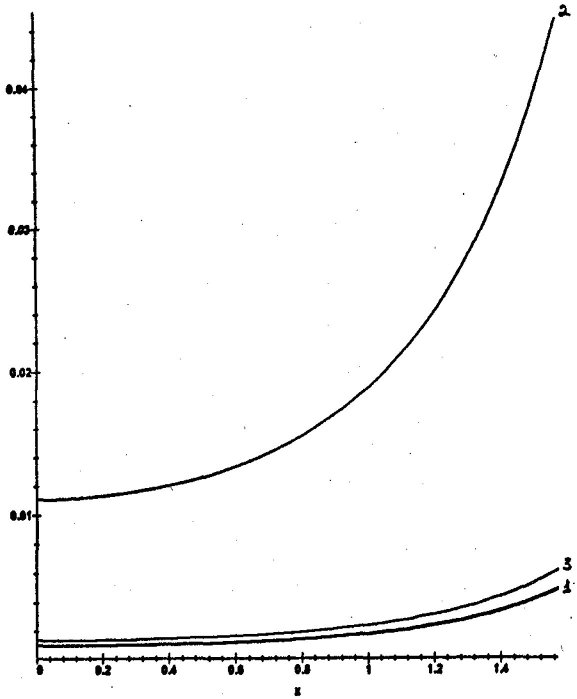

Рисунок 3.

вой конус известна точная формула для функции $f(\omega, 0)$:

$$f(\omega,0)=\frac{i}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau\, e^{\tau\pi}\,\frac{1}{\cosh\tau\pi}\,\frac{P_{i\tau-1/2}(-\cos\theta_1)}{P_{i\tau-1/2}(\cos\theta_1)}P_{i\tau-1/2}(\cos\theta)\,d\tau,$$

где θ – это угол точки наблюдения в сферических координатах, а θ_1 – угол раствора конуса. Поэтому в данном случае мы имеем возможность сравнить результаты вычислений по формуле Фелсена и полученные с помощью нашего метода с точным значением. Эти результаты приведены на графиках на рисунках 1–3. На них представлены результаты вычислений функции $\operatorname{Im} f(\omega, 0)$ при угле наблюдения меняющимся от 0 до $\frac{3}{2}$ (т.е. почти до $\frac{\pi}{2}$). Линия под номером один на этих графиках – это точное решение, 2 – решение Фелсена, 3 – полученное нашим методом. Рисунок 1 соответствует углу раствора конуса $\theta_1 = 0.2$, на Рисунке 2 $\theta_1 = 0.05$, на Рисунке 3 $\theta_1 = 0.01$.

Литература

1. L. B. Felsen, *Back scattering from wide-angle and narrow-angle cones.* — J. Appl. Phys. **26.2** (1955).
2. L. B. Felsen, *Plane-wave scattering by small-angle cones.* — IRE Trans AP 5 (1957).
3. V. P. Smyshlyaev, *Diffraction by conical surfaces at high frequencies.* — Wave Motion **12** (1990).
4. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* М. Наука, 1989.
5. L. B. Felsen, *Some definite integrals involving conical functions.* — Journal of Mathematics and Physics **35** (1956).
6. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике.* М. Наука, 1989.

Babich V. M., Samokish B. A., Demen'tev D. B. Diffraction of a plane wave by a narrow cone.

The problem of diffraction of a plane scalar wave by a narrow cone is considered. The shape of the cone is arbitrary. The boundary condition is Dirichlet or Neumann one. The wave scattered by the cone vertex arises as a result of the diffraction process. The subject of the paper is the calculation of the wave amplitude. If the cone is narrow it is possible to obtain more simple approximate formulae in comparison with Smyshlayev's one. The exactness of the approximate formulae was checked numerically. The etalon was the solution in explicit form in axially symmetrical case. The calculation showed that our formula is more exact in the case of Dirichlet boundary condition then Felsen's formula. The approximate formula is a generalisation of Felsen's one for circular cone to an arbitrary narrow cone in the case of Neumann boundary condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 января 1995 г.

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

С.-Петербургский государственный
университет