В. Ю. Королев, И. Г. Шевцова, С. Я. Шоргин, О неравенствах типа Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, *Информ. и её примен.*, 2011, том 5, выпуск 3, 64–66

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БЕРРИ–ЭССЕЕНА ДЛЯ ПУАССОНОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ СУММ*

В. Ю. Королев[1], И. Г. Шевцова[2], С. Я. Шоргин[3]

Аннотация: Для равномерного расстояния между функциями распределения $\Phi(x)$ стандартной нормальной случайной величины и $F_\lambda(x)$ пуассоновской случайной суммы независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ с конечным третьим абсолютным моментом, где $\lambda > 0$ — параметр пуассоновского индекса, доказано неравенство

$$\sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant 0{,}4532 \frac{\mathsf{E}|X_1 - \mathsf{E}X_1|^3}{(\mathsf{D}X_1)^{3/2}\sqrt{\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

типа оценки Берри–Эссеена, использующее центральные моменты, в отличие от ранее известных аналогичных неравенств, использующих начальные моменты.

Ключевые слова: пуассоновская случайная сумма; центральная предельная теорема; оценка скорости сходимости; неравенство Берри–Эссеена; абсолютная константа

1 Введение

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (с. в.) с $\mathsf{E}|X_1|^3 < \infty$. Пусть N_λ — с. в., имеющая пуассоновское распределение с параметром $\lambda > 0$. Предположим, что при каждом $\lambda > 0$ с. в. N_λ, X_1, X_2 независимы. Случайная величина

$$S_\lambda = X_1 + \ldots + X_{N_\lambda}$$

называется пуассоновской случайной суммой (для определенности полагаем $S_\lambda = 0$, если $N_\lambda = 0$). Пуассоновские случайные суммы S_λ являются весьма популярными математическими моделями многих реальных объектов. В частности, в страховой математике величина S_λ описывает суммарное страховое требование в классическом процессе риска в «динамическом» случае. Многие примеры прикладных задач из самых разнообразных областей, в которых используются пуассоновские случайные суммы, приведены, скажем, в книгах [1, 2].

Как известно, при указанных выше условиях на моменты слагаемых распределения пуассоновских случайных сумм S_λ асимптотически нормальны, что обусловливает большую важность задачи изучения точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм.

Функцию распределения (ф. р.) стандартизованной пуассоновской случайной суммы

$$\widetilde{S}_\lambda = \frac{S_\lambda - \mathsf{E}S_\lambda}{\sqrt{\mathsf{D}S_\lambda}} = \frac{S_\lambda - \lambda\mathsf{E}X_1}{\sqrt{\lambda\mathsf{E}X_1^2}}$$

обозначим $F_\lambda(x)$. Также введем обозначения:

$$L_0 = L_0(X_1) = \frac{\mathsf{E}|X_1 - \mathsf{E}X_1|^3}{(\mathsf{D}X_1^2)^{3/2}};$$

$$L_1 = L_1(X_1) = \frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{(\mathsf{E}X_1^2)^{3/2}}.$$

Величины L_0 и L_1 называются соответственно центральной и нецентральной ляпуновскими дробями. Пусть $\Phi(x)$ — ф. р. стандартного нормального закона.

Как известно, изначально оценки точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм доказывались в терминах центральных ляпуновских дробей L_0 по аналогии с оценками для сумм неслучайного числа независимых с. в. Результаты такого типа можно найти, например, в [3]. Однако, как было показано

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 11-01-00515а, 11-07-00112а и 11-01-12026-офи-м), Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» и грантом Президента РФ МК–581.2010.1.

[1]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, vkorolev@cs.msu.su

[2]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Институт проблем информатики Российской академии наук, ishevtsova@cs.msu.su

[3]Институт проблем информатики Российской академии наук, sshorgin@ipiran.ru

позднее, при изучении нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм более естественно использовать нецентральные ляпуновские дроби L_1.

В частности, в работе [4] показано, что если для абсолютной константы C в классическом неравенстве Берри–Эссеена известна оценка $C \leqslant M$, то та же самая оценка справедлива для абсолютной константы C_1 в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, использующем нецентральную ляпуновскую дробь:

$$\Delta_\lambda \equiv \sup_x |F_\lambda(x) - \Phi(x)| \leqslant C_1 \frac{L_1(X_1)}{\sqrt{\lambda}}\,, \quad \lambda > 0\,, \quad (1)$$

при этом $C_1 \leqslant M$. Тот же результат был независимо получен в работе [5], но с более точной оценкой M. В 2010 г. в работе [6] было показано, что привязка константы C_1 к классическому неравенству Берри–Эссеена на самом деле менее жесткая, и было впервые продемонстрировано, что верхняя оценка константы C_1 меньше теоретически наименьшего возможного значения $(\sqrt{10}+3)/(6\sqrt{2\pi}) = 0{,}4097\ldots$ абсолютной константы C в классическом неравенстве Берри–Эссеена. Позднее с помощью модификации метода, использованного в [6], авторы указанной статьи показали, что $C_1 \leqslant 0{,}3041$ [7, 8].

Необходимо отметить, что, несмотря на то что верхние оценки константы C_1 в (1) изучаются уже более 30 лет (см. исторические обзоры в [7, 8]), нижние оценки для C_1 получены лишь недавно в работе [9], где, в частности, было показано, что $C_1 \geqslant 0{,}2344$.

В 1996 г. в работе [10] было показано, что для любой с. в. X с $\mathsf{E}|X|^3 < \infty$ имеет место соотношение:

$$\frac{L_1(X)}{L_0(X)} \leqslant 2\sqrt{2} < 2{,}8285\,,$$

откуда с учетом результатов [7, 8] вытекает, что для абсолютной константы C_0 в аналоге неравенства Берри–Эссеена для пуассоновских случайных сумм, использующем *центральные* ляпуновские дроби,

$$\Delta_\lambda \leqslant C_0 \frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}}\,, \quad \lambda > 0\,, \qquad (2)$$

справедлива оценка $C_0 \leqslant 0{,}3041 \cdot 2\sqrt{2} < 0{,}8602$.

Более того, в 2001 г. в работе [11] было высказано предположение, что

$$\sup_X \frac{L_1(X)}{L_0(X)} = \frac{\sqrt{17+7\sqrt{7}}}{4} = 1{,}48997\ldots < 1{,}49\,,$$

где супремум берется по всем распределениям с. в. X с $\mathsf{E}|X|^3 < \infty$, и было описано гипотетическое экстремальное распределение с. в. X.

В данной работе будет показано, что $L_1(X)/L_0(X) \leqslant 1{,}49$ для любой с. в. X с $\mathsf{E}|X|^3 < \infty$, откуда вытекает, что

$$C_0 < 0{,}3041 \cdot 1{,}49 < 0{,}4532\,,$$

что строго меньше наилучшей известной верхней оценки $C \leqslant 0{,}4784$ абсолютной константы в классическом неравенстве Берри–Эссеена (см. [7, 8]).

2 Основные результаты

Теорема 1. *Для любой с. в. X с $\mathsf{E}|X|^3 < \infty$ справедливо неравенство*

$$L_1(X) \leqslant 1{,}49 L_0(X)\,.$$

Доказательство. Обозначим

$$J(X) = \frac{L_1(X)}{L_0(X)}\,.$$

Тогда утверждение теоремы эквивалентно тому, что $\sup\limits_X J(X) \leqslant 1{,}49$, где супремум берется по всем с. в. X с $\mathsf{E}|X|^3 < \infty$. Если $\mathsf{E}X = 0$, то, очевидно, $L_0(X) = L_1(X)$ и утверждение теоремы верно. Пусть теперь $\mathsf{E}X \neq 0$. С учетом инвариантности ляпуновских дробей $L_0(X)$ и $L_1(X)$ относительно преобразований масштаба имеем

$$\sup_X J(X) = \sup_{a\neq 0} \sup_{X:\, \mathsf{E}X=a} J(X) = \sup_{X:\, \mathsf{E}X=1} J(X) =$$
$$= \sup_{X:\, \mathsf{E}X=0} \frac{L_1(X+1)}{L_0(X)} =$$
$$= \sup_{b>0} \sup_{X:\, \mathsf{E}X=0,\, \mathsf{E}X^2=b^2} \frac{\mathsf{E}|X+1|^3}{(1+b^{-2})^{3/2}\mathsf{E}|X|^3}\,.$$

Таким образом, утверждение теоремы эквивалентно тому, что

$$\sup_{b>0} \sup_{X:\, \mathsf{E}X=0,\, \mathsf{E}X^2=b^2} J_b(X) \leqslant 0\,,$$

где

$$J_b(X) = \mathsf{E}|X+1|^3 - 1{,}49(1+b^{-2})^{3/2}\mathsf{E}|X|^3\,.$$

Из результатов работ [12–14] вытекает, что экстремум функционала моментного типа, линейного по функции распределения случайной величины X, при двух линейных ограничениях $\mathsf{E}X = 0$ и $\mathsf{E}X^2 = b^2$ моментного типа достигается на некотором трехточечном распределении. Пусть

$$\mathsf{P}(X = x) = p\,;$$
$$\mathsf{P}(X = y) = q\,;$$
$$\mathsf{P}(X = z) = 1 - p - q\,,$$

где $p, q \geqslant 0$, $p + q \leqslant 1$, $x \leqslant y \leqslant z$. Вычисляем

$$\mathsf{E}X = p(x-z) + q(z-y) + z\,;$$

$$\mathsf{E}X^2 = p(x^2 - z^2) + q(y^2 - z^2) + z^2 \equiv \equiv g_1(x,y,z,p,q)\,;$$

$$\mathsf{E}|X|^3 = p(|x|^3 - |z|^3) + q(|y|^3 - |z|^3) + |z|^3 \equiv \equiv g_2(x,y,z,p,q)\,;$$

$$\mathsf{D}X = p(1-p)(z-x)^2 + q(1-q)(z-y)^2 - - 2pq(z-x)(z-y) \equiv g_3(x,y,z,p,q)\,;$$

$$\mathsf{E}|X - \mathsf{E}X|^3 = -p(q(z-y) - (1-p)(z-x))^3 + + q|p(z-x) - (1-q)(z-y)|^3 + + (1-p-q)(p(z-x) - q(z-y))^3 \equiv \equiv g_4(x,y,z,p,q)\,;$$

$$J(X) = \frac{g_2(x,y,z,p,q)}{g_4(x,y,z,p,q)} \left(\frac{g_3(x,y,z,p,q)}{g_1(x,y,z,p,q)}\right)^{3/2} \equiv \equiv g(x,y,z,p,q)\,,$$

причем в силу инвариантности $J(X)$ относительного масштабного преобразования X без ограничения общности можно считать, что $-1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$. Таким образом,

$$\sup_X J(X) = \sup\,\{g(x,y,z,p,q)\colon p,q \geqslant 0\,, p+q \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1\}\,.$$

Численная оптимизация непрерывной функции $g(x,y,z,p,q)$ пяти аргументов показывает, что ее максимальное значение на описанном компакте не превосходит 1,49, что и доказывает теорему. □

Теормема 2. *При условиях, сформулированных выше, для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство*

$$\Delta_\lambda \leqslant 0{,}4532\frac{L_0}{\sqrt{\lambda}}\,. \tag{3}$$

Доказательство. Учитывая результат работы [8] и теорему 1, получаем

$$\Delta_\lambda \leqslant 0{,}3041\frac{L_1(X_1)}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \leqslant 0{,}3041 \sup_X \frac{L_1(X)}{L_0(X)}\,\frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}} \leqslant \leqslant 0{,}3041 \cdot 1{,}49\frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}} < 0{,}4532\frac{L_0(X_1)}{\sqrt{\lambda}}\,.$$

Литература

1. *Gnedenko B. V., Korolev V. Yu.* Random summation: Limit theorems and applications. — Boca Raton: CRC Press, 1996.
2. *Bening V., Korolev V.* Generalized Poisson models and their applications in insurance and finance. — Utrecht: VSP, 2002.
3. *Круглов В. М., Королев В. Ю.* Предельные теоремы для случайных сумм. — М.: МГУ, 1990.
4. *Michel R.* On Berry–Esseen results for the compound Poisson distribution // Insurance: Mathematics and Economics, 1993. Vol. 13. No. 1. P. 35–37.
5. *Korolev V. Yu., Shorgin S. Ya.* On the absolute constant in the remainder term estimate in the central limit theorem for Poisson random sums // Probabilistic Methods in Discrete Mathematics: 4th Petrozavodsk Conference (International) Proceedings. — Utrecht: VSP, 1997. P. 305–308.
6. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри–Эссеена для смешанных пуассоновских случайных сумм // Докл. РАН, 2010. Т. 431. Вып. 1 С. 16–19.
7. *Королев В. Ю., Шевцова И. Г.* Уточнение неравенства Берри–Эссеена с приложениями к пуассоновским и смешанным пуассоновским случайным суммам // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2010. Т. 17. Вып. 1. С. 25–56.
8. *Korolev V., Shevtsova I.* An impovement of the Berry–Esseen inequality with applications to Poisson and mixed Poisson random sums // Scandinavian Actuarial J. Online first: http://www.informaworld.com/10.1080/03461238.2010.485370. June 04, 2010.
9. *Нефедова Ю. С., Шевцова И. Г.* О точности нормальной аппроксимации для распределений пуассоновских случайных сумм // Информатика и её применения, 2010. Т. 5. Вып. 1. С. 39–45.
10. *Шоргин С. Я.* О точности нормальной аппроксимации для распределений случайных сумм с безгранично делимыми индексами // Теория вероятностей и ее применения, 1996. Т. 41. Вып. 4. С. 920–926.
11. *Shorgin S. Ya.* Approximation of generalized Poisson distributions: Comparison of Lyapunov fractions // 21st Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (January 28 – February 3, 2001, Eger, Hungary): Abstracts. — Publishing House of University of Debrecen, 2001. P. 166–167.
12. *Hoeffding W.* The extrema of the expected value of a function of independent random variables // Ann. Math. Statist., 1948. Vol. 19. P. 239–325.
13. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. — М.: Наука, 1986.
14. *Тюрин И. С.* О скорости сходимости в теореме Ляпунова // Теория вероятностей и ее применения, 2010. Т. 55. Вып. 2. С. 250–270.