A. R. Minabutdinov, A higher-order asymptotic expansion of the Krawtchouk polynomials, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2015, Volume 436, 174–188

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 436, 2015 г.

**А. Р. Минабутдинов**

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛИНОМОВ КРАВЧУКА

## §1. Введение

Пусть заданы числа $p$, $0 < p < 1$, $q = 1-p$, а также натуральное число $N$. Ненормированные полиномы Кравчука дискретной переменной $x$ могут быть определены с помощью следующего равенства:

$$K_n(x,p,N) = {}_2F_1\left[\begin{matrix}-x, \ -n \\ -N\end{matrix}; \frac{1}{p}\right], \tag{1}$$

где $x$ и $n$ – целые числа, принадлежащие множеству $\{0, 1, \dots N\}$, а ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Классические (нормированные) полиномы Кравчука могут быть определены следующим равенством:

$$k_n^{(p)}(x,N) = (-p)^n \binom{N}{n} K_n(x,p,N). \tag{2}$$

Ниже, где это возможно, мы используем сокращенное обозначение, опуская второй аргумент $N$, и пишем $k_n^{(p)}(x)$ вместо $k_n^{(p)}(x,N)$. Полиномы Кравчука находят широкое применение в теории вероятностей, стохастических процессах, теории массового обслуживания, теории кодирования и криптографии, см., например, работу [2]. Они образуют ортогональную систему функций, заданных на множестве $\{0, 1, 2, \dots, N\}$, с весовой функцией

$$\rho(x) = \frac{N!\, p^x q^{N-x}}{\Gamma(1+x)\Gamma(N+1-x)}$$

и соотношением ортогональности

$$\sum_{x=0}^{N} k_i^{(p)}(x) k_j^{(p)}(x) \rho(x) = \binom{N}{j} (pq)^j \delta_{ij}, \quad i,j = 0, 1 \dots, N.$$

---

*Ключевые слова*: полиномы Кравчука, асимптотические разложения.
Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00373.

Данные полиномы удовлетворяют следующей формуле Родрига (см., например, [5, гл. 2, (22a)]):

$$k_n^{(p)}(x) = \frac{(-q)^n}{n!} \frac{\Delta^n\bigl(\rho(x)x^{\underline{n}}\bigr)}{\rho(x)}, \tag{3}$$

где $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ и $y^{\underline{k}} = y(y-1)\dots(y-k+1)$. Данная формула может быть взята за определение полиномов Кравчука, см., например, статью [8]. Важно отметить, что выражение (3) позволяет рассматривать полиномы Кравчука как аналитические функции на интервале $[0,N]$.

Наконец, отметим, что в работе [4] было показано, что полиномы $(-2p)^n K_n(k,p,N)$ задают эргодические суммы вдоль башен $\tau_{N,k}$ автоморфизма Паскаля для функции[1] $w_t^p$, где $n$ равно сумме цифр в двоичной записи натурального числа $t$.

Хорошо известно (см. работу [3]), что в пределе (при подходящей нормировке) полиномы Кравчука сходятся к полиномам Эрмита:

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{2}{Npq}\right)^{n/2} n!\, k_n^{(p)}(\widehat{x}) = H_n(x), \tag{4}$$

где $\widehat{x} = Np + (2Npq)^{1/2}x$ и $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$.

Данный результат был усилен Шарапудиновым в работе [8], в которой он получил следующую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned}(2Npq\pi n!)^{1/2}(Npq)^{-n/2}\rho(\widehat{x})e^{x^2/2}k_n^{(p)}(\widehat{x}) \\ = e^{-x^2/2}(2^n n!)^{-1/2}H_n(x) + O(n^{7/4}N^{-1/2}),\end{aligned} \tag{5}$$

где $\widehat{x} = Np + (2Npq)^{1/2}x,\ n = O(N^{1/3}),\ x = O(n^{1/2})$.

Пусть $A > 0$. Задачей данной работы является поиск равномерного по $v \in [-A\sqrt{N}, A\sqrt{N}]$ асимптотического разложения полиномов Кравчука вида

$$k_n^{(p)}(\widehat{x}) = \sum_{j=0}^{M} c_{j+1}(v) N^{[n/2]-j} + o(N^{[n/2]-M}), \tag{6}$$

[1]Функции $\{w_t^q\}_{t\geqslant 0}$ являются результатом применения алгоритма ортогонализации Грама–Шмидта к классическим функциям Уолша–Пэли $\{w_t\}_{t\geqslant 0}$ для метрики, задаваемой $(p,q)$-мерой Бернулли.

где $\widehat{x} = Np + v,\ n = O(1),\ M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $[t]$ обозначает целую часть неотрицательного числа $t$. Главным результатом работы является теорема 2, в которой получено равномерное асимптотическое разложение функции $\rho(\widehat{x})k_n^{(p)}(\widehat{x})$ в терминах полиномов Эрмита. Наш подход основывается на результате Петрова ( [6]), уточняющем локальную предельную теорему.

В особенности нас интересует явное выражение для наименьшей по номеру $j$ непостоянной по аргументу $v$ функции $c_j(v)$ из разложения (6), в связи с изучением эргодических сумм автоморфизма Паскаля в работе [4]. Оказывается, что значение $j$ зависит от четности индекса $n$ полинома Кравчука. В следствии 1 при дополнительном предположении $v = o(N^{1/3})$ получены явные формулы для функций $c_1(v)$ и $c_2(v)$ для, соответственно, четных и нечетных значений $n$.

Отметим, наконец, что исследованию асимптотик полиномов Кравчука посвящен ряд недавних работ, см., например, работу [1] и ссылки в ней. В работе [1] авторы рассматривали в том числе случай $x = O(1)$ при $N \to \infty$. Однако они исключали ситуацию, при которой $n \approx Np$. Отметим, что из свойства самодвойственности полиномов Кравчука $K_x(n,p,N) = K_n(x,p,N)$ вытекает, что главный член асимптотики в этом случае можно получить уже из соотношения (4).

Автор выражает глубокую благодарность А. М. Вершику и А. А. Лодкину за внимание к работе и полезные обсуждения.

## §2. Основной результат

Используя тождество $\Delta^s x^{\underline{n}} = n^s x^{\underline{n-s}}$, формулу Родрига (3) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}\rho(x)k_n^{(p)}(x) &= \frac{(-q)^n}{n!}\Delta^n\big[\rho(x)x^{\underline{n}}\big]\\ &= \frac{(-q)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\rho(x)\,\Delta^k(x+n-k)^{\underline{n}}\\ &= \frac{(-q)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^{\underline{k}}\,(x+n-k)^{\overline{(n-k)}}\Delta^{n-k}\rho(x).\end{aligned}\tag{7}$$

Далее мы рассматриваем функции $\Delta^s\rho(x),\ s \geqslant 0$, из тождества (7) по отдельности. Пусть $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$, $\Delta_h^n f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{n-1} f(x))$, $n \geqslant 2$. Следуя работе [8], мы полагаем $h$ равным $\frac{1}{\sqrt{2Npq}}$, что позволяет записать[2]

$$\Delta^s \rho(\widehat{x}) = \Delta_h^s\, \rho(\widehat{x}(x)), \tag{8}$$

где $\widehat{x} = Np + (2Npq)^{1/2}x$. Фактически, асимптотика (4), как и (5), может быть получена[3] из тождества (7) с помощью локальной предельной теоремы, примененной к функции $\rho(\widehat{x})$, и варианта теоремы о среднем $\Delta_h^n f(x) = h^n \frac{d^n}{dx^n} f(x + nh\theta)$, $\theta \in (0,1)$, дополненных подходящей оценкой остатка (см. подробности в [8]). Чтобы получить аппроксимацию более высокого порядка, мы рассматриваем функцию $\rho(x)$ как вероятность $x$ успехов в последовательности из $N$ независимых испытаний Бернулли с вероятностями исходов $p$ и $q$ и используем теорему 13 из §3 работы [6] для распределения Бернулли.[4]

**Теорема 1.** *Пусть $M$ – целое неотрицательное число и $\sigma^2 = pq$. Тогда*

$$\sqrt{N}\rho(\widehat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2} \sum_{\nu=0}^{M} \frac{\widetilde{q}_\nu(x)}{N^{\nu/2}} + o\Big(\frac{1}{N^{M/2}}\Big) \tag{9}$$

*равномерно по $x$, таким, что $Np + (2Npq)^{1/2}x \in \mathbb{Z}$. Здесь $\widehat{t} = Np + (2Npq)^{1/2}t$, а функции $\widetilde{q}_\nu$ определены следующим образом:*

$$\widetilde{q}_\nu(x) = \sum \frac{1}{2^{(\nu/2+s)}} H_{\nu+2s}(x) \prod_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \Big(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}}\Big)^{k_m}, \tag{10}$$

*где $\gamma_i$, $i \geqslant 0$, – кумулянты $(p,q)$-распределения Бернулли, суммирование в правой части ведется по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \dots, k_\nu)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + \nu k_\nu = \nu$, а $s = k_1 + k_2 + \dots + k_\nu$.*

---

[2]Здесь $\Delta$ – оператор разности по переменной $\widehat{x}$, а $\Delta_h$ – оператор разности с шагом $h$ по переменной $x$.

[3]Другой подход основывается на сходимости разностного уравнения с полиномиальными решениями, определяющими полиномы Кравчука, к дифференциальному уравнению, задающему полиномы Эрмита; подробности см., например, в [5]. Также этот результат можно получить, пользуясь сходимостью производящих функций, см. [7].

[4]В книге [6] использовано несколько отличное определение полиномов Эрмита: $\mathrm{He}_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$. Эти полиномы связаны с $H_n(x)$ следующим соотношением: $\mathrm{He}_n(x) = 2^{-n/2} H_n\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)$.

Чтобы получить аппроксимации оператора $\Delta_h^s$, мы используем формальное представление $\Delta_h = e^{hD} - 1$, где $D = \frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования. Это позволяет записать

$$\Delta_h^s = (e^{hD} - 1)^s = \sum_{i=s}^{\infty} a_{s,i-s+1} (hD)^i. \tag{11}$$

Для произвольного неотрицательного $K$ и всякой вещественнозначной аналитической функции $f$ мы можем рассмотреть начальный отрезок ряда, равномерно оценив остаток:

$$\Delta_h^s f(x) = \sum_{i=0}^{K} a_{s,i}\, D^{s+i} f(x) h^{s+i} + o(h^{K+s}). \tag{12}$$

Коэффициенты $a_{s,j}$ могут быть определены с помощью мультиномиальной теоремы следующим образом:

$$a_{s,j} = \sum s! \prod_{r=1}^{j+1} \frac{1}{k_r!} \Big(\frac{1}{r!}\Big)^{k_r}, \tag{13}$$

где $s$ и $j$ – неотрицательные целые числа, суммирование в правой части формулы (13) производится по всем неотрицательным решениям $(k_1, k_2, \dots, k_j)$ уравнения $k_1 + 2k_2 + \dots + jk_j = j$, а $s = k_1 + k_2 + \dots + k_j$. В частности, мы получаем, что

$$a_{s,0} = 1, \quad a_{s,1} = \frac{s}{2}, \quad a_{s,2} = \frac{s(3s+1)}{24} \quad \text{и т.д.} \tag{14}$$

Теорема 1 и формула (12) показывают, что, для того чтобы получить асимптотическое разложение разности $\Delta_h^s \rho(\widehat{x})$, необходимо получить асимптотическое разложение для производных

$$\frac{d^r}{dx^r}\big(e^{-x^2} \widetilde{q}_\nu(x)\big), \quad \nu \geqslant 0, \quad r > 0.$$

Обозначим через $b_{\nu,s}$ коэффицинты $\frac{1}{2^{(\nu/2+s)}} \prod\limits_{m=1}^{\nu} \frac{1}{k_m!} \Big(\frac{\gamma_{m+2}}{(m+2)!\sigma^{m+2}}\Big)^{k_m}$, возникающие в правой части формулы (10). Таким образом, мы можем записать $\widetilde{q}_\nu(x) = \sum b_{\nu,s} H_{\nu+2s}(x)$. Обозначим через $\widetilde{g}_{\nu,r}(x)$ следующее выражение: $e^{x^2} \frac{d^r}{dx^r} e^{-x^2} \widetilde{q}_\nu(x)$. Для функции $e^{x^2} \frac{d^s}{dx^s}\big(e^{-x^2} H_n(x)\big)$ выполнено тождество

$$e^{x^2} \frac{d^s}{dx^s}\big(e^{-x^2} H_n(x)\big) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^s}{dx^s}\Big(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\Big) = (-1)^s H_{n+s}(x), \tag{15}$$

из которого следует, что

$$\widetilde{g}_{\nu,r}(x) = e^{x^2}\frac{d^r}{dx^r}e^{-x^2}\widetilde{q}_\nu(x) = \sum(-1)^r b_{\nu,s}H_{\nu+2s+r}(x),$$

где пределы суммирования в правой части – те же, что и в формуле (10). Пусть $A > 0$, а $r$ – целое неотрицательное число. Возможность дифференцировать[5] асимптотическое разложение (9) с сохранением равномерной на интервале $x \in [-A, A]$ оценки остатка является ключевым фактом для данной работы[6]:

$$\frac{d^r}{dx^r}\sqrt{N}\rho(\widehat{x}(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^{M}\frac{\widetilde{g}_{\nu,r}(x)}{N^{\nu/2}} + o\Big(\frac{1}{N^{M/2}}\Big); \qquad (16)$$

доказательство этого соотношения приведено в §3.

Отметим, что интересно сравнить наш результат (16) с теоремой 7 главы 6 работы [6], где аналогичный результат получен для достаточно гладких функций распределения.

**Замечание 1.** Так как параметр $M$ в теореме 1 и формуле (16) можно взять произвольным положительным, мы можем записать остаточный член как $O\Big(\frac{1}{N^{(M+1)/2}}\Big)$ вместо $o\Big(\frac{1}{N^{M/2}}\Big)$.

Используя разложения (16) и (12) и учитывая, что[7] $h \sim N^{-1/2}$, получаем следующее асимптотическое разложение для $\Delta^s\rho(\widehat{x})$:

$$\begin{aligned}\Delta_h^s\,\rho(\widehat{x}(x)) &= \sum_{i=0}^{K}a_{s,i}\frac{d^{s+i}}{dx^{s+i}}\rho(\widehat{x})h^{s+i} + o(N^{-(K+s)/2})\\ &= \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N}\sigma}\Bigg(\sum_{i=0}^{K}a_{s,i}\sum_{\nu=0}^{M}\frac{\widetilde{g}_{\nu,r}(x)}{N^{\nu/2}}h^{s+i} + o(N^{-(K+s-1)/2})\Bigg),\end{aligned} \qquad (17)$$

где $K = M + 1$, $x = O(1)$ и $\widehat{x}(x) = Np + (2Npq)^{1/2}x$. Слагаемые в правой части (с точностью до множителя $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N}\sigma}$) представляют собой линейную комбинацию полиномов Эрмита, но правую часть можно записать и через функции параболического цилиндра $D_n(x)$, используя их соотношение с полиномами Эрмита: $D_n(x) = 2^{-n/2}e^{-x^2/4}H_n(\frac{x}{\sqrt{2}})$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

[5] Для $s = 0$ мы используем соглашение $\frac{d^s}{dx^s}f(x) \equiv f(x)$.

[6] Отметим, что теорема 1 утверждает это только при $r = 0$ и значениях $x$ из дискретного множества.

[7] Через $\sim$ мы обозначаем пропорциональность.

Обозначим через $\psi_s^K(x)$ сумму $\sum\limits_{i=0}^{K} a_{s,i} \sum\limits_{\nu=0}^{K-i-1} \frac{\widetilde{g}_{\nu,s+i}(x)}{N^{\nu/2}} h^{s+i}$, где коэффициенты $a_{s,j}$ при $j,s \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ определены посредством формулы (13).

Используя разложение (7) вместе с (17), мы приходим к главному результату данной работы.

**Теорема 2.** *Пусть $A$ – положительное вещественное число, $M$ и $n$ – целые неотрицательные числа, и пусть $k_1 = \max(n-M,0)$. Предположим, что $\widehat{x} - Np = (2Npq)^{1/2}x$. Тогда равномерно по $x \in [-A,A]$ справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\rho(\widehat{x})k_n^{(p)}(\widehat{x}) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \frac{(-q)^n}{n!} \sum_{k=k_1}^{n} \binom{n}{k} n^{\underline{k}} (\widehat{x}+n-k)^{\underline{(n-k)}} \psi_{n-k}^M(x) + o(N^{\frac{n-M}{2}}). \tag{18}$$

**Доказательство.** Так как $h = \frac{1}{\sqrt{2pq}} N^{-1/2}$, мы получаем, что

$$\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \psi_s^M(x) = O(N^{-(s+1)/2})$$

и $(\widehat{x}+s)^{\underline{s}} = O(N^s)$, откуда $(\widehat{x}+s)^{\underline{s}} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \psi_s^M(x) = O(N^{(s-1)/2})$.

Формула (18) получается напрямую из формулы Родрига (7) заменой $\Delta_h^s \rho(\widehat{x}(x))$ на соответствующие приближения $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}} \psi_s^M(x)$, полученные в формуле (17). $\square$

В частном случае $M = 0$ теорема 2 дает хорошо известную формулу

$$k_n^{(p)}(\widehat{x}) = \Big(\frac{Npq}{2}\Big)^{n/2} \frac{H_n(x)}{n!} + o(N^{\frac{n}{2}}),$$

уже приведенную выше в формуле (4) (мы использовали здесь разложение $\rho(\widehat{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma}} e^{-x^2} + o(1)$ из теоремы 1).

В общем случае выражение (18) позволяет получить выражение вида[8] (6). Его правая часть с точностью до множителя $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{2\pi N\sigma}}$ содержит лишь целые степени переменных $N$ и $v = x\sqrt{2Npq}$, но не $\sqrt{N} \sim h^{-1}$. Чтобы показать это, заметим, что в зависимости от четности числа $n$ полиномы Эрмита $H_n$ содержат либо только четные, либо только

[8]Конечно, имеет смысл брать $M \leqslant n$.

нечетные степени переменной $x$, при этом выражение (10) не изменяет четности индексов полиномов Эрмита, в то время как выражение (15) означает, что (12) также сохраняет четность.

Для случая $M = 2$ и $v = \widehat{x} - Np = o(N^{1/3})$ мы можем получить явное, не использующее полиномы Эрмита выражение вместо выражения (18) из теоремы 2. Для этого воспользуемся тем, что полиномы Эрмита могут быть представлены следующим образом (см., например, [5]):

$$H_{2l}(x) = (-1)^l 2^l (2l-1)!!\big(1 + \sum_{j=1}^{l} \frac{4^j (-l)^{\overline{j}}}{(2j)!} x^{2j}\big),$$

$$H_{2l+1}(x) = (-1)^l 2^{l+1} (2l+1)!!\big(x + \sum_{j=1}^{l} \frac{4^j (-l)^{\overline{j}}}{(2j+1)!} x^{2j+1}\big),$$

где $l$ – неотрицательное целое число. Если предположить, что $x \to 0$, то мы приходим к следующим асимптотическим соотношениям:

$$\begin{aligned} H_{2l}(x) &= (-1)^l 2^l (2l-1)!!\big(1 - 2lx^2\big) + o(x^2), \quad l = 1, 2 \ldots, \\ H_{2l+1}(x) &= (-1)^l 2^{l+1} (2l+1)!! x + o(x^2), \quad l = 0, 1, \ldots. \end{aligned} \tag{19}$$

Пусть $l, m$ и $C$ – целые неотрицательные числа. Для падающей степени $(m + C)^{\underline{l}}$ справедливы следующие разложения при $m \to \infty$:

$$(m + C)^{\underline{l}} = m^l + (lC - \frac{l(l-1)}{2}) m^{l-1} + O(m^{l-2}). \tag{20}$$

**Следствие 1.** *Пусть $x = Np + v$. Для всякой последовательности $\varepsilon(N)$, такой, что $\lim\limits_{N\to\infty} \varepsilon(N) = 0$, равномерно по $v$, удовлетворяющим условию $|v| \leqslant \varepsilon(N) N^{1/3}$, справедливы следующие разложения:*

$$k_{2l}^{(p)}(Np + v) = (-1)^l \frac{(2l-1)!!\big(pqN\big)^l}{(2l)!} \left(1 - \frac{9v^2 + t_1 v + t_2}{9pqN} l\right) + o(N^{l-1}),$$

*где $t_1 = 6(p - \frac{1}{2})(4l - 1)$ и $t_2 = (l-1)\big(1 + 4l + (16l - 5)pq\big)$, а $l \in \mathbb{N}$;*

$$k_{2l+1}^{(p)}(Np + v) = (-1)^l \frac{(2l-1)!!\big(pqN\big)^l}{(2l)!} \frac{4l(p - \frac{1}{2}) + 3v}{3} + o(N^l),$$

*где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

**Доказательство.** Обозначим через $\psi(x)$ функцию $\frac{\sqrt{2\pi N}\sigma}{e^{-x^2}}$. Пусть $k$ – целое неотрицательное целое. Применяя теорему 1 для $K = 2$ и используя выражение (15), мы получаем

$$\psi(x)\frac{d^k}{dx^k}\rho(\widehat{x}) = (-1)^k\Big(H_k(x) + \frac{\gamma_3}{2^{3/2}\sigma^3}\frac{H_{3+k}(x)}{3!\sqrt{N}} + \frac{\frac{\gamma_4}{\sigma^4}H_{4+k}(x) + \frac{1}{3!}\big(\frac{\gamma_3}{\sigma^3}\big)^2 H_{6+k}(x)}{4\cdot 4!N}\Big) + o\Big(\frac{1}{N}\Big),$$

где $\gamma_3 = pq(1-2p)$ и $\gamma_4 = -pq(6pq-1)$. При дополнительном предположении[9] $v := \widehat{x} - Np = o(N^{1/3})$ мы получаем упрощенное выражение:

$$\psi(x)\rho\Big(\frac{v}{\sqrt{2N}\sigma}\Big) = 1 - \frac{1 - pq - 6v(p-q)}{12pqN} + o\Big(\frac{1}{N}\Big). \tag{21}$$

Аналогично для производных, имеющих нечетный порядок, получим соотношение

$$\psi(x)\frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}\rho(\widehat{x}) = (2l-1)!!(-2)^l\Big(1 + \frac{36lv^2 + \tau_1 v + \tau_2}{36pqN}\Big) + o(\frac{1}{N}),$$

где $\tau_1 = 6(1-2p)(2l+3)(2l+1)$, $\tau_2 = (2l+1)(2l+3)(1+l-(1+4l)pq)$, а для производных четного порядка –

$$\psi(x)\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}\rho(\widehat{x}) = (-1)^{l+1}(2l+1)!!2^l\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Npq}}(v + \frac{(1-2p)(2l+3)}{6}) + o(\frac{1}{N}),$$

где $l \in \mathbb{N}$. Используя выражения (19) и (20) и отбрасывая члены порядка меньше $[\frac{n-1}{2}]$, мы получаем из разложения (18) требуемое выражение. □

При необходимости, если взять разложения более высокого порядка в формулах (19) и (20), а также $M \geqslant 3$, можно получить выражения для $c_j$, $j \geqslant 1$, из разложения (6).

В заключение мы приводим некоторую модификацию следствия 1 для функции $K_n(x, p, N_1)$, где $N_1 = N - i$, $v = x - Np = o(N^{1/3})$, $i = O(1)$.

**Следствие 2.** *Пусть $x = Np + v$. Для всякой последовательности $\varepsilon(N)$, такой, что $\lim\limits_{N\to\infty}\varepsilon(N) = 0$, равномерно по $v$, удовлетворяющим*

---

[9] В чуть более слабом преположении $v = O(N^{1/3})$ необходимо добавить дополнительное слагаемое $\frac{1}{6}\frac{v^3(q-p)}{(pq)^2N^2}$ в правой части формулы (21).

*условию* $|v| \leqslant \varepsilon(N)N^{1/3}$, *справедливы следующие разложения:*

$$K_{2l}(x,p,N-i) = \Big(-\frac{q}{p}\Big)^l \frac{(2l-1)!!}{N^l}\bigg(1-\frac{9(v+ip)^2+\widetilde{t}_1(v+ip)+\widetilde{t}_2}{9pqN}l\bigg)+o\big(N^{-l-1}\big),$$

*где* $\widetilde{t}_1 = 6(p-\frac{1}{2})(4l-1)$ *и* $\widetilde{t}_2 = (l-1)\big(1+4l+(16l-5)pq\big)-9pq(i+2l-1)$, *а* $l \in \mathbb{N}$*;*

$$K_{2l+1}(x,p,N-i) = \Big(-\frac{q}{p}\Big)^l \frac{(2l+1)(2l-1)!!}{N^{l+1}} \cdot \frac{4l(p-\frac{1}{2})+3(v+ip)}{3p}+o(N^{-l-1}),$$

*где* $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

**Доказательство.** Представим функцию $K_n(x,p,N_1)$ в виде

$$K_n(x,p,N_1) = K_n(Np+v,p,N_1) = K_n(N_1p+v_1,p,N_1) = (-p)^n\binom{N_1}{n}\, k_n^{(p)}(N_1p+v_1,N_1),$$

где $v_1 = v+ip$. Используя (20) и выражение $(N-i)^{-l} = (N)^{-l} + il\,(N)^{-l-1}+O(N^{-l-2})$, мы легко получаем требуемое асимптотическое разложение напрямую из следствия 1. $\square$

Равномерные разложения из следствий 1 и 2 получены в предположении $|v| \leqslant \varepsilon(N)N^{1/3}$. Но мы можем использовать эти же разложения при $|v| \leqslant \varepsilon(N)N^{1/2}$, $\varepsilon(N) \to 0$. В этом случае, если $N^{1/3} = O(v)$, оценки остатков в этих формулах необходимо умножить на $\sqrt{N}$.

## §3. Асимптотическое разложение производной

В данном параграфе будет доказана формула (16). Пусть функция $S_N^M(\xi)$ такова, что

$$\sqrt{N}\rho(\widehat{\xi}) = e^{S_N^M(\xi)}\phi^M(\xi),$$

где $\phi^M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\xi^2}\sum\limits_{\nu=0}^{M}\frac{\widetilde{q}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}}$ и полиномы $\widetilde{q}_\nu$ определены в теореме 1, а также, как и выше, $\widehat{s} = Np+\sqrt{2Npq}s$. Обозначим через $\phi_s^M(\xi)$

производную $\frac{d^s}{d\xi^s}\phi^M(\xi) = (-1)^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\xi^2} \sum\limits_{\nu=0}^{M} \frac{\widetilde{q}_{\nu+s}(\xi)}{N^{\nu/2}}$. Используя интегральную формулу Коши, мы получаем

$$\begin{aligned}
\sqrt{N}\frac{d^s}{dx^s}\rho(\widehat{x}(x)) &= \frac{\sqrt{N}s!}{2\pi i}\int\limits_{C_x}\frac{\rho(\widehat{\xi})d\xi}{(x-\xi)^{s+1}} \\
&= \frac{s!}{2\pi i}\Bigl[\int\limits_{C_x}\frac{\phi^M(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{s+1}} + \int\limits_{C_x}\frac{\bigl(\sqrt{N}\rho(\widehat{\xi})-\phi^M(\xi)\bigr)d\xi}{(x-\xi)^{s+1}}\Bigr] \\
&= \phi_s^M(x) + \frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_x}\frac{\phi^M(\xi)\bigl(e^{S_N^M(\xi)}-1\bigr)d\xi}{(x-\xi)^{s+1}},
\end{aligned}$$

где $C_x$ – замкнутый контур, охватывающий точку $x$. В дальнейшем мы полагаем, что контур $C_x$ является единичной окружностью с центром в точке $x$:

$$C_x = \{\xi \mid \xi = x + e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

**Лемма 1.** *Пусть $M$ – целое неотрицательное, а $A$ – положительное вещественное число. Тогда для $x \in [-A, A]$ и $\xi \in C_x$ справедлива равномерная оценка*

$$\bigl|e^{S_N^M(\xi)} - 1\bigr| = o(N^{-M/2}).$$

**Доказательство.** Формула Стирлинга для гамма-функции Эйлера (см., например, [9, с. 34, пример 1.2] или [10, с. 83]) может быть записана следующим образом:

$$\ln\Gamma(z) = \bigl(z - \frac{1}{2}\bigr)\ln(z) - z + \frac{\ln(2\pi)}{2} + F_m(z) + O(|z|^{-2m-1}), \qquad (22)$$

где $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \varepsilon < \pi$, $F_m(z) = \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)z^{2k-1}}$, а $B_k$, $k \geqslant 1$, – числа Бернулли. С помощью данного выражения в работе [8] (см. формулу (17)) было показано, что

$$\ln\rho(z) = -\frac{N}{2pq}\bigl(\frac{z}{N} - p\bigr)^2 - \frac{1}{2}\ln(2\pi Npq) + S_N^0\Bigl(\frac{z - Np}{\sqrt{2Npq}}\Bigr),\ z \to \infty,$$

причем для всякого целого $m \geqslant 0$ выполнено[10] соотношение $S_N^0(\xi) = \Phi_m(\xi) + O(N^{-2m-1})$, а функции $\Phi_m(\xi)$ определены равенством

$$\Phi_m(\xi) = F_m(N) - F_m(\widehat{\xi}) - F_m(N-\widehat{\xi}) - Nr\Big(\frac{\widehat{\xi}}{N}\Big) - \frac{1}{2}D\Big(\frac{\widehat{\xi}}{N}\Big),$$

где $r(\tau) = \tau \ln \frac{\tau}{p} + (1-\tau)\ln\frac{1-\tau}{q} - \frac{1}{2pq}(\tau-p)^2$, $D(\tau) = \ln(1+\frac{(p-\tau)(\tau-q)}{pq})$. Функции $\Phi_m(\xi)$ аналитичны в объединении $\bigcup_x B_x$ единичных шаров $B_x$, ограниченных окружностями $C_x$, $x \in [-A, A]$. Для функции $S_N^0(\xi)$ в работе [8] (см. формулу (27)) показано, что $|S_N^0(\xi)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}}$ для $\xi \in C_x$ и $x \in [-A, A]$. Поскольку из теоремы 1 известно, что для всякой точки $x$, такой, что $\widehat{x} = Np + (\sqrt{2Npqx}) \in \mathbb{Z}$, выполнено соотношение

$$\big|e^{S_N^0(x)} - \sum_{\nu=0}^{M}\frac{\widetilde{q}_\nu(x)}{N^{\nu/2}}\big| = o(N^{-M/2}),$$

достаточно показать, что

$$\big|e^{\Phi_m(\xi)} - \sum_{\nu=0}^{M}\frac{\widetilde{p}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}}\big| = o(N^{-M/2})$$

для некоторых $m = m(M)$, $\xi \in C_x$, $x \in [-A, A]$ и *некоторых* полиномов $\{\widetilde{p}_\nu(\xi)\}_{\nu=0}^M$. Если это проверено, то, выбирая $N$ достаточно большим, мы видим, что $\widetilde{p}_\nu(\xi) = \widetilde{q}_\nu(\xi), 0 \leqslant \nu \leqslant M$, для всех $\xi$ в силу совпадения значений полиномов по крайней мере в $[\sqrt{N}]$ точках. Анализируя функции $F_m(\widehat{\xi}), r(\frac{\widehat{\xi}}{N}), D(\frac{\widehat{\xi}}{N})$ как функции от $\frac{1}{\sqrt{N}}$ при заданном параметре $x$, мы видим, что для каждой из этих функций можно записать ряд Тейлора[11] при $\frac{1}{\sqrt{N}} \to 0$ вида $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{c_j}{(\sqrt{N})^j}\xi^{j+h}$ для некоторого целого $h$. Так как $x \in [-A, A]$, мы можем оборвать каждый из рядов, записав $\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{c_j}{(\sqrt{N})^j}x^{j+h} + f(N)$, где $|f(N)| \leqslant \frac{C}{N^m}$ равномерно по $\xi \in \bigcup_x B_x$. Достаточно положить $m$ равным $2M$. Аналогичным образом, обрывая ряды Тейлора для функций $e^{\Phi_m(\xi)}$, мы получаем, что $|e^{\Phi_m(\xi)} - \sum\limits_{\nu=0}^{m}\frac{\widetilde{p}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}}| = o(\frac{1}{N^{-M/2}})$ для $p_0(\xi) \equiv 1$ и некоторых полиномов $p_\nu(\xi)$, где $\xi \in C_x$ и $x \in [-A, A]$.

[10] Это, конечно же, следует из свойств остатка в формуле Стирлинга (22); подробнее см., например, в [10].

[11] Начальные члены ряда представлены в замечании 2 ниже.

В силу того, что $S_N^M(\xi)$ равно $S_N^0(\xi)-\Phi_m(\xi)+o(N^{-m})$, мы получаем, что $|S_N^M(\xi)|\leqslant o(N^{-M/2})$, и, используя теорему Лагранжа, заключаем, что $\left|e^{S_N^M(\xi)}-1\right|=o(N^{-M/2})$ для $\xi\in C_x$ и $x\in[-A,A]$. □

**Замечание 2.** Оценку $|e^{\Phi^M(\xi)}-\sum\limits_{\nu=0}^{M}\frac{\widetilde{q}_\nu(\xi)}{N^{\nu/2}}|=o(N^{-M/2})$ для малых значений $M$ можно получить, не используя теорему 1, а напрямую анализируя функцию $S_N^0$. Например, мы можем получить следующие асимптотические разложения при $N\to\infty$:

$$r\Big(\frac{\widehat{x}}{N}\Big)=-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{(2\,p-1)}{\sqrt{(1-p)\,p}}\frac{x^3}{N^{3/2}}+O\left(N^{-2}\right),$$
$$D\Big(\frac{\widehat{x}}{N}\Big)=\frac{\sqrt{2}\,(2p-1)}{\sqrt{(1-p)\,p}}\frac{x}{N^{1/2}}+O\left(N^{-1}\right).$$

Для функции $F_m$ при $m=2$ мы имеем $F_2(z)=1/\left(12z\right)$. Аналогично получаем выражения

$$F_2(\widehat{x})=\frac{1}{12Np}+O\left(N^{-3/2}\right),$$
$$F_2(N-\widehat{x})=\frac{1}{12\,(1-p)\,N}+O\left(N^{-3/2}\right),$$
$$F_2(N)=1/12\,N^{-1}+O(N^{-3/2}).$$

Мы можем записать первый член асимптотического разложения функции $e^{\Phi_M(x)}$, используя только первые члены представленных выше разложений:

$$e^{\Phi_M(x)}=\frac{(1-2p)}{2^{3/2}(pq)^{1/2}}\frac{8x^3-12x}{3!\sqrt{N}}+O\Big(\frac{1}{N}\Big)=\frac{\widetilde{q}_1(x)}{N^{1/2}}+O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Это дает прямое доказательство леммы 1 при $M=1$. Было бы интересно найти прямое и короткое доказательство леммы 1, не использующее теорему 1, при произвольных значениях параметра $M$.

**Лемма 2.** *Пусть $M$ – целое неотрицательное, а $A$ – положительное вещественное число. Тогда для $x\in[-A,A]$ и достаточно больших $N$ справедлива равномерная оценка*

$$\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{C_x}\Big|\frac{\phi^M(\xi)}{(x-\xi)^{s+1}}\Big||d\xi|=O(1).$$

**Доказательство.** Для заданного $M$, равномерно по $x \in [-A, A]$, для всех достаточно больших $N = N(A, M)$ выполнено неравенство

$$|\sum_{\nu=0}^{M} \frac{\widetilde{q}_\nu(x + e^{i\varphi})}{N^{\nu/2}}| \leqslant 2.$$

Поэтому мы можем написать следующую оценку:

$$\int_{C_x} \Big|\frac{\phi^M(\xi)}{(x-\xi)^{s+1}}\Big||d\xi| \leqslant 2\int_0^{2\pi} e^{-(x+2\cos(\varphi))^2/2} d\varphi < Ce^{-x^2/4},$$

и константа $C$ не зависит от $x$. □

Используя лемму 1 и лемму 2, мы можем оценить интеграл как

$$\Big|\frac{s!}{2\pi i}\int_{C_x} \frac{\phi^M(\xi)\big(e^{S_N^M(\xi)} - 1\big)d\xi}{(x-\xi)^{s+1}}\Big| = o(N^{-M/2})$$

для $\xi \in C_x$, $x \in [-A, A]$, что завершает доказательство.

## Литература


1. D. Dai, R. Wong, *Global asymptotics of Krawtchouk polynomials – a Riemann–Hilbert approach.* — Chin. Ann. Math. Ser. B **28**, No. 1 (2007), 1–34.
2. Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, В. А. Миронова, *Многочлены Кравчука и их применения в задачах криптографии и теории кодирования.* — Мат. вопр. криптогр. **6**, вып. 1 (2015), 33–56.
3. M. Kravchuk, *Sur une généralisation des polynomes d'Hermite.* — C. R. Math. **189** (1929), 620–622.
4. А. А. Лодкин, А. Р. Минабутдинов, *Предельные функции адического автоморфизма Паскаля*, готовится к печати.
5. А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной.* М.: Наука, 1985.
6. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* М.: Физматлит, 1972.
7. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены.* М.: Физматлит, 1962.
8. И. И. Шарапудинов, *Асимптотические свойства полиномов Кравчука.* — Мат. заметки **44**, вып. 5 (1988), 526–529.
9. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* М.: Наука, 1977.
10. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям.* М.: Наука, 1979.

Minabutdinov A. R. A higher-order asymptotic expansion of the Krawtchouk polynomials.

The paper extends the classical result on the convergence of Krawtchouk polynomials to Hermite polynomials. We provide a uniform asymptotic expansion of Krawtchouk polynomials in terms of Hermite polynomials and obtain explicit expressions for a few first terms of this expansion. The research is motivated by the study of ergodic sums of the Pascal adic transformation.

Национальный исследовательский
университет "Высшая школа экономики",
Департамент прикладной математики
и бизнес-информатики,
Кантемировская ул., д. 3А,
194100 С.-Петербург, Россия
*E-mail*: aminabutdinov@gmail.com

Поступило 21 сентября 2015 г.