V. P. Orevkov, On the continuity of constructive functionals, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 160–169

В.П.Оревков

О НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ*)

В этой заметке изучаются конструктивные функционалы на семействах конструктивных функций. Рассматриваются вопрос о непрерывности функционалов по отношению к поточечной сходимости функций и вопрос о непрерывности функционалов в топологии, отвечающей равномерной сходимости.

Все не разъясняемые специально термины и обозначения понимаются так же, как в [I],[2]. Под конструктивными функциями будут пониматься конструктивные функции, определенные на сегменте $0 \Delta 1$. В дальнейшем прилагательное "конструктивный" перед словами "функция", "функционал", "последовательность" и др. часто будет опускаться.

I. Будем говорить, что конструктивная функция f равна конструктивной функции g, если для любого дуплекса x, принадлежащего сегменту $0 \Delta 1$, дуплекс $f(x)$ равен дуплексу $g(x)$. Конструктивное семейство функций $\mathfrak{N}$ называется правильным, если, каковы бы ни были функции f и g, из того, что f принадлежит $\mathfrak{N}$ и f равна g, следует, что g принадлежит $\mathfrak{N}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ - правильное конструктивное семейство функций. Будем говорить, что алгорифм $\mathfrak{A}$ является функционалом (оператором) на $\mathfrak{M}$, если, каковы бы ни были функции f и g из $\mathfrak{M}$, выполняются следующие условия:

I) алгорифм $\mathfrak{A}$ перерабатывает запись f относительно ал-

*) Основные результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по конструктивной математике 9 апреля 1970 г.

фавита $Ч_3$ [*] в дуплекс (соответственно, в запись конструктивной функции);

2) если функция f равна функции g, то алгорифм $\mathfrak{A}$ перерабатывает слова $\varepsilon f з$ и $\varepsilon g з$ в равные дуплексы (соответственно, в записи равных функций).

Будем говорить, что конструктивная последовательность функций [**] $\mathfrak{f}$ п о т о ч е ч н о с х о д и т с я к функции f, если при каждом дуплексе x из сегмента $0 \Delta 1$ к дуплексу $f(x)$ сходится такая последовательность φ, что при всех натуральных n

$$\varphi(n) = \tilde{\mathfrak{f}}_{n\square}(x).$$

Будем говорить, что функционал (оператор) $\mathfrak{A}$ на правильном семействе $\mathfrak{M}$ П-н е п р е р ы в е н, если, каковы бы ни были функция f из $\mathfrak{M}$ и поточечно сходящаяся к f последовательность $\mathfrak{f}$ функций из $\mathfrak{M}$, к $\mathfrak{A}$-образу функции f сходится (соответственно, поточечно сходится) $\mathfrak{A}$- образ последовательности $\mathfrak{f}$.

Обозначим через $\mathcal{Y}$ подпространство, индуцированное пространством дуплексов в множестве таких дуплексов x, что

$$\neg\neg(x=0 \vee \exists n (x = 2^{-n}))$$

Посредством $\mathcal{Y}'$ обозначим подпространство, индуцированное конструктивным двухмерным евклидовым пространством в множестве таких точек $x б y$ конструктивного двухмерного евклидова пространства, что дуплекс x является точкой пространства $\mathcal{Y}$ и дуплекс принадлежит сегменту $0 \Delta 1$. Очевидно, что пространства $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}'$ являются полными сепарабельными конструктивными метрическими пространствами.

Используя полноту пространства дуплексов, легко доказать следующую лемму.

<u>Лемма I</u>. Каковы бы ни были конструктивная функция f и кон-

---

[*] См. работу [2], стр. 298. В дальнейшем запись функции f относительно алфавита $Ч_3$ будем называть записью функции f и обозначать через $\varepsilon f з$.

[**] См. [2], стр. 345.

структивная последовательность функций $\mathfrak{f}$, сходящаяся поточечно к $\mathfrak{f}$, можно построить везде определенный конструктивный оператор F из $\mathcal{Y}'$ в пространство дуплексов, такой что для любого натурального n и для любого дуплекса x из сегмента $0\Delta 1$

$$F(0\sigma x) = \mathfrak{f}(x)$$

$$F(2^{-n}\sigma x) = \tilde{\mathfrak{f}}_{n\square}(x).$$

Из леммы I вытекает следующая лемма.

Лемма 2. Каковы бы ни были функционал $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{M}$, функция $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{M}$ и последовательность $\mathfrak{f}$ функций из $\mathfrak{M}$, сходящаяся поточечно к $\mathfrak{f}$, можно построить такой везде определенный оператор G из $\mathcal{Y}$ в пространство дуплексов, что для любого натурального n

$$G(0) = \mathfrak{A}(\varepsilon\mathfrak{f}з),$$

$$G(2^{-n}) = \mathfrak{A}(\varepsilon\tilde{\mathfrak{f}}_{n\square}з).$$

Воспользовавшись леммой 2 и основной теоремой работы [2], можно получить следующую теорему

Теорема I. Каково бы ни было правильное конструктивное семейство функций $\mathfrak{M}$, любой функционал (оператор) на $\mathfrak{M}$ П-непрерывен.

2. В работе [3] (глава 7, примеры 2 и 7) построены две последовательности дифференцируемых функций, которые сходятся равномерно на $0\Delta 1$ к нулю, но последовательности производных этих функций не сходятся поточечно к нулю. Отсюда и из теоремы I вытекает результат Г.Е.Минца о невозможности алгорифма, строящего по записи дифференцируемой функции запись ее производной (см. теорему IO.3.I работы [4]).

Используя теорему I, можно также получить результат Б.А.Кушнера о невозможности алгорифма, перерабатывающего запись всякой интегрируемой по Риману функции в дуплекс, являющийся ее интегралом Римана на $0\Delta 1$. ([5], следствие I.4). Для этого достаточно построить последовательность интегрируемых по Риману функций, которая сходится поточечно к нулю, но последовательность интегралов не сходится к нулю. Подобная последовательность с помощью аппарата сингулярных покрытий (см. [6]) построена в доказательстве теоремы I.2 работы [5]. Заметим, что эта последовательность функций не будет сходится к нулю равномерно на $0\Delta 1$.

В классическом математическом анализе часто приводятся примеры последовательностей непрерывных функций, которые не сходятся к нулю равномерно на $0\Delta 1$, но о которых говорится, что они поточечно сходятся к нулю [*)]. Однако, в силу приводимой ниже теоремы 2, эти последовательности конструктивно не сходятся поточечно к нулю.

Из леммы I и основной теоремы работы 2 вытекает следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u> Для того, чтобы конструктивная последовательность функций $\mathfrak{f}$ поточечно сходилась к функции f, необходимо и достаточно, чтобы, каковы бы ни были натуральное число n и дуплекс x из $0\Delta 1$, можно было построить такое натуральное число m, что для любого натурального k и любого дуплекса y

$$(y \in 0\Delta 1 \;\&\; |x-y| < 2^{-m} \;\&\; k>m) \supset |f(y) - \mathfrak{f}_{k\square}(y)| < 2^{-n}.$$

Сформулированное в этой теореме условие поточечной сходимости последовательности функций при буквальном переносе в классический анализ эквивалентно равномерной сходимости. Поэтому и приходится для построения последовательностей, которые конструктивно сходятся поточечно, но не сходятся равномерно на $0\Delta 1$, использовать особенности конструктивного континуума, связанные с тем, что в конструктивную математику не переносится лемма Бореля о покрытиях отрезка интервалами (см. [6] и [8]).

---

*) См., например, [3], глава 7, пример 6 или [7], пункты 428 и 43I.

3. Пусть $\mathfrak{M}$ – правильное семейство функций и $\mathfrak{N}$ – его подсемейство. Подсемейство $\mathfrak{N}$ будем называть вполне перечислимым подсемейством семейства $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{N}$ является правильным семейством функций и можно построить алгорифм, который применим к записи функции из $\mathfrak{M}$, тогда и только тогда, когда эта функция принадлежит $\mathfrak{N}$. Из леммы 2 и леммы из § I главы III работы [2] вытекает следующая лемма.

<u>Лемма 3</u>. Каковы бы ни были правильное семейство функций $\mathfrak{M}$, его вполне перечислимое подсемейство $\mathfrak{N}$, функция f из $\mathfrak{N}$ и последовательность $\mathfrak{F}$ функций из $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{F}$ поточечно сходится к f, то можно построить такое натуральное число n, что функция $\mathfrak{F}_{n_0}$ принадлежит $\mathfrak{N}$.

<u>Следствие.</u> Разность правильного семейства функций и его вполне перечислимые подсемейства замкнута относительно поточечной сходимости.

Пусть f и g – конструктивные функции и n – произвольное натуральное число. Будем говорить, что функция g принадлежит сфере $C_{f,n}$, если для любого дуплекса x из $0\Delta 1$

$$|f(x)-g(x)|<2^{-n}.$$

Будем говорить, что семейство функций $\mathfrak{M}$ S-регулярно относительно функции f, если семейство $\mathfrak{M}$ правильно и можно построить алгорифм, перерабатывающий всякое натуральное число в запись функции, принадлежащей $\mathfrak{M}$ и сфере $C_{f,n}$, в том случае, когда подобную функцию нельзя не построить. Аналогично теореме I работы [9] можно доказать следующую лемму.

<u>Лемма 4.</u> Каковы бы ни были правильные семейства конструктивных функций $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ и функция f, если семейства $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ не имеют общих функций, семейство $\mathfrak{N}_1$ является вполне перечислимым подсемейством объединения семейств $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$, семейство $\mathfrak{N}_2$ S-регулярно относительно функции f и функция f принадлежит $\mathfrak{N}_1$, то можно построить такое натуральное число n, что невозможна функция, принадлежащая как семейству $\mathfrak{N}_2$, так и сфере $C_{f,n}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ - правильное семейство функций, F — функционал на $\mathfrak{M}$ и f - функция из $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что функционал F S-регулярен относительно функции f, если при всяком натуральном n S-регулярно относительно функции f семейство таких функций g из $\mathfrak{M}$, для которых

$$|F(\varepsilon f \mathfrak{z}) - F(\varepsilon g \mathfrak{z})| > 2^{-n}.$$

Покажем, что условие S-регулярности конструктивного функционала относительно заданной функции достаточно для непрерывности этого функционала в топологии, отвечающей равномерной сходимости на сегменте $0\Delta 1$. Для этого докажем следующую теорему.

<u>Теорема 3.</u> Каковы бы ни были правильное семейство функций $\mathfrak{M}$, функционал F на $\mathfrak{M}$ и функция f, принадлежащая $\mathfrak{M}$, если функционал F S-регулярен относительно функции f, то по всякому натуральному числу n можно построить такое натуральное число m, что для любой функции g, принадлежащей семейству $\mathfrak{M}$ и сфере $C_{f,m}$,

$$|F(\varepsilon f \mathfrak{z}) - F(\varepsilon g \mathfrak{z})| < 2^{-n}.$$

Доказательство этой теоремы можно получить из доказательства теоремы 3 работы [9], если использовать лемму 4 вместо теоремы I этой же работы.

4. Семейство функций $\mathfrak{M}$ называется перечислимым по представителям, если можно построить такое перечислимое множество $\mathcal{M}$, что любой элемент $\mathcal{M}$ является записью некоторой функции из $\mathfrak{M}$ и для всякой функции из $\mathfrak{M}$ можно построить элемент $\mathcal{M}$, являющийся записью равной ей функции. Обозначим через H функцию, тождественно равную нулю. Семейство функций $\mathfrak{N}$ будем называть вполне плотным, если для любого натурального числа n выполняется следующие условия:

1) семейство функций, принадлежащих $\mathfrak{N}$ и сфере $C_{H,n}$, перечислимо по представителям;

2) для любой функции, принадлежащей сфере $C_{H,n}$, можно построить сходящуюся к ней поточечно последовательность функции, принадлежащих $\mathfrak{N}$ и сфере $C_{H,n}$.

Теорема 4. Семейство полных полигональных функций ж) и семейство функций, равных полиномам с рациональными коэффициентами, являются вполне плотными семействами функций.

Эта теорема вытекает из результатов § 2 работы [10].

Будем говорить, что семейство функций $\mathfrak{M}$ аддитивно замкнуто относительно семейства функций $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M}$ является правильным семейством функций и, каковы бы ни были функции f, g и h, такие что для любого дуплекса x из $0 \Delta 1$

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

функция f принадлежит $\mathfrak{M}$ в том случае, когда функция g принадлежит $\mathfrak{M}$ и функция h принадлежит $\mathfrak{N}$.

Ясно, что семейство всех функций и семейство равномерно непрерывных функций аддитивно замкнуто как относительно семейства полных полигональных функций, так и относительно семейства функций, равных полиномам с рациональными коэффициентами; семейство функций, равных полиномам с дуплексными коэффициентами, аддитивно замкнуто относительно семейства функций, равных полиномам с рациональными коэффициентами.

Лемма 5. Если семейство функций $\mathfrak{M}$ аддитивно замкнуто относительно какого-нибудь вполне плотного семейства функций, то любое вполне перечислимое подсемейство семейства $\mathfrak{M}$ S- регулярно относительно каждой функции из $\mathfrak{M}$.

Эту лемму можно доказать с помощью леммы 3. Из леммы 5 вытекает следующая лемма.

ж) См. [10], стр. 539.

Лемма 6. Если семейство функций $\mathfrak{M}$ аддитивно замкнуто относительно какого-нибудь вполне плотного семейства функций, то любой функционал на $\mathfrak{M}$ S-регулярен относительно всякой функции из $\mathfrak{M}$.

Теорема 5. Каковы бы ни были правильное семейство функций $\mathfrak{M}$ и вполне плотное семейство функций $\mathfrak{N}$, если семейство $\mathfrak{M}$ аддитивно замкнуто относительно $\mathfrak{N}$, то для любого функционала F на $\mathfrak{M}$, для любой функции $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{M}$ и для любого натурального числа n можно построить такое натуральное число m, что для всех функций $\mathfrak{g}$, принадлежащих семейству $\mathfrak{M}$ и сфере $C_{\mathfrak{f},m}$,

$$|F(\varepsilon\mathfrak{f}\mathfrak{z}) - F(\varepsilon\mathfrak{g}\mathfrak{z})| < 2^{-n}.$$

Эта теорема вытекает из теоремы 3 и леммы 6.

5. Пусть $\mathfrak{M}$ - правильное семейство функций. Об алгорифме ρ будем говорить, что он представляет собой метрическую функцию в семействе $\mathfrak{M}$, если ρ является метрической функцией (см. [I], стр. I73) в множестве записей функций из $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что метрическая функция ρ в семействе $\mathfrak{M}$ согласована с равенством функций, если, каковы бы ни были функции $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ принадлежащие $\mathfrak{M}$, из того что $\mathfrak{f}$ равна $\mathfrak{g}$ следует, что

$$\rho(\varepsilon\mathfrak{f}\mathfrak{z} \,\square\, \varepsilon\mathfrak{g}\mathfrak{z}) = 0.$$

Пусть ρ - метрическая функция в семействе $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{f}$ - функция, принадлежащая $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{F}$ - последовательность функций из $\mathfrak{M}$. Говорят, что последовательность $\mathfrak{F}$ сходится по метрике ρ к функции $\mathfrak{f}$, если для любого натурального числа m можно построить такое натуральное число n, что для всех натуральных чисел k, мажорирующих n,

$$\rho(\varepsilon\mathfrak{f}\mathfrak{z} \,\square\, \varepsilon\tilde{\mathfrak{F}}_{k\square}\mathfrak{z}) < 2^{-m}.$$

Теорема 6. Каковы бы ни были правильное семейство функций $\mathfrak{M}$, функция $\mathfrak{f}$, принадлежащая $\mathfrak{M}$, и последовательность $\mathfrak{F}$ функций из $\mathfrak{M}$, если последовательность $\mathfrak{F}$ сходится поточечно к функции $\mathfrak{f}$, то последовательность $\mathfrak{F}$ сходится к функции $\mathfrak{f}$ по любой метрике в $\mathfrak{M}$, согласованной с равенством функций.

Эта теорема вытекает из теоремы I.

Теорема 7. Каковы бы ни были правильное семейство функций $\mathfrak{M}$, метрическая функция ρ в семействе $\mathfrak{M}$, согласованная с равенством функций, и функция $\mathfrak{f}$ из $\mathfrak{M}$, если семейство $\mathfrak{M}$ аддитивно замкнуто относительно какого-нибудь вполне плотного семейства функций, то для любого натурального числа n можно построить такое натуральное число m, что для всех функций $\mathfrak{g}$, принадлежащих $\mathfrak{M}$ и сфере $C_{\mathfrak{f},m}$,

$$\rho(\varepsilon\mathfrak{f}з \,\square\, \varepsilon\mathfrak{g}з) < 2^{-n}.$$

Эта теорема следует из теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

I. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства. "Тр.Матем.ин-та АН СССР", 1962, 67, I5-294.

2. Цейтин Г.С. Алгорифмические операторы в конструктивных метрических пространствах. "Тр.Матем.ин-та АН СССР", 1962, 67, 295-36I.

3. Гелбаум Б. Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе, М., 1967.

4. Минц Г.Е. О предикатных и операторных вариантах построения теорий конструктивной математики. "Тр.Матем.ин-та АН СССР", 1964, 72,383-436.

5. Кушнер Б.А. Некоторые массовые проблемы, связанные с интегрированием конструктивных функций. "Тр.Матем.ин-та АН СССР", 1970, 113,39-72.

6. Заславский И.Д., Цейтин Г.С. О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойствах конструктивных функций. "Тр. Матем.ин-та АН СССР", 1962, 67,458-502.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.2, М., 1962.

8. Заславский И.Д. Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. "Тр. Матем.ин-та АН СССР", 1962, 67,385-457.

9. Moschovakis Y.N. Recursive metric spaces. "Fundam.math.",1964, 55, 3, 215-238.

10. Цейтин Г.С. Три теоремы о конструктивных функциях. "Тр. Матем.ин-та АН СССР", 1964, 72,537-543.