O. M. Fomenko, The order of the Epstein zeta-function in the critical strip, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2000, Volume 263, 205–225

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 263, 2000 г.

О. М. Фоменко

ПОРЯДОК ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭПШТЕЙНА В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

§1. Введение; результаты

Пусть $Q(x_1, \dots, x_k)$ – положительная квадратичная форма от $k \geqslant 2$ переменных; $s = \sigma + it$. Для $\sigma > \frac{1}{2}k$ дзета-функция Эпштейна определяется рядом

$$\zeta(s; Q) = \sum_{x_1, \dots, x_k = -\infty}^{\infty} Q(x_1, \dots, x_k)^{-s},$$

где суммирование идет по всем целым точкам $(x_1, \dots, x_k)$ в k-мерном пространстве с исключением $(0, \dots, 0)$. Дзета-функция $\zeta(s; Q)$ имеет аналитическое продолжение, которое голоморфно всюду за исключением точки $s = k/2$, где имеется простой полюс. Справедливо функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(s; Q) = |Q|^{-1/2}\pi^{-(\frac{1}{2}k - s)}\Gamma\left(\frac{k}{2} - s\right)\,\zeta\left(\frac{k}{2} - s; Q^{-1}\right),$$

$|Q|$ – детерминант Q. Полоса $0 \leqslant \sigma \leqslant k/2$ является для $\zeta(s; Q)$ критической. По причинам, о которых речь пойдет ниже, будем рассматривать поведение $\zeta(s; Q)$ на прямой

$$s = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it \quad (-\infty < t < \infty). \tag{1.1}$$

Соображения выпуклости приводят к оценке

$$\zeta\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it; Q\right) \ll T^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \tag{1.2}$$

где здесь и ниже $T = |t| + 2$. В случае бинарной формы

$$Q = x_1^2 + a x_2^2, \quad a > 0,$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 99-01-00099).

оценку (1.2) улучшил Титчмарш [1]:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it;Q\right) \ll T^{1/3}\log^3 T. \tag{1.3}$$

Оценка (1.3) передоказывалась для положительных бинарных квадратичных форм с целыми коэффициентами (Р. М. Кауфман, Ютила и другие); еще одно доказательство приведено ниже в §4.

Пользуясь теорией модулярных форм и аналитической теорией квадратичных форм, можно легко улучшить (1.2) для положительных квадратичных форм с целыми коэффициентами в случае $k \geqslant 4$ переменных. Для дзета-функции Эпштейна формы $Q = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ мы улучшаем (1.2) методом ван дер Корпута.

Пусть $Q(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{2}x^T Ax$, $x^T = (x_1,\dots,x_k)$, A – целочисленная положительная симметрическая $k\times k$ матрица с четной диагональю a_{ii} $(i = 1,\dots,k)$; такие матрицы называются четными. Пусть $r(n)$ – число представлений целого $n \geqslant 0$ формой $Q : n = Q(x_1,\dots,x_n)$. Пусть $k \geqslant 4$. Рассмотрим соответствующий тета-ряд:

$$\theta(z;Q) = \theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

Хорошо известно, что

$$\theta(z) = E(z) + S(z),$$

где $E(z)$ – ряд Эйзенштейна, $S(z)$ – параболическая форма;

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(n)\, e^{2\pi i n z},$$

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n z},$$

С указанными модулярными формами ассоциируем соответствующие ряды Дирихле, получаем (функции задаются сначала в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \frac{k}{2}$, а затем аналитически продолжаются на всю плоскость)

$$\zeta(s;Q) = \widehat{E}(s) + \widehat{S}(s),$$

где

$$\zeta(s;Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{n^s},$$

$$\widehat{E}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e(n)}{n^s},$$

$$\widehat{S}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}.$$

Хорошо известно, что в случае четного $k\geqslant 4$

$$a(n)\ll n^{k/4-1/2+\varepsilon};$$

в случае нечетного $k\geqslant 5$

$$a(n)\ll n^{k/4-1/4+\varepsilon};$$

здесь и ниже $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое постоянное число. Из этих оценок следует, что на прямой (1.1)

$$\zeta(s;Q)=\widehat{E}(s)+O\left(T^{\varepsilon}\right),$$

поэтому задача сводится к исследованию порядка $\widehat{E}(s)$ на этой прямой. Поясним сказанное простым примером. Рассмотрим форму $\gamma(x_1,\ldots,x_k)$, матрица которой $A=A_\gamma$ является четной унимодулярной; известно, что тогда $8\mid k$. Имеем

$$\zeta(s;\gamma)=\widehat{E}(s)+\widehat{S}(s),$$

где

$$\widehat{E}(s)=\frac{(2\pi)^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\zeta\left(\frac{k}{2}\right)}\zeta(s)\,\zeta\left(s+1-\frac{k}{2}\right).$$

Из результатов работы [3] следует, что

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\ll T^{9/56+\varepsilon}, \tag{1.4}$$

поэтому

$$\zeta\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+it;\gamma\right)\ll T^{9/56+\varepsilon}.$$

Очевидно, в случае справедливости гипотезы Линделёфа для $\zeta(s)$ имеет место следующий факт:

$$\zeta\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+it;\gamma\right)\ll T^{\varepsilon}.$$

Аналогичные факты справедливы для общих целочисленных квадратичных форм от $k \geqslant 4$ переменных. Метод доказательства очень прост в случае четных $k \geqslant 4$, но более сложен для нечетных $k \geqslant 5$.

Сформулируем теперь полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть $Q(x_1, \dots, x_k)$ – целочисленная положительная квадратичная форма от k переменных с четной матрицей A. Тогда*

$$\zeta\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it; Q\right) \ll T^{\alpha+\varepsilon},$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{9}{56}, & \textit{если} \quad k - \textit{четное} \geqslant 4; \\ \dfrac{1}{6}, & \textit{если} \quad k - \textit{нечетное} \geqslant 9; \\ \dfrac{3}{16}, & \textit{если} \quad k = 7. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $Q(x_1, \dots, x_k) = D_1 x_1^2 + \dots + D_k x_k^2$, где $D_1, \dots, D_k$ – нечетные попарно взаимно простые положительные целые числа. Тогда при $k = 5, 7$*

$$\zeta\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it; Q\right) \ll T^{1/6+\varepsilon}.$$

Теорема 3. *Пусть $Q(x_1 x_2 x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Тогда*

$$\zeta(1 + it; Q) \ll T^{5/12} \log^3 T.$$

Теорема 4 (Титчмарш). *Пусть $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + a x_2^2$, $a > 0$ вещественное. Тогда*

$$\zeta(1 + it; Q) \ll T^{1/3+\varepsilon}.$$

Замечание 1. 1) Пусть χ – характер Дирихле $(\operatorname{mod} q)$. Обобщенной гипотезой Линделёфа называется утверждение вида

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \ll (qT)^{\varepsilon}.$$

В случае справедливости обобщенной гипотезы Линделёфа для всех L-рядов Дирихле теоремы 1 и 2 усиливаются до

$$\zeta\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+it;Q\right)\ll T^{\varepsilon}.$$

2) Теорема 3 может быть обобщена на случай положительной тернарной квадратичной формы с вещественными коэффициентами $x_1^2+ax_2^2+bx_3^2$.

§2. Доказательство теорем 1 и 2

2.1. В этом подпараграфе докажем теорему 1. Рассмотрим сначала случай четных $k\geqslant 4$. Ряд Эйзенштейна $E(z)$ является модулярной формой веса $k/2$ и ступени N. По теореме 44 [3] $\widehat{E}(s)$ представим в виде линейной комбинации рядов вида

$$(t_1t_2)^{-s}L(s,\chi_1)L\left(s-\frac{k}{2}+1,\chi_2\right),$$

где t_1, t_2 – положительные делители ступени N, χ_1 и χ_2 – характеры Дирихле $\operatorname{mod} N/t_1$ и $\operatorname{mod} N/t_2$ соответственно; при этом должны выполняться некоторые условия на характеры. Оценка (1.4) переносится на случай L-рядов Дирихле с постоянным модулем:

$$L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\ll T^{9/56+\varepsilon},$$

где $\ll$-константа зависит от модуля характера. Соединяя сказанное, получаем нужную оценку:

$$\zeta\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+it,Q\right)\ll T^{9/56+\varepsilon}.$$

Переходим к нечетным $k\geqslant 9$. Выразим n-ый коэффициент Фурье ряда Эйзенштейна $e(n)$ через сингулярный ряд. Пусть D – определитель формы $Q(x_1,\dots,x_k)$. Имеем (см. [4])

$$e(n)=\frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\,n^{k/2-1}H(Q;n),$$

где

$$H(Q;n)=\sum_{q=1}^{\infty}\left\{\sum_{h(\operatorname{mod} q)}{}' q^{-k}S(hQ;q)\,e^{-2\pi i\frac{nh}{q}}\right\}$$

– сингулярный ряд; $\sum'$ означает, что суммирование идет по приведенной системе вычетов,

$$S(Q;q)=\sum_{x_1,\dots,x_k=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i Q(x_1,\dots,x_k)}{q}} \text{ –}$$

гауссова сумма. Рассмотрим ряд $\widehat{E}(k/2-1+s)$, $\operatorname{Re} s>1$. Имеем

$$\widehat{E}\left(\frac{k}{2}-1+s\right)=\frac{\pi^{k/2}}{\sqrt{D}\,\Gamma(k/2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{h(\operatorname{mod} q)}{}' q^{-k}S(hQ;q)\,e^{-2\pi i\frac{nh}{q}}.$$

Пусть $(n,q)=d$, $n=n_1d$, $q=q_1d$, $(n_1,q_1)=1$; $n_1=n_2q_1+l$, где $(q_1,l)=1$. Имеем

$$\widehat{E}\left(\frac{k}{2}-1+s\right)=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^s}\sum_{q_1=1}^{\infty}\sum_{h(\operatorname{mod} d\,q_1)}{}'\frac{S(hQ;q_1d)}{(q_1d)^k}\cdot$$

$$\cdot\sum_{l(\operatorname{mod} q_1)}{}' e^{-2\pi i\frac{hl}{q_1}}\frac{1}{\varphi(q_1)}\sum_{\chi(\operatorname{mod} q_1)}\overline{\chi}(l)\sum_{n_1=1}^{\infty}\frac{\chi(n_1)}{n_1^s}.$$

Известно [4], что

$$S\bigl(hQ;q\bigr)\ll q^{k/2}, \tag{2.1}$$

где $\ll$-константа зависит только от формы Q.

В работе [5] было замечено, что метод ван дер Корпута приводит к следующей равномерной оценке (q – модуль характера χ):

$$L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\ll q^{1/2}\,T^{1/6}\bigl(\log(qT)\bigr). \tag{2.2}$$

Оценки (2.1) и (2.2) позволяют при $k\geqslant 9$ аналитически продолжить ряд $\widehat{E}(k/2-1+s)$ в область, содержащую прямую $\operatorname{Re} s=1/2$, и получить требуемый результат. Имеем

$$\widehat{E}\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+it\right)\ll\sum_{d}\frac{1}{d^{1/2}}\sum_{q_1}\varphi(dq_1)\,\frac{1}{(q_1d)^{k/2}}\cdot$$

$$\cdot\varphi(q_1)\,\frac{1}{\varphi(q_1)}\,\varphi(q_1)\,q_1^{1/2+\varepsilon}\,T^{1/6+\varepsilon}\ll T^{1/6+\varepsilon}.$$

В случае $k=7$ применяем следующую оценку (см. [5]):

$$L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right) \ll (qT)^{3/16+\varepsilon}.$$

Тем самым,

$$\widehat{E}(3+it) \ll T^{3/16+\varepsilon}.$$

Теорема 1 доказана.

2.2. В этом подпараграфе докажем теорему 2. Ограничимся случаем $k=5$; $k=7$ рассматривается аналогично. Пусть a, b – любая пара взаимно простых целых чисел и $b>0$. Для нечетного $b>0$ $\chi_b(a)=(a/b)$ означает символ Лежандра–Якоби. Пусть $Q(x_1,\ldots,x_k)$, $k\geqslant 5$, – целочисленная положительная квадратичная форма с четной матрицей A, $|A|=D$. Положим

$$H\left(\frac{a}{b}\right) = D^{-1/2}\,b^{-k/2}S(aQ;b),$$

где $(a,b)=1$, $b>0$. Зигель [6] доказал, что в полосе $1<\sigma<k/2-1$

$$\widehat{E}(s) = \pi^s\frac{\Gamma(k/2-s)}{\Gamma(k/2)}\sum_{a,b} a^{s-k/2}\,b^{-s}\cdot$$

$$\cdot\left\{e^{\pi i/4(2s-k)}H\left(\frac{a}{b}\right)+e^{\pi i/4(k-2s)}H\left(\frac{-a}{b}\right)\right\},$$

где a, b пробегают все пары положительных взаимно простых целых чисел.

Рассмотрим теперь случай диагональной матрицы $A = \{2D_1,\ldots,2D_5\}$, где $D_1,\ldots,D_5$ – нечетные попарно взаимно простые положительные целые числа; $D=2^5D_1\cdots D_5$. Вычислим соответствующие гауссовы суммы. Рассмотрим 3 случая.

1) $a>0$ – любое целое, $b>0$ – нечетное; пусть $(D_i,b)=d_i$ $(i=1,\ldots,5)$. Имеем

$$H\left(\frac{a}{b}\right) = (D/d_1\cdots d_5)^{-1/2}\,i^{\left(\frac{b/d_1-1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{b/d_5-1}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{aD_1/d_1}{b/d_1}\right)\cdots\left(\frac{aD_5/d_5}{b/d_5}\right).$$

2) $a>0$ – нечетное, $b>0$ – четное; пусть $(2D_i,b)=d_i$ $(i=1,\dots,5)$. Имеем

$$H\left(\frac{a}{b}\right)=0, \quad \text{если} \quad 2\,||\,b;$$

$$H\left(\frac{a}{b}\right)=\left(D/d_1\cdots d_5\right)^{-1/2} e^{\frac{5\pi i}{4}} i^{\left(\frac{2aD_1/d_1-1}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{2aD_5/d_5-1}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{-b/d_1}{2aD_1/d_1}\right)\cdots\left(\frac{-b/d_5}{2aD_5/d_5}\right),$$

если $b=4b_1$.

3) $a>0$ – нечетное, $b>0$ – четное; пусть $(2D_i,b)=d_i$ $(i=1,\dots,5)$. Имеем

$$H\left(\frac{-a}{b}\right)=0, \quad \text{если} \quad 2\,||\,b;$$

$$H\left(\frac{-a}{b}\right)=\left(D/d_1\cdots d_5\right)^{-1/2} e^{\frac{5\pi i}{4}} i^{\left(\frac{2aD_1/d_1-1}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{2aD_5/d_5-1}{2}\right)^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{b/d_1}{2aD_1/d_1}\right)\cdots\left(\frac{b/d_5}{2aD_5/d_5}\right),$$

если $b=4b_1$.

Отсюда следует, что каждый из рядов $(1<\sigma<3/2)$

$$\sum_{a,b} a^{s-k/2}\,b^{-s}\,H\left(\frac{a}{b}\right), \quad \sum_{a,b} a^{s-k/2}\,b^{-s}\,H\left(\frac{-a}{b}\right), \tag{2.3}$$

где a, b пробегают все пары положительных взаимно простых целых чисел, выражается в виде линейной комбинации конечного числа рядов вида

$$\sum_{b} f(b)\,b^{-s}\,L\left(\frac{5}{2}-s,\chi\right), \tag{2.4}$$

где χ – характер Дирихле $(\operatorname{mod} b')$, $b'=c\cdot b$, c не превосходит некоторой константы; $|f(b)|\leqslant 1$. Ряды (2.3) через посредство рядов (2.4) аналитически продолжаются в область, содержащую прямую $\operatorname{Re} s=2$. На основании оценки (2.2) имеем

$$\widehat{E}(2+it)\ll T^{1/6+\varepsilon}.$$

Теорема доказана.

§3. Доказательство теоремы 3

Пусть $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s; Q)$ (см. [7]) дает: пусть $|t| > C > 0$ и $m^2 + n^2 + k^2 = R$, где m, n, k – целые числа, тогда

$$\zeta(1+t;Q) = \sum_{\substack{m,n,k\\ 1\leqslant R\leqslant |t|/\pi}} \frac{1}{\left(m^2+n^2+k^2\right)^{1+it}} + \pi^{2s-3/2}\frac{\Gamma(3/2-s)}{\Gamma(s)}\cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{m,n,k\\ 1\leqslant R\leqslant |t|/\pi}} \frac{1}{\left(m^2+n^2+k^2\right)^{1/2-it}} + O\big(\log|t|\big). \tag{3.1}$$

Для определенности рассмотрим $t > C$ и часть шара

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant \frac{t}{\pi}, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \tag{3.2}$$

Пусть $1 \leqslant M \leqslant N \leqslant K$ и $M' \leqslant 2M$, $N' \leqslant 2N$, $K' \leqslant 2K$.

Рассмотрим сумму

$$S_1 = \sum_{M\leqslant m\leqslant M'} \sum_{N\leqslant n\leqslant N'} \sum_{K\leqslant k\leqslant K'} \frac{1}{\left(m^2+n^2+k^2\right)^{1+it}}.$$

Очевидно, можно считать, что

$$K < \left(t/\pi\right)^{1/2}.$$

Оценим сначала сумму

$$S_0 = \sum_{M\leqslant m\leqslant M'} \frac{1}{\left(m^2+n^2+k^2\right)^{it}}.$$

Применим метод ван дер Корпута. Сформулируем его результат по книге ([8], теорема 5.11):

Пусть функция $f(x)$ вещественная и имеет непрерывные производные вплоть до третьего порядка, и пусть

$$\lambda_3 \leqslant f'''(x) \leqslant h\lambda_3 \tag{3.3}$$

или

$$\lambda_3 \leqslant -f'''(x) \leqslant h\lambda_3$$

и $b-a\geqslant 1$. Тогда

$$\sum_{a<n\leqslant b} e^{2\pi i f(n)} = O\Big\{h^{1/2}(b-a)\lambda_3^{1/6}\Big\} + O\Big\{(b-a)^{1/2}\lambda_3^{-1/6}\Big\},$$

причем O-константы являются абсолютными.

Положим

$$f(x_1,x_2,x_3) = -\frac{t}{2\pi}\log\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right).$$

Вычисления дают

$$f'''_{x_1x_1x_1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{2t}{\pi}\,\frac{x_1\left(3x_2^2+3x_3^2-x_1^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}.$$

Для любых точек (x_1,x_2,x_3) ящика

$$M\leqslant x_1\leqslant M',\quad N\leqslant x_2\leqslant N',\quad K\leqslant x_3\leqslant K'$$

имеем

$$3x_2^2+3x_3^2-x_1^2 \asymp K^2.$$

Применим результат ван дер Корпута. Условие (3.3) выполняется, причем

$$\lambda_3 \asymp \frac{tM}{K^4};$$

имеем

$$S_0 \ll M\left(\frac{tM}{K^4}\right)^{1/6} + M^{1/2}\left(\frac{K^4}{tM}\right)^{1/6} =$$

$$= \frac{M^{7/6}}{K^{2/3}}\,t^{1/6} + M^{1/3}K^{2/3}t^{-1/6} \leqslant K^{1/2}t^{1/6} + KT^{-1/6}.$$

По абелеву суммированию,

$$\sum_{M\leqslant m\leqslant M'} \frac{1}{\left(m^2+n^2+k^2\right)^{1+it}} \ll K^{-2}\left(K^{1/2}t^{1/6}+Kt^{-1/6}\right).$$

Тем самым,

$$S_1 \ll K^{1/2}t^{1/6} + Kt^{-1/6} \ll t^{5/12}.$$

Всю сумму по части шара (3.2)

$$S = \sum_{\substack{m\geqslant 0,n\geqslant 0,k\geqslant 0\\ 1\leqslant R\leqslant t/\pi}} \frac{1}{\left(m^2+n^2+k^2\right)^{1+it}}$$

разобъем на следующие подсуммы:

1) сумма слагаемых с $m=0$ или $n=0$ или $k=0$ (её вклад $\ll t^{\varepsilon}$);

2) сумма слагаемых S_1 с ящиками вида

$$M \leqslant x_1 \leqslant 2M, \quad N \leqslant x_2 \leqslant 2N, \quad K \leqslant x_3 \leqslant 2K, \tag{3.4}$$

целиком расположенными внутри шара;

3) сумма слагаемых $\check{S}_1$, аналогичных S_1, у которых часть ящика вида (3.4) находится внутри шара, а другая часть (её мы не учитываем при суммировании) – вне шара; очевидно

$$\check{S}_1 \ll t^{5/12}.$$

Общее количество слагаемых типа 2) и 3)

$$\ll \log^3 t.$$

Поэтому

$$S \ll t^{5/12} \log^3 t.$$

Суммы, взятые по остальным частям шара: $x_1<0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$; $x_1 \geqslant 0$, $x_2<0$, $x_3 \geqslant 0$; ..., оцениваются аналогично. Вторая сумма в (3.1) трактуется аналогично. Теорема доказана.

§4. Доказательство теоремы 4

4.1. Используем метод работы [9]. Пусть $Q(x_1,x_2)=x_1^2+ax_2^2$, $a>0$ вещественное. Обозначим $\underline{x}=(x_1,x_2)$, тогда $Q(x_1,x_2)=Q(\underline{x})$. Функциональное уравнение для $\zeta(s;Q)$ имеет вид

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

где

$$\xi(s)=a^{\frac{1}{2}s}\pi^{-s}\Gamma(s)\,\zeta(s;Q).$$

Обозначим $G(s)=a^{\frac{1}{2}s}\pi^{-s}\Gamma(s)$. Пусть $s=1/2+it$, $t \geqslant 2$,

$$W_0(x)=W_0(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{-w}\,\frac{G(s+w)}{G(s)}\,e^{w\,2}\,\frac{dw}{w}.$$

Обычными методами доказываем, что

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it;Q\right)\right| \leqslant 2\sum_{\underline{m}} Q(\underline{m})^{-1/2-it}\,W_0\left(Q(\underline{m})\right)+O(1),$$

где здесь и ниже $\sum\limits_{\underline{m}}$ означает суммирование по всем целочисленным векторам $\underline{m} = (m_1, m_2) \neq (0,0)$ и $W_0(x)$ имеет производные всех порядков и удовлетворяет условию

$$\frac{d^k W_0(x)}{dx^k} \ll_k x^{-k} \min\left(1, tx^{-1}\right).$$

Далее вводим функции

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x(1-x)}\right), & 0 < x < 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и

$$\omega(x) = \left\{\int\limits_0^1 \omega_0(y)dy\right\}^{-1} \omega_0(x).$$

Тогда $\omega(x)$ имеет производные всех порядков и обладает свойствами: $\omega^{(k)}(x) \ll_k 1$, $\omega(x) = 0$ $(x \leqslant 0$ или $x \geqslant 1)$;

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(x)dx = 1.$$

Имеем

$$\sum_{\underline{m}} Q(\underline{m})^{-1/2-it} W_0\left(Q(\underline{m})\right) = \int\limits_0^{\infty} S_0(x)\, dx,$$

где

$$S_0(x) = \sum_{\underline{m}} Q(\underline{m})^{-1/2-it} W_0\left(Q(\underline{m})\right) \omega\left(x - \log Q(\underline{m})\right).$$

Подставляя $x = \log y$, приходим к неравенству: пусть $t \geqslant 2$, тогда

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2} + it; Q\right)\right| \leqslant \int\limits_0^{\infty} \left|S_1(y)\right| dy + O(1),$$

где

$$S_1(y) = \sum_{\underline{m}} \left(Q(\underline{m})\right)^{-it} W_1\left(Q(\underline{m}), t, y\right),$$

$W_1(u) = W_1(u,t,y)$ имеет производные всех порядков относительно $u \in \mathbf{R}$;

$$\frac{\partial^k W_1}{\partial u^k} \ll_k y^{-3/2-k} \min(1, ty^{-1})$$

и $W_1 = 0$, если не выполняется условие $e^{-1}y < u < y$.

Введем несколько обозначений. Пусть $\underline{u} = (u_1, u_2)$ – вектор с вещественными u_1, u_2; $|\underline{u}|$ – длина вектора $\underline{u}$; $\rho_1(\underline{u}) = u_1 + iu_2$, $\rho_2(\underline{u}) = u_1 - iu_2$; $\underline{u}(\underline{x}) = (x_1, \sqrt{a}\, x_2) = \underline{x}U$, где $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{smallmatrix}\right)$; $\underline{k} = (k_1, k_2)$, $k = k_1 + k_2$,

$$D_{\underline{u}}^{\underline{k}} = \frac{\partial^k}{\partial^{k_1} u_1 \partial^{k_2} u_2}.$$

Положим ($\underline{u} \in \mathbf{R}^2$)

$$W_2(\underline{u}) = W_1\left(\rho_1(\underline{u})\rho_2(\underline{u})\right).$$

Сказанное выше дает следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $t \geqslant 2$, тогда*

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it; Q\right) \ll 1 + \int_1^\infty \left|S_2(y)\right| dy,$$

где

$$S_2(y) = \sum_{\underline{m}} Q(\underline{m})^{-it} W_2\left(\underline{u}(\underline{m})\right),$$

$W_2(\underline{u}) = W_2(\underline{u}, t, y)$ *удовлетворяет условию*

$$D_{\underline{u}}^{\underline{k}} W_2 \ll Y^{-k}\, y^{-3/2} \min(1, ty^{-1}), \quad Y = \sqrt{y},$$

причем функция $W_2(\underline{u})$ отлична от нуля лишь в области

$$R(Y) : c_1 Y < \sqrt{u_1^2 + u_2^2} < c_2 Y, \tag{4.1}$$

$0 < c_1 < c_2$ – *некоторые константы.*

4.2. Основу метода работы [9] составляет $\ll A$ процесс $\gg$ ван дер Корпута. Для любого $\underline{h} \in \mathbf{Z}^2$ имеем

$$S_2(y) = \sum_{\underline{m} \in \mathbf{Z}^2} Q(\underline{m} + \underline{h})^{-it}\, W_2\left(\underline{u}(\underline{m} + \underline{h})\right).$$

Если $1 \leqslant H \leqslant Y$ и
$$H_1 = \#\Big\{\underline{h} \in \mathbf{Z}^2 : |\underline{h}| \leqslant H\Big\}, \tag{4.2}$$
получаем
$$H_1 S_2(y) = \sum_{\underline{m}} \sum_{|\underline{h}| \leqslant H} Q(\underline{m}+\underline{h})^{-it}\, W_2\left(\underline{u}(\underline{m}+\underline{h})\right).$$
Неравенство Коши дает ($\underline{l} \in \mathbf{Z}^2$)
$$H_1^2 \big|S_2(y)\big|^2 \ll$$
$$\ll Y^2 H_1 \sum_{|\underline{l}| \leqslant 2H} \left| \sum_{\underline{m}} \left(\frac{Q(\underline{m}+\underline{l})}{Q(\underline{m})}\right)^{it} W_2(\underline{u}(\underline{m}+\underline{l}))W_2(\underline{u}(\underline{m})) \right| =$$
$$= Y^2 H_1 \sum_{|\underline{l}| \leqslant 2H} \Big|\sum(\underline{l}, y)\Big|. \tag{4.3}$$
По формуле Пуассона имеем
$$\sum(\underline{l}, y) = \sum_{\underline{p} \in \mathbf{Z}^2} F(\underline{l}, \underline{p}), \tag{4.4}$$
где
$$F(\underline{l}, \underline{p}) = \int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{2\pi i \underline{p}\cdot\underline{x}} \left(\frac{Q(\underline{x}+\underline{l})}{Q(\underline{x})}\right)^{it} W_2(\underline{u}(\underline{x}+\underline{l}))W_2(\underline{u}(\underline{x}))\, dx_1 dx_2; \tag{4.5}$$
$\underline{p}\cdot\underline{x}$ означает скалярное произведение.

Упростим выражение за счет подстановки $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x})$. Пусть
$$W_3(\underline{u}) = W_3(\underline{u}, \underline{l}, y) = W_2(\underline{u} + \underline{u}(\underline{l}))W_2(\underline{u}).$$
$W_3(\underline{u})$ имеет носитель в области $R(Y)$ и её частные производные удовлетворяют условию:
$$D_{\underline{u}}^{\underline{k}} W_3 \ll_k \Delta Y^{-k}$$
равномерно по $|\underline{l}| \leqslant 2H$,
$$\Delta = y^{-3} \min\left(1, t^2 y^{-2}\right). \tag{4.6}$$
Положим
$$\underline{\lambda} = \underline{l}\, U, \quad \mu = \underline{p}(U^T)^{-1},$$

тогда

$$|\underline{l}| \ll |\underline{\lambda}| \ll |\underline{l}|, \quad |\underline{p}| \ll |\underline{\mu}| \ll |\underline{p}|.$$

Имеем $e^{2\pi i \underline{p}\cdot\underline{x}} = e^{2\pi i \underline{\mu}\cdot\underline{u}}$,

$$\frac{Q(\underline{x}+\underline{l})}{Q(\underline{x})} = \frac{\rho_1(\underline{u}+\underline{\lambda})\rho_2(\underline{u}+\underline{\lambda})}{\rho_1(\underline{u})\rho_2(\underline{u})}.$$

(4.5) принимает вид

$$F(\underline{l},\underline{p}) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{i\varphi(\underline{u})}W_3(\underline{u})du_1du_2, \tag{4.7}$$

где

$$\varphi(\underline{u}) = \varphi(u_1,u_2) =$$

$$= 2\pi(\mu_1u_1+\mu_2u_2) + t\log\left\{\frac{(u_1+\lambda_1)^2+(u_2+\lambda_2)^2}{u_1^2+u_2^2}\right\}. \tag{4.8}$$

4.3. Оценим интеграл в (4.7) при больших $\underline{p}$. Сформулируем лемму, доказательство которой см. в [9].

Лемма 2. *Пусть $W : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет носитель в (a,b) и пусть $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$. Предположим, что W и φ имеют производные всех порядков, и пусть*

$$\Phi = \inf\Big\{|\varphi'(x)| : a < x < b\Big\}.$$

Предположим далее, что

$$\frac{d^kW}{dx^k} \ll_k (b-a)^{-k} \quad (x \in \mathbf{R},\ k \geqslant 0)$$

и

$$\frac{d^k\varphi}{dx^k} \ll_k (b-a)^{1-k}\Phi \quad (x \in (a,b),\ k \geqslant 1).$$

Тогда для любого целого $N \geqslant 0$

$$\int\limits_a^b e^{i\varphi(x)}W(x)\,dx \ll_N (b-a)^{1-N}\Phi^{-N}.$$

Вернемся к (4.7). Пусть

$$\nu_j = |\rho_j(\lambda)| \quad (j = 1,2);$$

очевидно, $\nu_1 = \nu_2$. Существует константа $c_3 > 0$ такая, что, беря $H \leqslant c_3 Y$, получаем $\nu_j \leqslant \frac{1}{2} c_1 Y$ (c_1 фигурирует в (4.1)). Следовательно, $|\rho_j(\underline{u} + \underline{\lambda})| \geqslant \frac{1}{2} c_1 Y$ для всех $\underline{u} \in R(Y)$. Из (4.8) следует равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = 2\pi \mu_j + O\left(\frac{t\nu_j}{Y^2}\right), \quad \underline{u} \in R(Y).$$

Таким образом, существуеь константа $c_4 > 0$ такая, что

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} \right| \geqslant \pi |\mu_j|$$

для каждого j с условием

$$|\mu_j| \geqslant c_4 t Y^{-2} \nu_j. \tag{4.9}$$

Тогда

$$\frac{\partial^l \varphi}{\partial u_j^l} \ll_l \frac{t\nu_j}{Y^{l+1}} \ll \frac{|\mu_j|}{Y^{l-1}}.$$

Если существует индекс j с условием (4.9), то по лемме 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi(\underline{u})} W_3(\underline{u}) du_j \ll_N \Delta Y^{1-N} |\mu_j|^{-N}.$$

Таким образом, существует константа $c_4 > 0$ такая, что для любого целого $N \geqslant 0$

$$F(\underline{l}, \underline{p}) \ll_N \Delta Y^2 (Y|\mu_j|)^{-N}, \tag{4.10}$$

если выполняется (4.9).

4.4. Получим теперь оценку $F(\underline{l}, \underline{p})$, используемую ниже при малых $\underline{p}$. Вводим величину

$$L_j = \min\left(\frac{1}{8} c_1 Y, \left(t\nu_j / Y^3\right)^{-1/2}\right) \quad (j = 1, 2);$$

очевидно, $L_1 = L_2$. Пусть

$$L = L_1 L_2$$

и

$$W_4(\underline{x}) = \omega(x_1/L_1)\, \omega(x_2/L_2),$$

где ω определена в §4.1.

Тогда

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} W_4(\underline{x})dx_1dx_2 = L,$$

так что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{i\varphi(\underline{u})}W_3(\underline{u})du_1du_2 =$$

$$= L^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}^2}\int\limits_{\mathbf{R}^2} e^{i\varphi(\underline{u})}W_3(\underline{u})\,W_4(\underline{u}-\underline{x})du_1du_2dx_1dx_2 =$$

$$= L^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}^2} I(\underline{x})dx_1dx_2. \tag{4.11}$$

Оценим $I(\underline{x})$. Очевидно, $I(\underline{x}) = 0$, если не выполняется $|\underline{x}| \ll Y$. Вес $W_5(\underline{u}) = W_5(\underline{u},\underline{x}) = W_3(\underline{u})W_4(\underline{u}-\underline{x})$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^k W_5}{\partial u_j^k} \ll_k \Delta L_j^{-k}.$$

Пусть $B(\underline{x})$ означает ящик

$$\Big\{\underline{u} \in \mathbf{R}^2 : 0 \leqslant u_1 - x_1 \leqslant L_1,\ 0 \leqslant u_2 - x_2 \leqslant L_1\Big\}.$$

Если $\underline{u} \in B(\underline{x}) \cap R(Y)$, то

$$\big|\rho_j(\underline{u}) - \rho_j(\underline{x})\big| \leqslant \frac{1}{4}c_1Y.$$

Выше говорилось,что при $H \leqslant c_3Y$ имеем

$$|\rho_j(\underline{\lambda})| \leqslant \frac{1}{2}c_1Y.$$

По (4.1) имеем $|\rho_j(\underline{u}) \geqslant c_1Y$. Следовательно,

$$Y \ll |\rho_j(\underline{u})|,\quad |\rho_j(\underline{x})|,\quad |\rho_j(\underline{u}+\underline{\lambda})|,\quad |\rho_j(\underline{x}+\underline{\lambda})| \ll Y$$
$$(\underline{u} \in B(\underline{x}) \cap R(Y)). \tag{4.12}$$

Если $\underline{x}'$ – другая точка, для которой $B(\underline{x}') \cap R(Y) \neq \varnothing$, то

$$Y \ll |\rho_j(\underline{x}+\underline{x}'+\underline{\lambda})| \ll Y$$

при условии, что

$$|\rho_j(\underline{x}) - \rho_j(\underline{x}')| \leqslant \frac{1}{2}c_1 Y.$$

По (4.8) и (4.12) имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{u}) - \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{x}) \ll t\nu_j L_j Y^{-3} \quad (\underline{u} \in B(\underline{x}) \cap P(Y)).$$

Следовательно, существует абсолютная константа c_5 такая, что

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{x})\right| \ll \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{u})\right| \ll \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{x})\right| \quad (\underline{u} \in B(\underline{x}) - R(Y))$$

всякий раз, когда

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{x})\right| \geqslant c_5 t\nu_j L_j Y^{-3}.$$

Так как $L_j \ll Y$, то

$$\frac{\partial^k\varphi}{\partial u_j^k}(\underline{u}) \ll_k \frac{t\nu_j}{Y^{k+1}} \ll \left(t\nu_j L_j Y^{-3}\right) L_j^{1-k} \ll \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{x})\right| L_j^{1-k}$$

при $k \geqslant 2$ и $\underline{u} \in B(\underline{x}) \cap R(Y)$.

Предположим, что существует индекс j, для которого

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(\underline{x})\right| \geqslant \Psi t\nu_j L_j Y^{-3} \tag{4.13}$$

при $\Psi \geqslant c_5$, и одновременно выполняется неравенство

$$\nu_j \geqslant \frac{64}{c_1^2} Y t^{-1} \tag{4.14}$$

(последнее неравенство влечет $L_j = (t\nu_j/Y^3)^{-1/2}$). Из леммы 2 теперь следует

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\varphi(\underline{u})} W_5(\underline{u})\, du_j \ll_N \Delta L_j \Psi^{-N}.$$

Поэтому

$$I(\underline{x}) \ll_N \Delta L \Psi^{-N},$$

так что общий вклад таких $\underline{x}$ в (4.11)

$$\ll_N \Delta Y^2 \Psi^{-N}.$$

Остается рассмотреть множество X тех $\underline{x}$, для которых (4.13) не выполняется одновременно для $j = 1, 2$, а (4.14) выполняется. Общий вклад таких $\underline{x}$ в (4.11) есть $O(\Delta \operatorname{mes}(X))$, где $\operatorname{mes}(X)$ – мера Лебега множества X. Простое, но изящное вычисление Хис-Брауна ([9, с. 336]) даёт оценку

$$\operatorname{mes}(X) \ll \Psi^2 Y^3 t^{-1} \nu_1^{-1/2} \nu_2^{-1/2}.$$

Таким образом, существует константа $c_5 > 0$ такая, что для любого целого $N \geqslant 0$

$$F(\underline{l}, \underline{p}) \ll_N \Delta Y^2 \Psi^{-N} + \Delta \Psi^2 Y^3 t^{-1} \nu_1^{-1/2} \nu_2^{-1/2}, \tag{4.15}$$

если $\Psi \geqslant c_5$.

4.5. Оценим $\sum(\underline{l}, y)$ (см. (4.4)). Поскольку $\nu_j \ll H$, неравенство (4.10) может быть использовано при $|\mu_j| \gg tHY^{-2}$. В силу (4.10),

$$F(\underline{l}, \underline{p}) \ll_N \Delta Y^2 \left(Y |\underline{p}|\right)^{-N},$$

если $|\underline{p}| \gg tHY^{-2}$. Беря $N = 3$, имеем вклад в (4.4)

$$\ll \Delta Y^{-1} \sum_{\underline{p} \neq \underline{0}} |\underline{p}|^{-3} \ll \Delta Y^{-1}.$$

Для $|\underline{p}| \ll tHY^{-2}$ используем (4.15). Пусть $\Psi = c_5 Y^{\varepsilon/2}$ и $N \geqslant 4/\varepsilon$, тогда имеем

$$F(\underline{l}, \underline{p}) \ll \Delta + \Delta Y^{3+\varepsilon} t^{-1} \nu_1^{-1/2} \nu_2^{-1/2}.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{\underline{p}} F(\underline{l}, \underline{p}) \ll \Delta \Big\{ 1 + (tHY^{-2})^2 \Big\} \cdot \Big\{ 1 + Y^{3+\varepsilon} t^{-1} \left(l_1^2 + a l_2^2\right)^{-1/2} \Big\},$$

где суммирование идёт в пределах:

$$0 < |\underline{p}| < tHY^{-2}.$$

Следовательно,

$$\sum(\underline{l}, y) \ll \Delta t^2 H^2 Y^{-4} + \Delta t H^2 Y^{-1+\varepsilon} \left(l_1^2 + l_2^2\right)^{-1/2}$$

при условии, что

$$\max\left(1, Y^2 t^{-1}\right) \leqslant H \leqslant c_3 Y. \tag{4.16}$$

Если $\underline{l} = \underline{0}$, то тривиально имеем

$$\sum(\underline{0}, y) = \sum_{\underline{m}} W_3(\underline{u}(\underline{m})) \ll \Delta Y^2,$$

откуда

$$\sum_{|\underline{l}| \leqslant 2H} \left|\sum(\underline{l}, y)\right| \ll$$

$$\ll \Delta\left\{Y^2 + t^2 H^4 Y^{-4} + tH^2 Y^{-1+\varepsilon} \sum_{0<|\underline{l}|\leqslant 2H} \left(l_1^2 + a l_2^2\right)^{-1/2}\right\}. \tag{4.17}$$

Имеет место неравенство

$$\sum_{0<|\underline{l}|\leqslant 2H} \left(l_1^2 + a l_2^2\right)^{-1/2} \ll H Y^{\varepsilon},$$

поэтому (4.17) дает оценку

$$\sum_{|\underline{l}| \leqslant 2H} \left|\sum(\underline{l}, y)\right| \ll \Delta\left\{Y^2 + t^2 H^4 Y^{-4} + tH^3 Y^{-1+2\varepsilon}\right\}.$$

Так как $H_1 \gg H^2$ (см. (4.2)), из (4.3) выводим:

$$S_2(y) \ll \Delta^{1/2}\left\{H^{-1} Y^2 + tHY^{-1} + t^{1/2} H^{1/2} Y^{1/2+\varepsilon}\right\} \tag{4.18}$$

в области (4.16). Выберем $H = Yt^{-1/3}$, которое удовлетворяет (4.16), если $t \geqslant c_3^{-3}$ и $t^{1/3} \leqslant Y \leqslant t^{2/3}$. Для таких Y (4.18) сводится к

$$S_2(y) \ll t^{1/3} y^{-1+\varepsilon/2} \min(1, ty^{-1}) \tag{4.19}$$

ввиду (4.6) и определения $Y = \sqrt{y}$. Имеет место тривиальная оценка

$$S_2(y) \ll \sum_{\underline{m} \in \mathbf{Z}^2} W_2(\underline{u}(\underline{m})) \ll Y^2 y^{-3/2} \min\left(1, ty^{-1}\right),$$

так что (4.19) справедливо также для $Y \leqslant t^{1/3}$. Лемма 1 теперь даёт

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it; Q\right) \ll 1 + \int_1^{t^{4/3}} t^{1/3} y^{-1+\varepsilon/2} \min\left(1, ty^{-1}\right)\, dy +$$

$$+\int_{t^{4/3}}^{\infty} y^{-1/2}\min\left(1, ty^{-1}\right)\, dy \ll t^{1/3+\varepsilon/2},$$

и теорема доказана.

Литература

1. E. C. Titchmarsh, *On Epstein's zeta-function,* Proc. London Math. Soc. (2) **36** (1934), 485–500.
2. E. Bombieri, H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(1/2+it)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **13** (1986), 449–472.
3. E. Hecke, *Über Modulfunktionen und Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung,* I, II, Math. Ann. **114** (1937), 1–28; 316–351.
   E. Hecke, *Mathematische Werke,* Göttingen, 1983, 644–671; 672–707.
4. А. В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами* , Тр. Мат. ин-та АН СССР **65** (1962), 212 с.
5. D. R. Heath-Brown, *Hybrid bounds for Dirichlet L-functions,* I, Invent. Math. **47**, No. 2 (1978), 149–170; II, Quart. J. Math. **31**, No. 122 (1980), 157–167.
6. C. L. Siegel, *Contribution to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions,* Ann. Math. **44** (1943), 143–172.
   C. L. Siegel, *Gesammelte Abhandlungen. Band* II, Berlin etc., 1966, 360–389.
7. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions,* Math. Ann. **152**, No. 1 (1963), 30–64.
8. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function. Second edition,* Oxford , 1986. Русский перевод 1-го издания: Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, М., 1953.
9. D. R. Heath-Brown, *The growth rate of the Dedekind zeta-function on the critical line,* Acta Arithm. **49**, No. 4 (1988), 323–339.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 23 ноября 1999 г.