А.М.Вершик

БИЕКТИВНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВА ЯКОБИ И ПЕРЕСТРОЙКИ ДИАГРАММ ЮНГА

I. В теории комбинаторных тождеств выделяют биективные доказательства как наиболее элементарные и эффективные. Они состоят в явном указании биекции между двумя сериями конечных множеств, откуда следует равенство соответствующих производящих функций. Классический пример - доказательство пентагональной теоремы Эйлера по Франилину (см. [I, 3]); менее известно доказательство тождества Эйлера:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{\prod_{i=1}^{n}(1-q^i)^2}=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{-1}$$

с помощью "квадрата Дюрфи" [I] . В обоих случаях речь идет о биекции между двумя множествами диаграмм Юнга, с которыми так или иначе связаны интересные и трудные тождества. Биективных доказательств, связанных с диаграммами пока немного; это объясняется на наш взгляд тем, что геометрия диаграмм понята и разработана еще недостаточно. Изучение геометрических операций над диаграммами и таблицами, новым примером которых может быть излагаемая ниже перестройка, будет полезно не только для теории тождеств, но и для самой комбинаторики и ее новейших приложений к алгебре и физике. Особенно важно использовать геометрические операции над диаграммами в многомерной комбинаторике (многомерные диаграммы Юнга), где до сих пор практически нет серьезных результатов.

В этой заметке мы приводим биективное доказательство классического тождества Якоби с помощью некоторой операции над диаграммами Юнга. Это доказательство появилось как результат обдумывания работы [2] и последующей беседы с В.И.Арнольдом. Основная идея - деление пополам клеток диаграмм, видимо, новая; она близка к идее координат Фробениуса. Подчеркнем, что связь "геометрия диаграмм $\Longleftrightarrow$ тождества" должна быть использована в обе стороны: в нашем случае известное тождество подсказывает естественную геометрическую операцию , дающую новое доказательство тождества, а преобразование тождества - есть манипуляция над таблицами; но несомненно, что и наоборот, иные геометрические перестройки приводят к другим (возможно новым) тождествам. Было бы интересно развить комбинаторно-геометрический аппарат

параллельный анализу (т.е. дифференцированию, специализации аргументов и др.) тождеств.

2. Тождество Якоби (см. [3] стр.53)

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-q^{2k-1}z^{2})(1-q^{2k-1}z^{-2})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}z^{2k}$$

заменой $z^2=-y$ приводится к виду

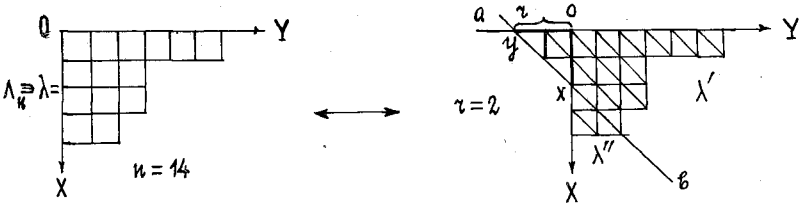
$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+q^{2k-1}y)(1+q^{2k-1}y^{-1})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}y^{k}$$

или

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{2k-1}y)(1+q^{2k-1}y^{-1})=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{-1}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{k^2}y^{k}\ .$$

Легко указать (это делается в [2] , но было хорошо известно и ранее) комбинаторный смысл коэффициентов в левой и правой части. А имеено, коэффициент при $q^{r^2+2n}\,y^{r}$ левой части есть мощность множества $\Gamma_{n,r}$ - пар диаграмм Юнга (нам важна геометрия диаграмм, поэтому мы говорим о них, а не о разбиении натурального числа как в [2] и др.) с общим числом клеток r^2+2n , причем, обе диаграммы имеют лишь нечетные различные длины строк и в первой на r строк больше, чем во второй, $r\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$. Коэффициент в правой части есть мощность множества Λ_n - всех диаграмм с n клетками (и тем самым, не зависит от r). Тождество будет доказано, если доказать $|\Gamma_{n,r}|=|\Lambda_n|\equiv p(n)$.

Зафиксируем r и n ; следующая картина дает биекцию между Λ_n и $\Gamma_{n,r}$, чем исчерпывает наше биективное доказательство. Формулы приводятся ниже (если они необходимы);



Точнее, диаграмме $\lambda\in\Lambda_n$ сопоставляется пара диаграмм λ', λ'' следующим образом: проводится прямая (ab) парал-

лельно главной диагонали через точку $x=(0,r)$, $r\in\mathbb{Z}$ к диаграмме λ, как к множеству, добавляется треугольник $x\sigma y$, где $y=(ab)\cap Y$, затем все клетки делятся пополам отрезками параллельными (ab); диаграмма λ' есть диаграмма над прямой (ab), λ'' – под прямой (ab); точнее, строки λ' есть строки расширенной части диаграммы λ, лежащей над (ab) а строки λ'' – столбцы части диаграммы λ, лежащей под (ab) старая клетка считается за две. Формулы: если $r\geq 0$; $\lambda_1\dots\lambda_t$ – длины строк, а $\mu_1,\dots\mu_s$ – длины столбцов диаграммы λ (конечно, μ_i выражается через λ_j и обратно), то длины строк диаграмм λ' и λ'' таковы: $\lambda'_i=2\lambda_i+2(r-i)+1$ $i=1,\dots m$, где $m=t$, если $t<r$ и $m=k$ при $t\geq r$ а k – решение уравнения $\lambda_k+r=k$ (оно единственно, если $t\geq r$);

$$\lambda''_i=2\mu_1-2(r-i)+1,\qquad i=1,\dots m-r.$$

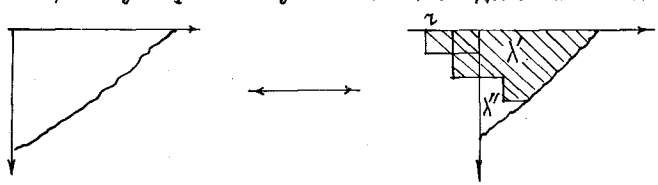
Если $r<0$, то следует поменять ролями λ' и λ'' и использовать те же формулы. Из картинки и формул видно, что λ'_c λ''_i нечетны, что среди λ'_i (как и λ''_i) нет равных u, что число строк в λ' на r больше, чем в λ''. Общее число клеток в λ' и λ'' равно $2n+1+3+\dots+2r-1=2n+r^2$.

Обратимость построения показывает, что это биекция между Λ_n и $\Gamma_{n,r}$. Тождество доказано.

3. Если сделать замену $q\to\sqrt{q}$, $y\to\sqrt{q}\,y$, то тождество Якоби приобретет форму

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k y)(1+q^{k-1}y^{-1})=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}q^{\frac{k^2+k}{2}}y^k.$$

Отвечающая ему картинка чуть иная: (нет деления пополам)



Заметим, что при $y=1$ из последнего тождества следует

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k)^2=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)^{-1}\cdot\sum_{k=0}q^{\frac{k^2+k}{2}}.$$

Это тождество, как и более сложные из серии тождеств Макдональда (см. [4]) также имеет комбинаторно-геометрический смысл в терминах диаграмм Юнга, но он пока нуждается в прояснении и упрощении.

Литература

1. Холл М., Комбинаторика. М., 1970.
2. Лейбензон З.М. Простой комбинаторный метод для доказательства тождества Якоби и его обобщений. - Функц.анал. и его прил., 1986, т.20, № 1, с.77-78.
3. Эндрюс Г. Теория разбиений. М., 1982.
4. Фукс Д.Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М., 1984.

Vershik A.M. A bijective proof of the Jacobi identity and reshapings of the Young diagrams.

An elementary combinatorial proof of the classical Jacobi identity for theta-series is presented.