



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. V. Boikov, The approximate solution of
singular integral equations,
Mat. Zametki, 1972, Volume 12, Issue 2, 177–
186

<https://www.mathnet.ru/eng/mzm9866>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru
implies that you have read and agreed to these terms of use
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

May 21, 2025, 08:37:50



К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. В. Бойков

В работе предлагается вычислительная схема коллокационного типа для линейного сингулярного интегрального уравнения со степенной особенностью в регулярном интеграле и дается ее обоснование. Полученные результаты используются для обоснования приближенного решения сингулярного интегрального уравнения

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{h(t, \tau)x(\tau)}{|\tau-t|^\delta} d\tau = f(t)$$

одной модификацией метода минимальных невязок. Библи. 11 назв.

§ 1. Приближенное решение линейного сингулярного интегрального уравнения. В этом параграфе рассматривается приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (с.и.у.)

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau-t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau)x(\tau)}{|\tau-t|^\delta} d\tau = f(t), \quad (1.1)$$

где γ — единичная окружность с центром в начале координат, функции $a(t)$, $b(t)$, $h(t, \tau)$, $f(t) \in C_{2\pi}$, $\delta < 1$.

В случае, когда $a, b, h, f \in H_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), $\delta = 0$, приближенное решение уравнения (1.1) методом коллокации полностью рассмотрено В. В. Ивановым [1, 2], а методом механических квадратур Б. Г. Габдулхаевым [3].

1°. Метод вычислений. Приближенное решение уравнения (1.1) ищется в виде многочлена

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которого определяются из системы линейных алгебраических уравнений, записываемых в операторной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{K}\tilde{x} \equiv P \left[a(t) \tilde{x}(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{x}(\tau) d\tau}{\tau - t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P_{\tau} [h^*(t, \tau) \tilde{x}(\tau)] d\tau \right] = P [f(t)], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где P — оператор проектирования на множество интерполяционных тригонометрических полиномов по узлам

$$t_k = e^{is_k}, \quad s_k = 2k\pi/(2n+1) \quad (k = \overline{0, 2n}), \quad \tau = e^{i\sigma}, \quad t = e^{is},$$

$h^*(t, \tau) = h(t, \tau) d(t, \tau)$, $d(t, \tau) = |\tau - t|^{-\delta}$ при

$$|\sigma - s| \geq 2\pi/(2n+1),$$

$$d(t, \tau) = |e^{is_1} - 1|^{-\delta} \quad \text{при} \quad |\sigma - s| < 2\pi/(2n+1).$$

2°. Обоснование метода. Пусть коэффициенты $a(t)$, $h(t, \tau)$, $b(t)$ и правая часть $f(t)$ уравнения (1.1) непрерывны:

$$a(e^{is}), b(e^{is}), h(e^{is}, e^{i\sigma}), f(e^{is}) \in C_{2\pi}. \quad (1.3)$$

Обоснование будем проводить в пространстве функций X со скалярным произведением [2]

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} f_1(t) \overline{f_2(t)} \frac{dt}{it} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t) \overline{f_2(t)} ds, \quad f_1, f_2 \in L_2.$$

Будем считать, что в пространстве X оператор K имеет линейный обратный.

Введем уравнение

$$\begin{aligned} K_1 x \equiv \tilde{a}(t) x(t) + \frac{\tilde{b}(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(t, \tau) d^*(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$ — полиномы наилучшего равномерного приближения степени m для функций $a(t)$, $b(t)$ соответственно, $d^*(t, \tau) = |\tau - t|^{-\delta}$ при $|\tau - t| \geq \rho$, $d^*(t, \tau) = \rho^{-\delta}$ при $|\tau - t| < \rho$, ρ — положительное число, $\rho > s_1$. Числа ρ и m фиксируются ниже.

Из теоремы Банаха следует, что при m и ρ таких, что

$$q_1 = A_1(\rho^{1-\delta} + \omega(a; m^{-1}) + \omega(b; m^{-1})) < 1,$$

оператор K_1 имеет линейный обратный с нормой $\|K_1^{-1}\| \leq \|K^{-1}\| / (1 - q_1)$.

Метод механических квадратур для уравнения $K_1 x = f$ в операторной форме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 \tilde{x} \equiv P \left[\tilde{a}(t) \tilde{x}(t) + \frac{\tilde{b}(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{x}(\tau) d\tau}{\tau - t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P_{\tau} [h(t, \tau) d^*(t, \tau) \tilde{x}(\tau)] d\tau \right] = P[f] = \tilde{f}. \end{aligned}$$

Поставим в соответствие каждой функции $z(t) \in L_2$ функции $z^+(t)$ и $z^-(t)$, аналитические внутри и вне γ соответственно, и связанные с $z(t)$ формулами Племеля — Сохоцкого: $z(t) = z^+(t) - z^-(t)$,

$$I(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{z(\tau) d\tau}{\tau - t} = z^+(t) + z^-(t).$$

Известно [1], [2], что уравнения $K_1 x = f$ и $\tilde{K}_1 \tilde{x} = \tilde{f}$ эквивалентны соответственно следующим уравнениям, записываемым в операторной форме:

$$K_2 x \equiv Vx + Wx = y, \quad K_2 \in [X \rightarrow X] \quad (1.4)$$

и

$$\tilde{K}_2 \tilde{x} \equiv \tilde{V}\tilde{x} + \tilde{W}\tilde{x} = \tilde{y}, \quad \tilde{K}_2 \in [\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}], \quad (1.5)$$

где

$$Vx = \psi^- x^+ - \psi^+ x^-, \quad Wx = \frac{l}{2\pi i} \int_{\gamma} h(t, \tau) d^*(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

$$l = \psi^- / (\tilde{a} + \tilde{b}),$$

$$\psi(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\ln \left[\frac{\tilde{a}(\tau) - \tilde{b}(\tau)}{\tilde{a}(\tau) + \tilde{b}(\tau)} \right] : (\tau - z) \right] d\tau \right\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}\tilde{x} &= P[V\tilde{x}], \\ \tilde{W}\tilde{x} &= P\left[\frac{l}{2\pi i} \int_{\gamma} P_{\tau}[h(t, \tau) d^*(t, \tau) \tilde{x}(\tau)] d\tau\right], \end{aligned}$$

$$y = lf, \quad \tilde{y} = P[y],$$

$\tilde{X} = \left\{ \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k \right\}$ — $(2n+1)$ -мерное пространство полиномов степени не выше n , с той же нормой, что и пространство X .

Для обоснования предложенной вычислительной схемы введем, следуя [1], [2], [4], полином

$$\tilde{\varphi}(t) = V_n \tilde{x} + (T^{[n/2]}[l]) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} T_i^{[n/2]} [h(t, \tau) d^*(t, \tau) \tilde{x}(\tau) d\tau,$$

где $V_n \tilde{x} = \psi_n^- \tilde{x}^+ - \psi_n^+ \tilde{x}^-$, $[n/2]$ — наибольшее целое число, заключающееся в $n/2$, $T^{[n/2]}[f]$ и ψ_n^- — полиномы наилучшего равномерного приближения степени $n/2$ и n для функций f и ψ соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \|K_2 \tilde{x} - \tilde{\varphi}\| + \|PK_2 \tilde{x} - \tilde{\varphi}\| &\leq \\ &\leq A_2 (m^{1-\varepsilon}/n^{1-\varepsilon} + \omega(h; n^{-1})/\rho^{2\delta}) \|\tilde{x}\|, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где ε -произвольное число $0 < \varepsilon < 1^*$.

Оценим теперь **)

$$\begin{aligned} \|\tilde{K}_2 \tilde{x} - PK_2 \tilde{x}\| &\leq \left\| P \left[\frac{l}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\tau} [h(t, \tau) \tilde{x}(\tau) d^*(t, \tau)] d\tau \right] \right\| \leq \\ &\leq A_3 \omega(h; n^{-1}) \|\tilde{x}\|/\rho^{2\delta}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $R = E - P$, E — единичный оператор.

Из (1.6) — (1.7) (полагая $\rho = [\omega(h; n^{-1})]^{1/(1+\delta)}$, $\varepsilon = 1/\ln n$, $m = n^{1/2}$) и теоремы 1 работы [6] следует, что при n таких, что

$$q_2 = A_4 [\omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) + [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)}] < 1,$$

*) Необходимость введения ε следует из теоремы И. И. Привалова [5], так как \tilde{a}, \tilde{b} входят в класс Гёльдера с показателем 1 и с коэффициентами $m \cdot \max |\tilde{a}|$, $m \cdot \max |\tilde{b}|$ соответственно.

**) Предполагается, что если $h(t, \tau) \in H_{\alpha, \alpha}$, то $\alpha < \delta$.

существует линейный оператор \tilde{K}_2^{-1} с нормой $\|\tilde{K}_2^{-1}\| \leq \leq \|K_2^{-1}\| / (1 - q_2)$. При этом

$$\|x^* - \tilde{x}_1^*\| \leq A_5 \{ \omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) + + [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega(f; n^{-1}) \},$$

где x^* и \tilde{x}_1^* — решения уравнений (1.4) и (1.5) соответственно.

Так как уравнения (1.5) и $\tilde{K}_1 \tilde{x} = \tilde{f}$ эквивалентны, то существует линейный оператор \tilde{K}_1^{-1} . Оценим его норму. Так как

$$\|\tilde{x}_1^*\| \leq \|\tilde{K}_2^{-1}\| \|\tilde{y}\| = \|\tilde{K}_2^{-1}\| \|P[lP[f]]\| \leq \|\tilde{K}_2^{-1}\| \|l\| \|P[f]\|,$$

то $\|\tilde{K}_1^{-1}\| \leq \|\tilde{K}_2^{-1}\| \|l\|$.

Нетрудно видеть, что

$$\|\tilde{K}\tilde{x} - \tilde{K}_1\tilde{x}\| \leq A_6 [|a - \tilde{a}| + |b - \tilde{b}| + I_1] \|\tilde{x}\|, \quad (1.8)$$

где

$$I_1 = \left\| P \left[\frac{l}{2\pi i} \int_{\gamma} P_{\tau} [h(t, \tau) \tilde{x}(\tau) b(t, \tau)] d\tau \right] \right\|,$$

$$b(t, \tau) = [d^*(t, \tau) - d(t, \tau)].$$

I_1 можно представить в следующем виде:

$$I_1 \leq \max_s \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_{\sigma} [h(s, \sigma) \operatorname{sgn} [b(s, \sigma)] |b(s, \sigma)|^{1/2}]|^2 d\sigma \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_{\sigma} [\tilde{x}(\sigma) e^{i\sigma} P_s [|l(s)| |b(s, \sigma)|^{1/2}]]|^2 d\sigma \right\} ds \right\}^{1/2} = I_2 \cdot I_3. \quad (1.9)$$

где

$$h(s, \sigma) = h(e^{is}, e^{i\sigma}), \quad b(s, \sigma) = b(e^{is}, e^{i\sigma}), \quad l(s) = l(e^{is}).$$

Обозначив через v величину $[\rho(2n+1)/2\pi] + 1$, где $[m]$ — наибольшее целое число, не превосходящее m , оценим I_2 :

$$I_2^2 \leq A_7 \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^v \left(\frac{1}{s_k} \right)^{\delta} \leq A_8 \left[\frac{1}{(2n+1)^{1-\delta}} + \rho^{1-\delta} \right]. \quad (1.10)$$

Нетрудно видеть, что

$$I_3^2 = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{2n} |\tilde{x}(s_i)|^2 |b(s_k, s_i)| |l(s_i)|^2 \leq \leq \frac{|l|}{(2n+1)^2} \sum_{i=0}^{2n} |\tilde{x}(s_i)|^2 \sum_{k=0}^{2n} |b(s_k, s_i)| \leq A_9 \|\tilde{x}\|^2 \rho^{1-\delta}. \quad (1.11)$$

Из оценок (1.9) — (1.11) (при приведенных выше значениях m, ρ) и теоремы Банаха следует

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор K имеет линейный обратный и выполнены условия (1.3). Тогда при n таких, что

$$q = A_{10} [\omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) + [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)}] < 1,$$

уравнение (1.2) однозначно разрешимо при любой правой части, причем

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq A_{11} [\omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) + [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega(f; n^{-1})],$$

где x^* и \tilde{x}^* — решения уравнений (1.1) и (1.2) соответственно (через A_i обозначены вполне определенные постоянные, не зависящие от n).

З а м е ч а н и е 1. Величины A_i могут быть легко оценены, если известна $\|K^{-1}\|$. Последнюю можно оценить, пользуясь результатами монографии [2].

З а м е ч а н и е 2. Выше был рассмотрен случай, когда индекс κ уравнения (1.1) равен 0. Случай произвольного индекса сводится к предыдущему [2].

З а м е ч а н и е 3. Так как X — гильбертово пространство, то для нахождения решения уравнения (1.2) может быть применен метод наискорейшего спуска [7].

§ 2. Приближенное решение уравнения (2.3)

1°. Одна теорема метода минимальных невязок. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H уравнение

$$Kx = 0, \quad (2.1)$$

где K — нелинейный оператор, действующий из H в H . Для решения уравнения (2.1) может быть применен [8] итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \{\|Kx_n\|^2 / \|K'(x_0)Kx_n\|^2\} [K'(x_0)]^* Kx_n, \quad (2.2)$$

где $K'(x_0)$ — производная Гато оператора \bar{K} в точке x_0 , $[K'(x_0)]^*$ — сопряженный $K'(x_0)$ линейный оператор, x_0 — начальное приближение. Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия:

$$1) \|Kx_0\| \equiv \delta_0;$$

2) оператор K имеет производную Гато в окрестности точки x_0 , причем $\|K'(x_0)h\| \geq \frac{1}{c} \|h\|$, $\|K'(x_0)\| \leq a$;

3) в сфере $S[x; \|x - x_0\| \leq r]$ ($r = ac^2\delta_0/(1 - q)$, $q = Lac^2 + \sqrt{1 - 1/a^2c^2} < 1$) выполняется неравенство

$$\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leq L.$$

Тогда уравнение (2.1) имеет в S единственное решение x^* , к которому сходятся приближения (2.2), причем

$$\|x^* - x_n\| \leq aq^n\delta_0/(1 - q).$$

Для доказательства теоремы достаточно, воспользовавшись неравенством [9]

$$\begin{aligned} & \|Kx_1 - Kx_2 - K'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leq \\ & \leq \|K'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) - K'(x_0)\| \cdot \|x_1 - x_2\| \quad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

повторить в основных чертах (рассуждения теоремы 13.2 монографии [8]).

2°. В этом пункте обосновывается одна модификация метода минимальных невязок для с.и.у.

$$\begin{aligned} Kx \equiv a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{\tau - t} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{|\tau - t|^{\delta}} d\tau - f(t) = 0, \quad (2.3) \end{aligned}$$

где $h_u(t, \tau, u) \in C_{2\pi}$.

Приближенное решение уравнения (2.3) будем искать с помощью итерационного процесса

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \{ \|\tilde{K}\bar{x}_n\|^2 / \|\tilde{K}'(\bar{x}_0)\tilde{K}\bar{x}_n\|^2 \} [\tilde{K}'(\bar{x}_0)]^* \tilde{K}\bar{x}_n, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{K}\bar{x} \equiv P[a(t)\bar{x}(t) + b(t)I(\bar{x}) + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P[h(t, \tau)\bar{x}(\tau) d(t, \tau)] d\tau - f], \end{aligned}$$

$x_0(t)$ — достаточно хорошее приближение к решению $x^*(t)$ уравнения (2.3), $\tilde{x}_0 = P[x_0]$; $\tilde{x}(t)$ — тригонометрический полином степени не выше n .

Будем считать выполненными условия:

- 1) $a(t), b(t), f(t), h(t, \tau, u), h'_u(t, \tau, u), x_0(t) \in C_{2\pi}$;
- 2) в некоторой сфере S (определенной ниже)

$$\max_{t, \tau \in Y} |h'_u(t, \tau, u_1) - h'_u(t, \tau, u_2)| \leq F_1(u_1, u_2 \in S). \quad (2.5)$$

Обоснование будем проводить в гильбертовом пространстве X . При выполнении условий (2.5) оператор K имеет производную Фреше

$$\begin{aligned} K'(x)\tilde{z} &\equiv \\ &\equiv a(t)\tilde{z}(t) + b(t)I(\tilde{z}) + \frac{1}{2\pi i} \int_Y \frac{h'_u(t, \tau, x(\tau))\tilde{z}(\tau)}{|\tau - t|^\delta} d\tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

причем справедливо неравенство

$$\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leq A_1 F_1. \quad (2.7)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_4 &= K(x + \tilde{z}) - K(x) - K'(x)\tilde{z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_Y \left\{ \left\{ \int_0^1 [h'_u(t, \tau, x(\tau) + v\tilde{z}(\tau)) - h'_u(t, \tau, x(\tau))] dv \right\} \cdot \right. \\ &\quad \left. \tilde{z}(\tau) |\tau - t|^{-\delta} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для доказательства (2.6) введем, следуя [10], произвольное ε ($\varepsilon > 0$). Если $|\tilde{z}| \gg \varepsilon$, то из тождества (2.8) следует, что $\|I_4\| \leq A_1 \|\tilde{z}\| \omega(h'_4; |\tilde{z}|)$. Если $|\tilde{z}| > \varepsilon$, то из этого же тождества и [11] следует, что

$$\|I_4\| / \|\tilde{z}\| \leq \|I_4\| / (\varepsilon) \leq A_2 \|\tilde{z}\| / (\varepsilon).$$

Справедливость (2.6) доказана. Аналогично доказывается (2.7).

Нетрудно видеть, что производная Фреше оператора \tilde{K} имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{K}'(x)\tilde{z} &\equiv P[a(t)\tilde{z}(t) + b(t)I(\tilde{z}) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_Y P[h'_u(t, \tau, \tilde{x}(\tau))d(t, \tau)\tilde{z}(\tau)] d\tau]. \end{aligned}$$

Повторяя предыдущие рассуждения, получаем оценку

$$\|\tilde{K}'(\tilde{x}_1) - \tilde{K}'(\tilde{x}_2)\| \leq A_3 F_1. \quad (2.9)$$

Будем считать, что существует линейный оператор $[K'(x_0)]^{-1}$. Существование линейного оператора $[\tilde{K}'(\tilde{x}_0)]^{-1}$ следует из теоремы Банаха при n таких, что $q_1 = A_4 \omega(h_u'; \omega(x_0; n^{-1})) < 1$.

В предыдущем параграфе доказано существование линейного оператора $[\tilde{K}'(\tilde{x}_0)]^{-1}$ с нормой, равной B_0 .

Обозначив через δ_0 величину $\|Kx_0\|$, оценим $\|\tilde{K}\tilde{x}_0\|$:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_0 &= \|\tilde{K}\tilde{x}_0\| \leq \|Kx_0\| + \|Kx_0 - K\tilde{x}_0\| + \\ &\quad + \|K\tilde{x}_0 - P[K\tilde{x}_0]\| + \|P[K\tilde{x}_0] - \tilde{K}\tilde{x}_0\| \leq \\ &\leq \delta_0 + A_5 [\omega(a; n^{-1}) + \omega(b; n^{-1}) + [\omega(h; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \\ &\quad + \omega(x_0; n^{-1})]. \end{aligned}$$

Введем обозначение $\{\|K'(x_0)\|, \|\tilde{K}'(\tilde{x}_0)\|\} = B_*$. Полагая, что в сфере $S[x; \|x - x_0\| \leq r]$, где

$$r = B_* B_0^2 \tilde{\delta}_0 / (1 - q) + \omega(x_0; n^{-1}),$$

$$q = [\max(A_1, A_3)] F_1 B_* B_0^2 + \sqrt{1 - 1/B_*^2 B_0^2} < 1,$$

выполняется неравенство (2.5), убеждаемся в выполнении условий теоремы 1 § 2. Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть в сфере $S[x; \|x - x_0\| \leq r]$

$$(r = B_* B_0^2 \delta_0 / (1 - q) + \omega(x_0; n^{-1}),$$

$$q = [\max(A_1, A_3)] F_1 B_* B_0^2 + \sqrt{1 - 1/B_0^2 B_*^2} < 1$$

выполнены условия (2.5) и оператор $K'(x_0)$ имеет линейный обратный. Тогда при n таких, что

$$\begin{aligned} p &= A_3 [\omega(a; n^{-1/2}) + \omega(b; n^{-1/2}) + \\ &\quad + [\omega(h_u'; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega(h_u'; \omega(x_0; n^{-1}))] < 1, \end{aligned}$$

уравнение $\tilde{K}\tilde{x} = 0$ имеет в S единственное решение \tilde{x}^* , к которому сходится итерационный процесс (2.4). Расстояние между \tilde{x}^* и решением x^* уравнения (2.3)

оценивается неравенством

$$\|x^* - \tilde{x}^*\| \leq A_0 [\omega(a; n^{-1}) + \omega(b; n^{-1}) + \\ + [\omega(h'_i; n^{-1})]^{(1-\delta)/(1+\delta)} + \omega(x_0; n^{-1}) + \omega(f; n^{-1})].$$

Казанский государственный
университет

Поступило
13.X.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] И в а н о в В. В., О применении метода моментов и смешанного метода к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, 114, № 5 (1957), 945—948.
- [2] И в а н о в В. В., Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений, Киев, 1968.
- [3] Г а б д у л х а е в Б. Г., Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Докл. АН СССР, 179, № 2 (1968), 260—264.
- [4] Ф а н В а н Х а ц, Об одном методе приближенного решения сингулярных интегральных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 2 (1965), 171—184.
- [5] М у с х е л и ш в и л и Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.
- [6] Г а б д у л х а е в Б. Г., Некоторые вопросы теории приближенных методов I, Изв. вузов. Математика, № 9 (1968), 16—28.
- [7] К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.
- [8] К р а с н о с е л ь с к и й М. А., В а й н и к к о Г. М., З а б р е й к о П. П., Р у т и ц к и й Я. Б., С т е ц е н к о В. Я., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969.
- [9] В а й н б е р г М. М., Вариационные методы исследования нелинейных уравнений, М., 1956.
- [10] Г у с е й н о в А. И., О производной Фреше оператора $Au \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \Phi[s, u(s)] \cdot \text{ctg}(s-x)/2 ds$. Уч. зап. Азербайджанского ун-та, Физ.-матем. и хим. сер., № 1 (1959), 3—5.
- [11] М и х л и н С. Г., Курс математической физики. М., 1968.