Е. М. Ландис, О поведении решения параболического уравнения на характеристике, *Матем. заметки*, 1972, том 12, выпуск 3, 257–262

https://www.mathnet.ru/mzm9876

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 257—262

УДК 517.9

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Е. М. Ландис

Рассматривается решение линейного параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной и нулевой правой частью. Доказывается, что из того, что при подходе к некоторой точке решение достаточно быстро убывает по пространственной переменной, следует, что оно обращается в нуль на куске характеристики, соединяющем эту точку с границей области, где определено решение. Библ. 2 назв.

Рассматривается уравнение

$$u_t = a(t, x)\, u_{xx} + b(t, x)\, u_x + c(t, x)\, u \tag{1}$$

в прямоугольнике $P_0 = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ a \leqslant x \leqslant b\}$. Относительно коэффициентов предполагается, что $a(t, x)$ и $b(t, x)$ непрерывно дифференцируемы и выполнены неравенства

$$0 < a_1 < a(t, x) < a_2, \tag{2'}$$

$$|b(t, x)| < M, \quad -M < c(t, x) \leqslant 0. \tag{2''}$$

Пусть $u(t, x)$ — решение этого уравнения в прямоугольнике P_0. В заметке [1] было доказано следующее утверждение. Если $u(T, x) \equiv 0$ при $a < \alpha < x < \beta < b$, то $u(T, x) \equiv 0$ по крайней мере на одном из двух отрезков $[a, \alpha]$ или $[\beta, b]$.

В предлагаемой заметке этот результат усиливается следующим образом.

ТЕОРЕМА. *Пусть $u(t, x)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (1), *определенное в P_0. Существует константа K, зависящая от уравнения, та-*

кая, что если для некоторого x_0, $a < x_0 < b$, и $C > 0$ справедливо неравенство

$$|u\ (T,\ x)| < Ce^{-K/|x-x_0|},\quad a \leqslant x \leqslant b,\quad x \neq x_0, \qquad (3)$$

то $u\ (T,\ x) \equiv 0$ по крайней мере на одном из отрезков $[a,\ x_0]$ или $[x_0,\ b]$.

1°. При доказательстве теоремы используются следующие две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть G — область, расположенная в полосе между прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$, $t_2 > t_1$, и имеющая предельные точки на обеих сторонах этой полосы. Пусть проекция G на ось x принадлежит отрезку $[a,\ b]$. Обозначим через Γ ту часть границы области G, которая лежит строго внутри полосы. Пусть в G определено решение u уравнения (1), непрерывное в замкнутой области и обращающееся в нуль на Γ. Тогда имеет место неравенство*

$$\max_x |u(t_1, x)| \geqslant 2^{-\xi(t_2-t_1)^3/(\mu_2 G)^2} \max_x |u(t_2, x)|,$$

где $\xi > 0$ — константа, зависящая от уравнения и от разности $b - a$.

(Через $\mu_2 A$ здесь и дальше обозначается плоская мера Лебега множества A.)

Эта лемма совпадает с леммой 1 заметки [1].

ЛЕММА 2. *Пусть $0 < \lambda < 1$ и $t_0 \geqslant 0$ — два числа. Обозначим через Π полоску с изломом на плоскости $(t,\ x)$, определяемую неравенствами*

$$\sqrt{\lambda}\,|x| - t_0 - \lambda < t < \sqrt{\lambda}\,|x| - t_0.$$

Пусть компоненты границы этой полоски соединены кривой Γ, расположенной ниже оси x. (Мы считаем, что ось x направлена направо, а ось t — вверх.) *Обозначим через G связную часть полоски Π между кривой Γ и правым из тех двух интервалов, по которым Π пересекается с осью x.*

Пусть в G определено решение u уравнения (1), непрерывное в $\bar{G}$ и обладающее следующими свойствами:

$$u\,|_\Gamma = u_0 > 0,\quad u\,|_{t=0} < u_0/2,\quad u > -u_0 \text{ в } G.$$

Обозначим через G' множество точек $(t,\ x) \in G$, в которых $u_0/2 < u\ (t,\ x) < u_0$. Тогда

$$\mu_2 G > \eta\lambda^{3/2}, \qquad (4)$$

где $\eta > 0$ — *константа, зависящая от констант* a_1, a_2 *и* M *неравенств* (2′), (2″).

Эта лемма доказывается так же, как и лемма 2 заметки [1].

2°. Доказательство теоремы. Допустим, что существуют точки $x_1 \in (a, x_0)$ и $x_2 \in (x_0, b)$ такие, что $u(T, x_1) \neq 0$, $u(T, x_2) \neq 0$. Так как решение u можно умножать на константу, то, не ограничивая общности, можно считать, что существует $h > 0$ такое, что $|u(t, x_1)| > 1$ и $|u(t, x_2)| > 1$ при $T - h \leqslant t \leqslant T$.

Известно [2], что множество N таких точек u_0 оси значений функции u, для которых множество уровня $u(t, x) = u_0$ содержит точку, где $\operatorname{grad} u = 0$, имеет меру нуль. Поэтому можно считать, что множества уровня $u = \pm 2^{-m}$, $m = 1, 2, \ldots$, не содержат точек с нулевым градиентом. Действительно, найдется константа $K_1 > 1$ такая, что $\pm 2^{-m}/K_1 \notin N$, $m = 1, 2, \ldots$, и вместо решения u можно рассмотреть решение $K_1 u$.

Из условия (3) вытекает, что для как угодно больших натуральных m найдутся точки $x_m \in [(x_1 + x_0)/2, x_0]$ такие, что выполнены неравенства

$$1 > |u(T, x_m)| > 2^{-m}, \ |u(T, x)| < 2^{-(m+K)}$$
$$\text{при } x_m + 1/m < x < x_m + 2/m.$$

Пусть $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ — те натуральные числа, для которых существуют такие x_m. Пусть, кроме того, m_1 уже столь велико, что $2/m_1^3 < h$ и $8/m_1 < x_0 - x_1$.

Положим

$$\Pi_i^k = \left\{(t, x) \middle| t < T; \frac{1}{m_k^2}\left|x - x_{m_k}\right| + T - \frac{1}{m_k^3}\left(1 + \frac{i-1}{m_k^2}\right) < \right.$$
$$\left. < t < \frac{1}{m_k^2}|x - x_{m_k}| + T - \frac{1}{m_k^3}\left(1 + \frac{i}{m_k^2}\right)\right\}, i = 1, \ldots, m_k,$$

так что Π_i^k при каждом i и k является куском полоски с изломом, ограниченным сверху прямой $t = T$.

Фиксируем некоторое k. Пусть для определенности $u(T, x_{m_k}) > 0$ (случай $u(T, x_{m_k}) < 0$ симметричен). Множество уровня $u(t, x) = u(T, x_{m_k})$ разделяет в каждом из Π_i^k, $i = 1, \ldots, m_k$, левый и правый горизонтальные участки границы. Рассмотрим Π_i^k при некотором i.

Обозначим через $\Delta^k_{i,\text{лев}}$ и $\Delta^k_{i,\text{пр}}$ соответственно левый и правый горизонтальные куски границы Π^k_i. Если из границы Π^k_i удалить $\Delta^k_{i,\text{лев}}$ и $\Delta^k_{i,\text{пр}}$, то останутся два связных ее куска в виде уголков. Верхний из них обозначим через Γ^{k+}_i, а нижний — через Γ^{k-}_i. Если непересекающиеся кривые l_1 и l_2, лежащие в Π^k_i, соединяют Γ^{k-}_i и Γ^{k+}_i, то будем говорить, что l_2 лежит правее l_1, если l_2 отделяет l_1 от $\Delta^k_{i,\text{пр}}$ в Π^k_i. Будем говорить, что точка $(t, x) \in \Pi^k_i$ лежит правее кривой $l \subset \Pi^k_i$, соединяющей Γ^{k-}_i и Γ^{k+}_i, если эта точка не отделена кривой l от $\Delta^k_{i,\text{пр}}$.

Пусть натуральное s удовлетворяет неравенству $m_k \leqslant s < m_k + K$. Тогда пересечение множества уровня $u = 2^{-s}$ с Π^k_i содержит по крайнем мере одну компоненту, соединяющую Γ^{k-}_i с Γ^{k+}_i. Рассмотрим все компоненты пересечения множеств уровня $u = 2^{-s}$ и $u = -2^{-s}$ в Π^k_i, соединяющие Γ^{k-}_i с Γ^{k+}_i, и среди них выберем самую правую. Обозначим ее через $\lambda^+_{k,i,s}$ или $\lambda^-_{k,i,s}$ в зависимости от того, принадлежит она множеству уровня $u = 2^{-s}$ или $u = -2^{-s}$.

Скажем, что $\lambda^+_{k,i,s}$ ($\lambda^-_{k,i,s}$) есть компонента 1-го рода соответствующего множества уровня в Π^k_i, если в Π^k_i правее ее выполняется неравенство $u > -2^{-s}$ ($u < 2^{-s}$). В противном случае назовем ее компонентой 2-го рода.

Если $\lambda^+_{k,i,s}$ ($\lambda^-_{k,i,s}$) — компонента 1-го рода, то по лемме 2 множество $G_{k,i,s}$ точек $(t, x) \in \Pi^k_i$, в которых $2^{-(s+1)} < |u(t, x)| < 2^{-s}$ удовлетворяет неравенству

$$\mu_2 G_{k,i,s} > \eta / m_k^6, \tag{5}$$

где η — константа неравенства (4), т. е. зависит от уравнения, но не зависит от k, i и s.

Выберем теперь в неравенстве (3) константу K из условия

$$K\eta > 16. \tag{16}$$

Назовем число s числом 1-го рода, если не меньше чем для половины значений i ($i = 1, \ldots, m_k$) соответствующая компонента $\lambda^+_{k,i,s}$ или $\lambda^-_{k,i,s}$ будет компонентой 1-го рода. Среди чисел $s = m_k, \ldots, m_k + K - 1$ по крайней мере половина чисел не является числами 1-го рода. Действительно, допустим, что это не так. Множества $G_{k,i,s}$ при данном фиксированном k попарно не пересекаются, и по неравенствам (5) и (6)

$$\mu_2 \bigcup_{s=m_k}^{m_k+K-1} \bigcup_{i=1}^{m_k} G_{k,i,s} > 4/m_k^4,$$

что превосходит сумму площадей всех Π_i^k.

Итак, больше половины значений s не являются числами 1-го рода, следовательно, найдется по крайней мере одно такое значение. Обозначим его s_k. Мы имеем $m_k \leqslant s_k < m_k + K$, и существуют по крайней мере $m_k/2$ значений i таких, что соответствующие λ_{k,i,s_k}^+ (или λ_{k,i,s_k}^-) являются компонентами 2-го рода.

Если λ_{k,i,s_k}^+ (λ_{k,i,s_k}^-) 2-го рода, то в Π_i^k правее λ_{k,i,s_k}^+ (λ_{k,i,s_k}^-) имеется точка, где $u = -2^{-s_k}$ $(u = 2^{-s_k})$. Всякая компонента множества уровня, пересекающая Π_i^k, необходимо пересекает и все Π_j^k при $j > i$. Отсюда следует, что если обозначить через P_1 прямоугольник, ограниченный прямыми $t = T - h$, $t = T - \frac{h}{2}$, $x = x_1$ и $x = x_2$, то существует по крайней мере $m_k/2$ различных кривых, лежащих в нем, соединяющих верхнее основание с нижним, на которых $|u| = 2^{-s_k}$, причем на соседних кривых знак функции u различен. Пусть эти кривые, перенумерованные слева направо, суть $L_1, \ldots, L_r$, $r \geqslant m_k/2$. Каждую кривую L_j, кроме, быть может, крайних двух, можно погрузить в область g_j такую, что $u = 0$ на той части ее границы, которая не принадлежит верхнему и нижнему основаниям прямоугольника P_1.Среди них найдется область g_{j_0}, площадь которой удовлетворяет неравенству

$$\mu_2 G_{j_0} < \frac{h(x_2 - x_1)}{(m_k/2) - 2} < C/m_k,$$

где $C > 0$, таким образом,— константа, не зависящая от k (мы можем считать, что $m_k > 4$).

По лемме 1 находим тогда

$$\max_x u(T - h, x) > 2^{\xi (h/2)^3 (m_k/C)^2} \max_{x \in \bar{g}_{j_0}} (T - h/2, x) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{C_1 m_k^2} \cdot 2^{-s_k} > 2^{C_1 m_k^2 - m_k - K}.$$

Здесь $C_1 > 0$ — положительная константа, не зависящая от k, и так как m_k могут быть как угодно велики, а решение u в P_1 ограничено, то мы приходим к противоречию, доказывающему теорему.

3°. Условия, наложенные на коэффициенты b и c, могут быть ослаблены: достаточно предполагать, что b и c — ограниченные измеримые функции. Можно также рассматривать уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(t, x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + c(t, x)\, u,$$

где $a(t, x)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию (2′), и $c(t, x)$ ограничена и измерима. Для слабого решения такого уравнения теорема остается справедливой.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
12.IV.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландис Е. М., Об одном свойстве решений параболического уравнения, Докл. АН СССР, 109, № 2 (1966), 262—265.

[2] Кронрод А. С., Ландис Е. М., О множествах уровня функций многих переменных, Докл. АН СССР, 58, № 7 (1947), 1269—1272.