



Общероссийский математический портал

Э. М. Галеев, О вложении и приближении пересечения множеств и функциональных классов, *Владикавк. матем. журн.*, 2004, том 6, номер 4, 25–30

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

17 марта 2025 г., 23:54:45



УДК 517.5

О ВЛОЖЕНИИ И ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ
МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ¹

Э. М. Галеев

*Владимиру Михайловичу Тихомирову
с любовью*

Дается краткий обзор идей и результатов, связанных с задачей В. М. Тихомирова о приближении классов функций с несколькими ограниченными производными.

В 1975 году Владимир Михайлович Тихомиров на своем спецсеминаре по теории приближений² в МГУ предложил для решения следующую задачу о приближении классов функций с несколькими ограниченными производными. Пусть про функцию известно, не только, как обычно, что ее какая-то r -я производная в метрике L_p ограничена ($\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_p} \leq \beta$), а известна ограниченность ее нескольких производных в различных метриках, т. е. $\|x^{(r^i)}(\cdot)\|_{L_{p^i}} \leq \beta_i$, $i = 1, \dots, m$. Иными словами, найти приближение пересечения классов функций $W_{\bar{p}}^r = \bigcap_{i=1}^m W_{p^i}^{r^i}$ в метрике пространства L_q . В качестве функциональных классов можно рассматривать, например, классы периодических функций.

Задача о нахождении оценки сверху приближения пересечения может быть решена путем вложения класса $W_{\bar{p}}^r$ в класс W_q^γ и дальнейшего приближения этого класса уже в согласованной метрике L_q . Задача о вложении может быть представлена в виде экстремальной задачи:

$$\|x^{(\gamma)}(\cdot)\|_{L_q} \rightarrow \sup; \quad \|x^{(r^i)}(\cdot)\|_{L_{p^i}} \leq \beta_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Поставленная задача была решена автором в 1975 г. и доложена на семинаре В. М. Тихомирова вначале для классов периодических функций одной переменной, а затем для классов периодических функций нескольких переменных с дробными производными и смешанными нормами [1]. Для формулировки полученного результата дадим определения функциональных классов и дробных производных.

Пусть $\mathbf{T}^d = (-\pi, \pi]^d$ — d -мерный тор, реализованный в виде произведения d полуинтервалов $(-\pi, \pi]$. Через $L_p = L_p(\mathbf{T}^d)$, $p = (p_1, \dots, p_d)$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$, обозначим

© 2004 Галеев Э. М.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №02-01-39012 ГФЕН, №02-01-00386).

² Участниками семинара по теории приближений, кроме автора заметки, были в то время студенты и аспиранты В. М. Тихомирова: А. П. Буслаев, Динь Зунг, А. И. Камзолов, Г. Г. Магарил-Ильяев, С. В. Пухов, М. И. Стесин.

пространство функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_d)$ измеримых на \mathbf{T}^d , периодических по каждой переменной с периодом 2π таких, что конечна величина

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} \left[\dots \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} |x(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right]^{p_d/p_{d-1}} dt_d \right\}^{1/p_d}.$$

Свойства пространств со смешанной нормой на \mathbf{T}^d были описаны в вышедшей в 1975 г. монографии О. В. Бесова, В. П. Ильина, С. М. Никольского [2].

Функцию $x(\cdot) \in L_p(\mathbf{T}^d)$ можно разложить в ряд Фурье

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} x_k e^{i\langle k, t \rangle},$$

где суммирование ведется по всем $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ — d -мерной целочисленной решетке, $\langle k, t \rangle = \sum_{i=1}^d k_i t_i$.

Для упрощения формулировок будем рассматривать функции с нулевыми средними по всем аргументам, т. е. функции, коэффициенты Фурье которых x_k , имеющие хотя бы один нулевой индекс k , равны нулю:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k, t \rangle},$$

где $\mathring{\mathbb{Z}}^d := \{k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : k_j \neq 0, j = 1, \dots, d\}$.

Для такой функции и вектора $r = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{R}^d$ введем операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(r)}(t) = \sum_{k \in \mathring{\mathbb{Z}}^d} x_k (ik)^r e^{i\langle k, t \rangle},$$

где $(ik)^r = (ik_1)^{r_1} \dots (ik_d)^{r_d}$, $(ik)^r = |k|^r e^{(i/2)\pi r \text{sign } k}$ (для скаляров k и r).

Для векторов $p, r \in \mathbb{R}^d$, $1 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$, и описанных выше функций с нулевыми средними по всем аргументам введем следующий класс функций:

$$W_p^r(\mathbf{T}^d) = \{x(\cdot) : \|x(\cdot)\|_{W_p^r} := \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_p} \leq 1\}.$$

При формулировке вложений функциональных классов важным является множество $G = \{\text{conv} \{(\frac{1}{p^i}, r^i), i = 1, \dots, m\} + (\nu, 0) - (\lambda, \lambda) : \nu, \lambda \in \mathbb{R}_+^d\}$.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия вложения для пересечения классов функций.

Теорема 1. Пусть $W_{\bar{p}}^{\bar{r}} = \bigcap_{i=1}^m W_{p^i}^{r^i}$, $\gamma, q \in \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$. Тогда $W_{\bar{p}}^{\bar{r}} \subset\subset W_q^\gamma$ тогда и только тогда, когда $(1/q, \gamma) \in G$.

Оценка сверху в этой теореме следует из мультипликативных неравенств. Первые неравенства подобного типа были получены О. В. Бесовым. Расширение этих неравенств дает достаточность условий вложения. Для доказательства необходимости условий вложения строится специальная функция $x(t) = a(D_{N+[N\gamma]}(t) - D_N(t))$, являющаяся некоторой разностью ядер Дирихле, принадлежащая классу $W_{\bar{p}}^{\bar{r}}$. Здесь $D_N(t) = \sum_{|k|=1}^N e^{ikt}$ —

ядро Дирихле. Такая разность ядер Дирихле в дальнейшем использовалась для доказательства необходимости условий вложения и оценок снизу приближения как на \mathbf{T}^d , так и на \mathbb{R}^d в работах автора, Г. Г. Магарил-Ильяева, Динь Зунга и др.

Множество G для скалярных норм видимо впервые появилось в работе Н. С. Бахвалова (1963 г.) [3], где для классов функций близких к H_p^r доказывается, что условие $(1/p, r) \in \text{int } G$, является достаточным для подобного вложения пересечения.

В работе Г. Г. Магарил-Ильяева 1979 г. [4] доказывается теорема о вложениях для функций на \mathbb{R}^d , аналогичная теореме 1. Поскольку для вложения классов на \mathbb{R}^d нет вложения по направлению $(1, 0)$, то множество G в этом случае определяется без конуса по этому направлению: $G = \{\text{conv}\{(\frac{1}{p^i}, r^i), i = 1, \dots, m\} - (\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_+^d\}$. В совместной работе Г. Г. Магарил-Ильяева и В. М. Тихомирова (1984 г.) [5] теорема 1 обобщается на $\mathbb{R}^d \times \mathbf{T}^m$.

Используя полученную теорему 1 о вложении можно перейти к следующему шагу и найти порядки приближения пересечения классов периодических функций с несколькими ограниченными производными оператором Фурье S_N . Для приближения пересечения классов периодических функций нескольких переменных строится оператор Фурье, зависящий от рассматриваемого класса и метрики, в которой считается приближение.

Приближение класса функций W оператором S в линейном нормированном пространстве X оценивается величиной

$$d(W, S, X) = \sup_{x \in X} \|x - Sx\|_X.$$

Сформулируем и докажем теорему о приближении класса W_p^T в пространстве L_q суммами Фурье для векторных норм.

Каждому вектору $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ сопоставим множество $\square_s \subset \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^d$ по следующему правилу:

$$\square_s = \left\{ k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, d \right\}.$$

Тогда

$$x(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^d} x_k e^{i\langle k, t \rangle} = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x(t),$$

где $\delta_s x(t) = \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i\langle k, t \rangle}$. Для множества $A = \{r^i, i = 1, \dots, \nu\} \subset \mathbb{R}^d$ введем оператор

Фурье S_μ^A , действующий на функцию $x(\cdot) = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \delta_s x(\cdot)$ по формуле: $S_\mu^A x(\cdot) = \sum_{s \in \mathcal{S}_\mu^A} \delta_s x(\cdot)$,

где $\mathcal{S}_\mu^A = \bigcap_{r \in A} \mathcal{S}_\mu^r$, $\mathcal{S}_\mu^r = \{s \in \mathbb{N}^d : \langle k, t \rangle \leq \mu\}$. Оператор Фурье S_μ^r сопоставляет функции

$x(\cdot)$ гармоники из ступенчатого гиперболического креста. Оператор Фурье S_μ^A сопоставляет функции $x(\cdot)$ гармоники из пересечения ступенчатых гиперболических крестов.

При приближении пересечения классов периодических функций многих переменных важным этапом является нахождение числа точек в логарифмически полиэдральном множестве, например, числа гармоник в операторе Фурье \mathcal{S}_μ^A . Эта задача была решена Динь Зунгом в 1983 г. [6].

Теорема D1. Пусть $A = \{r^i, i = 1, \dots, \nu\}$, $\text{conv } A \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^d \neq \emptyset$, $S = \{s \in \mathbb{R}_+^d : \langle s, r \rangle \leq 1, r \in A\}$. Тогда

$$\sum_{s \in \mu S \cap \mathbb{N}^d} 2^{\langle s, 1 \rangle} \asymp \mu^l 2^{\mu M},$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи: $\langle s, 1 \rangle \rightarrow \sup; s \in S$.

Для приближения класса $W_{\bar{p}}^{\bar{r}}$ оператором Фурье имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $W_{\bar{p}}^{\bar{r}} = \bigcap_{i=1}^m W_{p^i}^{r^i}$, $\gamma, q \in \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$, $G = \{\text{conv}\{(\frac{1}{p^i}), r^i\}, i = 1, \dots, m\} + (\nu, 0) - (\lambda, \lambda) : \nu, \lambda \in \mathbb{R}_+^d\}$, $G_q = \{\gamma \in \mathbb{R}^d : (1/q, \gamma) \in G\}$. Тогда множество крайних точек $\Gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^\nu\}$ множества G_q конечно, и

$$d(W_{\bar{p}}^{\bar{r}}, S_{\mu}^{\Gamma}, L_q) \asymp 2^{-\mu} \text{ при } \max_{i,j} \gamma_j^i > 0,$$

а если $\text{conv}\Gamma \cap \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+^d \neq \emptyset$, то число гармоник в операторе Фурье $S_N = S_{\mu}^{\Gamma}$ при $\mu^l 2^{\mu M} = N$ имеет порядок N и

$$d(W_{\bar{p}}^{\bar{r}}, S_N, L_q) \asymp (N^{-1} \log^l N)^{1/M},$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи: $\langle s, 1 \rangle \rightarrow \sup; s \in S = \{s \in \mathbb{R}_+^d : \langle s, \gamma \rangle \leq 1 (\forall \gamma \in \Gamma)\}$.

Оценка сверху в этой теореме следует из вложения $W_{\bar{p}}^{\bar{r}} \subset \subset W_q^{\bar{\gamma}}$ по теореме 1, приближения класса $W_q^{\bar{\gamma}}$ в пространстве L_q оператором Фурье S_{μ}^{Γ} и подсчета числа гармоник в логарифмически полиэдральном множестве по теореме D1 Динь Зунга. Для доказательства оценки снизу используется специальная функция, являющаяся некоторой разностью ядер Дирихле, принадлежащая классу $W_{\bar{p}}^{\bar{r}}$ и не приближающаяся оператором Фурье S_{μ}^{Γ} .

Отметим также работу Б. С. Митягина [7], в которой были найдены приближение и порядки колмогоровских поперечников изотропных и анизотропных классов периодических функций многих переменных $W_p^{\bar{r}} = \bigcap_{i=1}^d W_p^{r^i}$ в согласованной метрике пространства L_p , где $r^i = (0, 0, \dots, 0, r_i, 0, \dots, 0)$. Правильное приближение в этом случае дает оператор Фурье с гармониками из прямоугольных параллелипипедов и доказательство в отличие от теоремы 2 легко сводится к одномерному случаю. Аналогично и приближения этих классов в несогласованных метриках считаются путем сведения к одномерному случаю.

Сформулируем и теорему о порядках поперечников по Колмогорову класса $W_{\bar{p}}^{\bar{r}}$ периодических функций одной переменной в пространстве L_q .

Теорема 3 (см. [8]). Пусть $W_{\bar{p}}^{\bar{r}} = \bigcap_{i=1}^m W_{p^i}^{r^i}$, $G = \{\text{conv}\{(\frac{1}{p^i}), r^i\}, i = 1, \dots, m\} + (\nu, 0) - (\lambda, \lambda) : \nu, \lambda \geq 0\}$, $\gamma(\xi) = \sup\{\gamma : (\xi, \gamma) \in G\}$. Тогда

$$d_N(W_{\bar{p}}^{\bar{r}}, L_q) \asymp \begin{cases} N^{-\gamma(1/q)}, & \gamma(1/q) > 0, & 1 \leq q \leq 2, \\ N^{-\gamma(1/2)}, & \gamma(1/2) > 1/2, & 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Задача же о вычислении порядков поперечников по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $W_{\bar{p}}^{\bar{r}}$ в пространстве L_q пока решена не для всех случаев p и q .

Некоторые вопросы вложения и приближения пересечения функциональных классов сводятся путем дискретизации к вложению и приближению пересечения дискретных множеств. Дискретизации могут проводиться разными способами. Одним из наиболее естественных является дискретизация с помощью теоремы Марцинкевича — Зигмунда.

Теорема Марцинкевича — Зигмунда о дискретизации. Между пространством тригонометрических полиномов вида $x(t) = \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i\langle k, t \rangle}$ и пространством $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ устанавливается изоморфизм путем сопоставления функции $x(\cdot)$ вектора

$$x = \{x_m(\tau^j)\} \in \mathbb{R}^{2^{(s,1)}}, \quad x_m(t) = \sum_{\substack{\text{sign } k_l = m_l \\ l=1, \dots, d}} x_k e^{i\langle k, t \rangle}, \quad m = (\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^d,$$

$$\tau^j = (\pi 2^{2-s_1} j_1, \dots, \pi 2^{2-s_d} j_d), \quad j_i = 1, \dots, 2^{s_i-1}, \quad i = 1, \dots, d,$$

при этом для функций $x(\cdot), y(\cdot) \in \text{lin} \{e^{i\langle k, t \rangle}, k \in \square_s\}$ и числа $p \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения:

$$\|x(\cdot)\|_{L_p} \asymp 2^{-\langle s, 1/p \rangle} \|x\|_{l_p^{2^{(s,1)}}}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$2^{\langle s, 1/p \rangle} \|x\|_{l_p^{2^{(s,1)}}} \ll \|x(\cdot)\|_{L_p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

и

$$\langle x(\cdot), y(\cdot) \rangle = 2^{-\langle x, y \rangle}.$$

Сформулированная теорема доказывается аналогично теореме Марцинкевича — Зигмунда для функций одной переменной, см. в монографию А. Зигмунда [9, Т. 2, стр. 46].

С помощью этой теоремы вложения и приближение пересечения функциональных классов сводятся к вложению и приближению пересечения дискретных множеств.

Для чисел $r \in \mathbb{R}$ и $0 < p \leq \infty$ в пространстве \mathbb{R}^n введем множество $B_p^r := B_p^r(\mathbb{R}^n) := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{l_p^n} \leq n^{-r}\}$. Как обычно, обозначим

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} & \text{при } 0 < p < \infty, \\ \max_{k=1, \dots, n} |x_k| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Для множества K из \mathbb{R}^2 , $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, будем рассматривать множество $B(K) = \bigcap_{(1/p, r) \in K} B_p^r$, являющееся пересечением конечномерных множеств B_p^r и $Q(K) = \text{conv } K + \text{cone} \{(-1, 0), (1, -1)\}$.

Для вложения конечномерных множеств $B(K)$ имеет место следующая теорема вложения.

Теорема 4 (см. [10]). Пусть $K \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ — подмножество из \mathbb{R}^2 , $0 < q \leq \infty$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $(1/q, \gamma) \in Q(K)$. Тогда $B(K) \subset B_q^\gamma$.

Используя вложение пересечения конечномерных множеств $B(K)$, оценки сверху поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$ и оценки снизу поперечников множеств V_k^m , найденные Е. Д. Глуским, находятся поперечники пересечения конечномерных множеств.

Теорема 5 (см. [8]). Пусть $K \subset [0, 1] \times \mathbb{R}$ — компакт из \mathbb{R}^2 , $B(K) = \bigcap_{(1/p, r) \in K} B_p^r(\mathbb{R}^{2n})$, $(\xi) = \max_{(\xi, r) \in Q(K)} r$. Тогда

$$d_n(B(K), l_q^{2n}) \asymp \begin{cases} n^{-(1/q)}, & 1 \leq q \leq 2, \\ n^{-(1/2)+1/q-1/2}, & 2 \leq q \leq \infty. \end{cases}$$

Еще одним направлением развития вопроса В. М. Тихомирова о приближении и вложении пересечения функциональных классов является вопрос о нахождении порядков норм производной ядер Дирихле с гармониками из ступенчатых гиперболических крестов. Порядки производных ядер Дирихле (с гармониками из ступенчатых гиперболических крестов в скалярной и векторной нормах) и Фавара (и с гармониками вне этих крестов) определены в работах автора и В. Н. Темлякова. Для ядер с гармониками из пересечения логарифмически полиэдральных множеств нормы производных в скалярной метрике были подсчитаны Динь Зунгом [10].

Теорема D2. Пусть $1 < p < \infty$, $S \subset \mathbb{R}_+^d$ — полиэдральное множество с непустой внутренностью, K — его рецессивный конус, $\alpha \in \mathbb{R}^d$. Тогда $D_{\mu S}^{(\alpha)}$ принадлежит L_p для любого $\mu > 0$ тогда и только тогда, когда $\beta = \alpha + (1 - \frac{1}{p}) \in \text{int } K^0$. Если $\beta \in \text{int } K^0$, то

$$\|D_{\mu S}^{(\alpha)}\|_p \asymp \mu^{\frac{l}{p}} 2^{\mu M},$$

где M — решение, а l — размерность аффинной оболочки множества решений задачи: $\langle s, \beta \rangle \rightarrow \sup$; $s \in S$.

Литература

1. Галеев Э. М. Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки.—1978.—Т. 23, № 2.—С. 197–211.
2. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.—480 с.
3. Бахвалов Н. С. Теоремы вложения для классов функций с несколькими ограниченными производными // Вестник МГУ. Сер. матем., механ.—1963, № 3.—С. 7–16.
4. Магарил-Ильяев Г. Г. Задача с промежуточной производной // Мат. заметки.—1979.—Т. 25, № 1.—С. 81–96.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. О некоторых вопросах гармонического анализа на $\mathbf{T}^{n'}$ × $\mathbf{T}^{n''}$ // В сб.: Некоторые вопросы современного анализа.—М.: Изд-во МГУ, 1984.— С. 57–82.
6. Динь Зунг. Асимптотики объема и числа целых точек в одном множестве и их применения в теории приближения // Reseach Report. Ханой, 1980.—№ 5. С. 1–22.
7. Митягин Б. С. Приближение функций в пространствах L^p и на торе // Мат. сб.—1962.—Т. 58, № 4.—С. 397–414.
8. Галеев Э. М. Approximation of periodic functions of one and several variables // Constructive Theory of Functions' 87.—Sofia, 1988.—P. 138–144.
9. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I, II.—М.: Мир, 1965.—615, 537 с.
10. Галеев Э. М. Приближение суммами Фурье классов функций с несколькими ограниченными производными // Мат. заметки.—1981.—Т. 29, № 5.—С. 749–760.
11. Динь Зунг. Приближение классов гладких функций многих переменных // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1984.—№ 10.—С. 207–226.

Статья поступила 5 ноября 2004 г.

ГАЛЕЕВ Эльфат Михалович, д. ф.-м. н.
г. Москва, Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: elfat@galeev.mccme.ru