А. С. Баяндина, А. В. Гасников, А. А. Лагуновская, Безградиентные двухточечные методы решения задач стохастической негладкой выпуклой оптимизации при наличии малых шумов не случайной природы, *Автомат. и телемех.*, 2018, выпуск 8, 38–49

Стохастические системы

© 2018 г. **А.С. БАЯНДИНА** (anast.bayandina@gmail.com)
(Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт», Сколковский университет науки и технологии),
А.В. ГАСНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (gasnikov.av@mipt.ru)
(Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт», Высшая школа экономики (Москва); Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН),
А.А. ЛАГУНОВСКАЯ (a.lagunovskaya@phystech.edu)
(Национальный исследовательский университет «Московский физико-технический институт»)

БЕЗГРАДИЕНТНЫЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕГЛАДКОЙ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ МАЛЫХ ШУМОВ НЕ СЛУЧАЙНОЙ ПРИРОДЫ[1]

Изучаются негладкие выпуклые задачи стохастической оптимизации с двухточечным оракулом нулевого порядка, т.е. на каждой итерации наблюдению доступны значения реализации функции в двух выбранных точках. Эти задачи предварительно сглаживаются с помощью известной техники двойного сглаживания (Б.Т. Поляк), а затем решаются с помощью стохастического метода зеркального спуска. Получены условия на допустимый уровень шума неслучайной природы, проявляющегося при вычислении реализации функции, при котором сохраняется оценка скорости сходимости метода.

Ключевые слова: метод зеркального спуска, шумы, стохастическая оптимизация, безградиентные методы, техника двойного сглаживания.

1. Введение

В данной статье изучается специальная техника решения негладких задач выпуклой оптимизации двухточечными безградиентными методами, получившая название “техника двойного сглаживания”. Эта техника, восходящая к работам Б.Т. Поляка (см., например, [1, 2]), до настоящего момента использовалась в основном только в условиях отсутствия шумов неслучайной природы [3, 4]. Однако во многих приложениях важным является наличие таких шумов [2, 5–7]. В настоящей работе будет показано, что негладкость задачи фактически никак не влияет на оценки скорости сходимости оптимальных методов, которые нуждаются в небольшой корректировке (дополнительной рандомизации) в негладком случае, но зато влияют на требование малости шума. В статье дается количественная оценка того, насколько должны быть

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

выше требования к точности вычисления значения функции в негладком случае по сравнению с гладким.

В разделе 2 приводится постановка задачи. Формулируется результат о скорости сходимости оптимальных процедур.

В разделе 3 излагается вариант метода зеркального спуска с неточным оракулом в специальной форме [7], которая понадобится в дальнейшем (в разделе 5) для описания оптимального метода.

В разделе 4 описывается техника (однократного) сглаживания негладкой задачи [8]. С помощью этой техники, примененной 2 раза, в следующем разделе строится сведение задачи с оракулом нулевого порядка, выдающим значения реализации функции в двух точках, к оракулу первого порядка, выдающему стохастический градиент.

В разделе 5 с помощью техники двойного сглаживания и метода из раздела 3 строится оптимальный метод, работающий с точностью до логарифмических множителей по известным нижним оракульным оценкам [3, 9]. Изучаются требования к шуму неслучайной природы, при котором оценки скорости сходимости сохраняют свой вид (с точностью до числовых мультипликативных констант).

2. Содержательная интерпретация задачи

Пусть на выпуклом множестве $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ задана выпуклая функция $f(x)$, значения которой не наблюдаемы. Однако можно наблюдать зашумленные реализации значения этой функции в интересующих точках $\left\{x^k\right\}_k$ (здесь и далее волной обозначается зашумленное значение):

$$\tilde{f}\left(x^k, \xi^k\right) = f\left(x^k, \xi^k\right) + \delta\left(x^k, \xi^k\right),$$

$$E_{\xi^k}\left[f\left(x^k, \xi^k\right)\right] = f\left(x^k\right), \quad \left|\delta\left(x^k, \xi^k\right)\right| \le \delta.$$

Предполагается, что функция $f(x, \xi)$ как функция x является в ε/M-окрестности множества Q ($Q_{\varepsilon/M}$):

- выпуклой, но необязательно гладкой;
- удовлетворяющей условию

$$|f(y, \xi) - f(x, \xi)| \le M \|y - x\|_2 . \tag{1}$$

Успешность стратегии $\left\{x^k\right\}_{k=1}^N$, где $N \gg 1$, измеряется величиной[2]

$$\operatorname{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x^k\right)\right] - \min_{x \in Q} f(x) . \tag{2}$$

Если изначально знать $x_* \in \operatorname{Arg}\min\limits_{x \in Q} f(x)$, то оптимальной (с точки зрения минимизации введенного регрета) стратегией была бы стратегия $x^k \equiv x_*$, которая давала бы нулевой регрет (2). Однако в действительности x_* не известно. Известно лишь (начальное) приближение x^0 к x_*.

[2] Обычно эту величину называют псевдорегретом [10], однако для краткости далее в этой статье будем использовать название “регрет”.

Введем прокс-функцию $d(x) \geq 0$ $(d(x^0) = 0)$, которая предполагается сильно выпуклой относительно выбранной нормы $l_p = \| \, \|_p$, $1 \leq p \leq 2$, с константой сильной выпуклости ≥ 1 [10, 11]. Положим $R^2 = V\left(x_*, x^0\right)$, где прокс-расстояние (расстояние Брэгмана) определяется формулой

$$V(x, z) = d(x) - d(z) - \langle \nabla d(z), x - z \rangle .$$

Если решение x_* не единственно, то в определении R^2 выбирается такое x_*, которое доставляет минимум $V\left(x_*, x^0\right)$.

Предположим, что на каждом шаге (итерации) можно наблюдать (на одной и той же реализации) сразу два значения $\tilde{f}\left(x_m^k, \xi^k\right)$, $\tilde{f}\left(x_w^k, \xi^k\right)$, где $\left\{\xi^k\right\}_k$ – независимые одинаково распределенные (как ξ) случайные величины. Таким образом, стратегией является способ выбора

$$x_m^k\left(\tilde{f}\left(x_m^{k-1}, \xi^{k-1}\right), \tilde{f}\left(x_w^{k-1}, \xi^{k-1}\right); \ldots, ; \tilde{f}\left(x_m^0, \xi^0\right), \tilde{f}\left(x_w^0, \xi^0\right)\right),$$
$$x_w^k\left(\tilde{f}\left(x_m^{k-1}, \xi^{k-1}\right), \tilde{f}\left(x_w^{k-1}, \xi^{k-1}\right); \ldots ; \tilde{f}\left(x_m^0, \xi^0\right), \tilde{f}\left(x_w^0, \xi^0\right)\right).$$

В данной статье решается задача поиска оптимальной стратегии из описанного выше класса, доставляющей минимально возможное (с точностью до логарифмических множителей) значение регрету [6, 7]

$$\text{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = \tilde{\mathrm{O}}\left(n^{1/q}\frac{MR}{\sqrt{N}}\right), \tag{3}$$

где $\left\{x^k\right\} = \left\{x_m^k\right\}$ или $\left\{x_w^k\right\}$, $1/p + 1/q = 1$, M определяется согласно (1). Запись $A(N, n) = \tilde{\mathrm{O}}(B(N, n))$ означает, что существует такая константа C_q, возрастающая при $q \in [2, \infty]$ от $\mathrm{O}(1)$ до $\mathrm{O}\left(\sqrt{\ln n}\right)$ (см. лемму 4 в разделе 5), что для всех n и N справедливо неравенство $A(N, n) \leq C_q B(N, n)$.

Если дополнительно известно, что функция $f(x)$ является сильно выпуклой в норме l_2 с достаточно большой константой $\gamma > 0$, то оценку (3) можно улучшить:

$$\text{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = \mathrm{O}\left(n\frac{M^2 \ln N}{\gamma N}\right). \tag{4}$$

Отличие рассматриваемой в данной статье постановки от классической задачи получения оптимальных оценок для выпуклых (вообще говоря, негладких) задач стохастической оптимизации с двухточечным оракулом [3] заключается в наличии небольшого шума $\delta > 0$ неслучайной природы. Это допущение является важным шагом к практической адаптации существующих подходов [1, 5–7]. Далее в статье приводится условие на уровень шума δ, при котором оценки (3), (4) получаются такими же (с точностью до абсолютной мультипликативной константы), как если бы этого шума не было, т.е. имеет место несмещенность $\delta = 0$.

Новизна по сравнению с [6, 7] заключается в том, что в данной статье для получения оценок (3), (4) не предполагается, что функция $f(x)$ имеет равномерно ограниченную константу Липшица стохастического градиента[3].

3. Метод зеркального спуска для задач стохастической оптимизации

Предположим, что необходимо решать задачу стохастической выпуклой оптимизации [12]

$$F(x) = E_{\tilde{\eta}}\left[F(x, \tilde{\eta})\right] \to \min_{x \in Q}. \tag{5}$$

На каждой итерации можно один раз обратиться к оракулу за зашумленным значением стохастического градиента $\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right)$.

Пусть для любых $\tilde{N} \le N$

$$\sup_{\left\{x^k = x^k\left(\xi^1, \ldots, \xi^{k-1}\right)\right\}_{k=1}^{\tilde{N}} \in Q_{\varepsilon/M}} E\left[\frac{1}{\tilde{N}}\sum_{k=1}^{\tilde{N}}\left\langle E_{\eta^k}\left[\nabla_x F\left(x^k, \eta^k\right) - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right) \middle| \Theta^{k-1}\right], x^k - x_*\right\rangle\right] \le \sigma, \tag{6}$$

где x_* – решение задачи (5) (если решение x_* не единственно, то выбираем такое решение x_*, которое доставляет минимум $V\left(x_*, x^0\right)$),

$$E_{\eta^k}\left[\nabla_x F\left(x^k, \eta^k\right)\right] = \nabla F\left(x^k\right), \quad E_{\eta^k}\left[\left\|\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right)\right\|_q^2\right] \le \tilde{M}^2, \tag{7}$$

$\left\{\eta^k\right\}_{k=0}^{N-1}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, Θ^{k-1} – сигма алгебра, порожденная $\eta^1, \ldots, \eta^{k-1}$ [12].

Опишем шаг метода зеркального спуска (МЗС) [7, 11]

$$\begin{gathered} x^{k+1} = \mathrm{Mirr}_{x^k}\left(h \nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right)\right), \\ \mathrm{Mirr}_{x^k}(\mathrm{v}) = \arg\min_{x \in Q}\left\{\left\langle \mathrm{v}, x - x^k\right\rangle + V\left(x, x^k\right)\right\}, \end{gathered} \tag{8}$$

размер шага h будет выбран позже (см. (11)).

Основное свойство метода [7, 11]

$$\begin{gathered} 2V\left(x, x^{k+1}\right) \le 2V\left(x, x^k\right) + 2h\left\langle \nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right), x - x^k\right\rangle + \\ + h^2\left\|\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right)\right\|_q^2. \end{gathered} \tag{9}$$

[3] Здесь и далее предполагается ознакомление читателей с понятием стохастического (суб)градиента, например в объеме книги [12].

Поскольку $\left\{\eta^k\right\}_{k=0}^{N-1}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, то из (9) можно получить

$$
\begin{gathered}
F\left(x^k\right)-F(x) \leq\left\langle\nabla F\left(x^k\right), x^k-x\right\rangle= \\
=\left\langle E_{\eta^k}\left[\nabla_x F\left(x^k, \eta^k\right) \middle| \Theta^{k-1}\right], x^k-x\right\rangle \leq \\
\leq\left\langle E_{\eta^k}\left[\nabla_x F\left(x^k, \eta^k\right) \middle| \Theta^{k-1}\right]-\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right), x^k-x\right\rangle+ \\
+\frac{1}{h}\left(V\left(x, x^k\right)-V\left(x, x^{k+1}\right)\right)+\frac{h}{2}\left\|\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right)\right\|_q^2 .
\end{gathered} \tag{10}
$$

Беря условное математическое ожидание $E_{\eta^k}\left[\,\cdot \mid \Theta^{k-1}\right]$ от обеих частей неравенства (10), получим

$$
\begin{gathered}
F\left(x^k\right)-F(x) \leq\left\langle\nabla F\left(x^k\right), x^k-x\right\rangle \leq \\
\leq\left\langle E_{\eta^k}\left[\nabla_x F\left(x^k, \eta^k\right)-\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right) \middle| \Theta^{k-1}\right], x^k-x\right\rangle+ \\
+\frac{1}{h}\left(V\left(x, x^k\right)-E\left[V\left(x, x^{k+1}\right) \middle| \Theta^{k-1}\right]\right)+\frac{h}{2} \underbrace{E_{\eta^k}\left[\left\|\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right)\right\|_*^2 \middle| \Theta^{k-1}\right]}_{\leq \tilde{M}^2} .
\end{gathered}
$$

Если просуммировать последнее неравенство по $k=0, \ldots, N-1$, а затем взять полное математическое ожидание от обеих частей, положив $x=x_*$ (если решение задачи (5) x_* не единственно, то выбираем такое решение x_*, которое доставляет минимум $V\left(x_*, x^0\right)$), то получим

$$
\operatorname{Regret}_F\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \leq(h N)^{-1} V\left(x_*, x^0\right)+\tilde{M}^2 h / 2+\sigma \leq \sqrt{\frac{2 \tilde{M}^2 R^2}{N}}+\sigma,
$$

где

$$
R^2=V\left(x_*, x^0\right), \quad h=\frac{R}{\tilde{M}} \sqrt{\frac{2}{N}}=\frac{\varepsilon}{\tilde{M}^2}, \tag{11}
$$

т.е.

$$
\operatorname{Regret}_F\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \leq \tilde{M} R \sqrt{\frac{2}{N}}+\sigma . \tag{12}
$$

Другими словами, после

$$
N(\varepsilon)=\frac{2 \tilde{M}^2 R^2}{\varepsilon^2} \tag{13}
$$

дней (итераций)

$$
\operatorname{Regret}_F\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \leq \varepsilon+\sigma . \tag{14}
$$

Оценки (12)–(14) оптимальны с точностью до небольших мультипликативных числовых констант [8]. Используя вместо МЗС метод двойственных усреднений (МДУ) [13], можно прийти к аналогичным оценкам, но уже с адаптивным выбором шагов (11), т.е. h можно выбирать не зависящим от числа итераций N (желаемой точности ε) образом. В случае, когда оценка $\tilde{M}$ не известна, можно использовать вариант МЗС из обзора [14] – это распространяется и на МДУ. Можно перенести метод и на композитные постановки задач [11]. Все написанное выше с сохранением оценок и метода также переносится на задачи онлайн оптимизации [7, 10].

Проведенные рассуждения позволяют (подобно [13]) попутно получить, что

$$(15)\quad E\left[\frac{1}{2}\left\|x_* - x^k\right\|^2\right] \le E\left[V\left(x_*, x^k\right)\right] \le 2V\left(x_*, x^0\right) = 2R^2, \quad k = 0, \ldots, N.$$

Если дополнительно известно, что функция $F(x)$ является сильно выпуклой в норме l_2 с достаточно большой константой $\gamma > 0$, то МЗС (8) можно адаптировать под эту специфику

$$(16)\qquad x^{k+1} = \mathrm{Mirr}_{x^k}\left(h_{k+1}\nabla_x \tilde{F}\left(x^k, \eta^k\right)\right), \quad h_k = (\gamma k)^{-1}.$$

Тогда оценка (12) перепишется следующим образом ($\tilde{M}$ посчитано в l_2-норме):

$$(17)\qquad \mathrm{Regret}_F\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \le \frac{\tilde{M}^2}{2\gamma N}(1 + \ln N) + \sigma.$$

Оценка (17) оптимальна с точностью до $\sim \ln N$ [8]. Впрочем, не известно, устраним ли этот логарифмический множитель. Для задач обычной стохастической сильно выпуклой оптимизации, в которых критерием качества является не регрет, а просто итоговая невязка по функции $E\left[F\left(x^N\right)\right] - \min\limits_{x\in Q} F(x)$, известно, что этот множитель может быть устранен, например, с помощью процедуры рестартов [15]. Для более общих задач стохастической сильно выпуклой онлайн оптимизации, включающих рассматриваемый класс задач с регретом в качестве критерия качества, этот логарифмический множитель устранить уже нельзя [16].

Можно показать, что все последующие рассуждения можно проводить, беря за основу одно из отмеченных здесь обобщений МЗС. Причем все оценки можно писать в категориях вероятностей больших уклонений [12, 17], а не в среднем, как сейчас. Однако в этой статье ограничимся простейшим вариантом, чтобы лучше пояснить основную схему перенесения результатов разделов 3, 4 на случай, когда доступны только зашумленные реализации оптимизируемой функции раздела 2.

4. Сглаживание задачи

Изложим схему сглаживания, позволяющую свести постановку раздела 2 к постановке раздела 3. Тогда можно будет воспользоваться формулами (5)–(8), (11)–(17).

Пусть $\tilde{e} \in RB_2^n(1)$ – случайный вектор, равномерно распределенный на шаре единичного радиуса в норме l_2 в $\mathbb{R}^n$. Сгладим (следуя [1, 3, 5–8]) исходную функцию $F(x,\tilde{\eta})$ с помощью локального усреднения по шару радиуса $\mu > 0$ (см. (19)), которое будет выбрано позже ($\tilde{\eta}$ и $\tilde{e}$ предполагаются независимыми случайными величинами),

$$F^\mu(x,\tilde{\eta}) = E_{\tilde{e}}\left[F(x+\mu\tilde{e},\tilde{\eta})\right], \quad F^\mu(x) = E_{\tilde{e},\tilde{\eta}}\left[F(x+\mu\tilde{e},\tilde{\eta})\right].$$

Заменим исходную задачу (5) следующей задачей:

$$F^\mu(x) = E_{\tilde{\eta}}\left[F^\mu(x,\tilde{\eta})\right] \to \min_{x\in Q}. \tag{18}$$

Легко проверить, что если (см., например, (1))

$$|F(y,\tilde{\eta}) - F(x,\tilde{\eta})| \le M\|y-x\|_2,$$

то

$$0 \le F^\mu(x,\tilde{\eta}) - F(x,\tilde{\eta}) \le M\mu, \quad 0 \le F^\mu(x) - F(x) \le M\mu.$$

Поэтому, если

$$M\mu \le \varepsilon/2 \tag{19}$$

и

$$\mathrm{Regret}_{F^\mu}\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \le \varepsilon/2,$$

то

$$\mathrm{Regret}_F\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N F\left(x^k\right)\right] - \min_{x\in Q} F(x) \le$$

$$\le \underbrace{E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N F^\mu\left(x^k\right)\right] - \min_{x\in Q} F^\mu(x)}_{\mathrm{Regret}_{F^\mu}\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right)\le\varepsilon/2} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon.$$

Таким образом, при условии (19) решение задачи (18) с точностью $\varepsilon/2$ является решением задачи (5) с точностью ε.

5. Сведение с помощью техники двойного сглаживания Б.Т. Поляка

Следуя разделу 2, будем считать, что $f(x,\xi)$ – выпуклая (вообще говоря, негладкая) функция от x, которая удовлетворяет условию Липшица (1).

Возьмем в разделе 3

$$F(x,\tilde{\eta}) = f(x+\tau\tilde{e}_1+\mu\tilde{e}_2,\xi), \quad F(x) = E_{\tilde{\eta}}\left[F(x,\tilde{\eta})\right], \quad \tilde{\eta} = (\xi,\tilde{e}_1,\tilde{e}_2),$$

в качестве $\nabla_x \tilde{F}(x,\eta)$ в МЗС (см. раздел 3) возьмем

$$\nabla_x \tilde{F}(x,\eta) = \frac{n}{\mu}\left(\tilde{f}(x+\tau\tilde{e}_1+\mu e_2,\xi) - \tilde{f}(x+\tau\tilde{e}_1,\xi)\right)e_2, \quad \eta = (\xi,\tilde{e}_1,e_2), \tag{20}$$

где $\tilde{e}_1 \in RB_2^n(1)$ ($e_2 \in RS_2^n(1)$) – случайный вектор, равномерно распределенный на шаре $B_2^n(1)$ (сфере $S_2^n(1)$), $\tau \le \varepsilon/(4M)$, $\mu \ll \tau$ будут выбраны позже (см. (28), (29)). Будем считать, что $\left\{\tilde{e}_1^k, e_2^k\right\}_{k=0}^{N-1}$ независимы в совокупности и не зависимы от $\left\{\xi^k\right\}_{k=0}^{N-1}$.

Обозначим:

$$f^{\tau}(x) = E_{\tilde{e}_1,\xi}\left[f(x+\tau\tilde{e}_1,\xi)\right], \quad f^{\tau,\mu}(x) = E_{\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\xi}\left[f(x+\tau\tilde{e}_1+\mu\tilde{e}_2,\xi)\right] = F(x).$$

Лемма 1 (см. раздел 4). *Если $\tau \le \varepsilon/(4M)$, $\mu \le \varepsilon/(4M)$, то*

$$\begin{gathered}\mathrm{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \le \mathrm{Regret}_{f^\tau}\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) + \frac{\varepsilon}{4} \le \\ \le \mathrm{Regret}_{f^{\tau,\mu}}\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = \mathrm{Regret}_F\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{gathered} \tag{21}$$

Лемма 2 (см., например, [3, 5]). *Пусть*

$$\nabla_x F(x,\eta) = \frac{n}{\mu}\left(f(x+\tau\tilde{e}_1+\mu e_2,\xi) - f(x+\tau\tilde{e}_1,\xi)\right)e_2, \quad \eta = (\xi,\tilde{e}_1,e_2),$$

где $\tilde{e}_1 \in RB_2^n(1)$, $e_2 \in RS_2^n(1)$ и $\tilde{e}_1$, e_2, ξ независимы в совокупности. Тогда

$$E_\eta\left[\nabla_x F(x,\eta)\right] = \nabla F(x).$$

Лемма 3 (см. [7]). *Для последовательности $\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N}$, сгенерированной МЗС* (8) *с $\left\{\nabla_x \tilde{F}\left(x^k,\eta^k\right)\right\}_{k=0}^{N-1}$, рассчитываемыми по формуле* (20), *справедлива формула* (6) *с*

$$\sigma \le \frac{4\delta R\sqrt{n}}{\mu}. \tag{22}$$

В основу доказательства леммы 3 положена лемма 2, оценка (15) и явление концентрации равномерной меры на поверхности евклидовой сферы в малой окрестности экватора [18] (с произвольно выбранным северным полюсом).

Лемма 4 (см. [19]). *Пусть $e_2 \in RS_2^n(1)$, тогда*

$$E\left[\|e_2\|_q^2\right] \le \min\{q-1, 4\ln n\}\, n^{\frac{2}{q}-1} = c_q n^{\frac{2}{q}-1}, 2 \le q \le \infty, \tag{23}$$

$$E\left[\langle c, e_2\rangle^2 \|e_2\|_q^2\right] \le \frac{4}{3}\|c\|_2^2 \min\{q-1, 4\ln n\}\, n^{\frac{2}{q}-2}, 2 \le q \le \infty. \tag{24}$$

Л е м м а 5 (см. [7]). *Пусть для любого* $e_2 \in S_2^n(1)$

$$\left|f\left(x+\tau\tilde{e}_1+\mu e_2,\xi\right)-f\left(x+\tau\tilde{e}_1,\xi\right)-\mu\left\langle\nabla_x f\left(x+\tau\tilde{e}_1,\xi\right),e_2\right\rangle\right|\le\frac{L\left(\tilde{e}_1,\xi\right)\mu^2}{2}.$$

Тогда

$$E_\eta\left[\left\|\nabla_x\tilde{F}\left(x,\eta\right)\right\|_q^2\right]\le\frac{3}{4}n^2\mu^2E_{\tilde{e}_1,\xi}\left[L\left(\tilde{e}_1,\xi\right)^2\right]E_{e_2}\left[\left\|e_2\right\|_q^2\right]+$$

$$+3n^2E_{\tilde{e}_1,e_2,\xi}\left[\left\langle\nabla_x f\left(x+\tau\tilde{e}_1,\xi\right),e_2\right\rangle^2\left\|e_2\right\|_q^2\right]+12\frac{\delta^2n^2}{\mu^2}E_{e_2}\left[\left\|e_2\right\|_q^2\right], \tag{25}$$

где $\tilde{e}_1 \in RB_2^n(1)$, $e_2 \in RS_2^n(1)$ *и* $\tilde{e}_1$, e_2, ξ *независимы в совокупности.*

Здесь с точностью до почти всюду по $\tilde{e}_1$ под $\nabla_x f\left(x+\tau\tilde{e}_1,\xi\right)$ можно понимать обычный (стохастический) градиент, вообще говоря, не гладкой выпуклой функции $f\left(x,\xi\right)$ как функции x в точке $x+\tau\tilde{e}_1$. Это следует из теоремы Радемахера [20].

Л е м м а 6. *Пусть* $\tilde{e}_1 \in RB_2^n(1)$ *и* $\tilde{e}_1$, ξ *независимы в совокупности. Тогда*

$$E_{\tilde{e}_1,\xi}\left[L\left(\tilde{e}_1,\xi\right)^2\right]\le\frac{16M^2}{3\mu\tau}. \tag{26}$$

Эта оценка следует из того, что все сводится к рассмотрению наиболее неблагоприятного случая в размерности $n=1$ с $f\left(x,\xi\right)\equiv M\left|x\right|$ в точке $x=$ $=-\mu/2$ с $e_2=1$.

Используя (7), (23)–(26), перепишем оценку (25) в виде

$$\tilde{M}^2=\max_{x\in Q}E_\eta\left[\left\|\nabla_x\tilde{F}\left(x,\eta\right)\right\|_q^2\right]\le 4c_qn^{2/q}\left(nM^2\frac{\mu}{\tau}+M^2+3n\frac{\delta^2}{\mu^2}\right). \tag{27}$$

Выберем τ на пороге (см. лемму 1)

$$\tau=\frac{\varepsilon}{4M}. \tag{28}$$

Выберем $\mu\le\varepsilon/\left(4M\right)$ так, чтобы $nM^2\mu/\tau=M^2$, т.е.

$$\mu=\frac{\varepsilon}{4Mn}. \tag{29}$$

Будем считать, что уровень шума таков, что (см. (22), (27))

$$\frac{4\delta R\sqrt{n}}{\mu}\le\frac{\varepsilon}{4},\quad 3n\frac{\delta^2}{\mu^2}\le M^2,$$

т.е. условие на максимально допустимый уровень шума $\delta\le\delta_0$ будет иметь вид

$$\delta_0\simeq\min\left\{\frac{\varepsilon^2}{56MRn^{3/2}},\ \frac{\varepsilon}{7n^{3/2}}\right\}\simeq\frac{\varepsilon^2}{56MRn^{3/2}}. \tag{30}$$

Интересно сопоставить эту оценку с оценкой из [7], где дополнительно предполагалась равномерная липшицевость градиента $f(x,\xi)$:

$$\|\nabla f(y,\xi) - \nabla f(x,\xi)\|_2 \le L\|y-x\|_2 .$$

В таком случае

$$\delta_0 \simeq \min\left\{\frac{\varepsilon^{3/2}}{16R\sqrt{Ln}}, \quad \frac{M\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{96Ln}}\right\} \simeq \frac{\varepsilon^{3/2}}{16R\sqrt{Ln}}.$$

При выбранных таким образом τ, μ (формулы (28), (29)) и уровне шума δ из (27) имеем

$$\tilde{M}^2 \le 12c_q n^{2/q} M^2. \tag{31}$$

Подставляя эту формулу в выражение $N = N(\varepsilon/4)$ (см. (13)), получим число дней (итераций), которые достаточно прожить (сделать), чтобы гарантировать

$$\text{Regret}_F\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \le \varepsilon/2,$$

а, следовательно (см. (21) в лемме 1),

$$\text{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) \le \varepsilon.$$

Резюмируем полученный результат в виде теоремы.

Т е о р е м а. *Пусть функция $f(x,\xi)$ как функция x является в ε/M-окрестности множества Q ($Q_{\varepsilon/M}$):*

- *выпуклой, но необязательно гладкой;*
- *удовлетворяющей условию*

$$|f(y,\xi) - f(x,\xi)| \le M\|y-x\|_2 .$$

Пусть $R^2 = V\left(x_*, x^0\right)$, если $x_* \in \operatorname{Arg}\min_{x\in Q} f(x)$ не единственно, то в определении R^2 выбирается такое x_*, которое доставляет минимум $V\left(x_*, x^0\right)$.

Пусть в МЗС из раздела 3 (8) (для полного описания метода используется также (11), (31)) подставляется на каждой итерации выражение (20) (сформированное на базе доступной информации $\left\{\tilde{f}\left(x_m^k, \xi^k\right), \tilde{f}\left(x_w^k, \xi^k\right)\right\}_k$, см. раздел 2), где τ, μ выбраны согласно (28), (29), а уровень шума ограничен $\delta \le \delta_0$ (30). Тогда после

$$N = \frac{384c_q n^{2/q} M^2 R^2}{\varepsilon^2}$$

итераций (шагов) имеет место неравенство

$$\text{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x^k\right)\right] - \min_{x\in Q} f(x) \le \varepsilon.$$

Другими словами,

$$\operatorname{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = \tilde{\mathrm{O}}\left(n^{1/q}\frac{MR}{\sqrt{N}}\right).$$

Аналогично устанавливается оценка

$$\operatorname{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{nM^2\ln N}{\gamma N}\right)$$

в случае, когда функция $f(x)$ является сильно выпуклой в норме l_2 с достаточно большой константой $\gamma > 0$.

Возвращаясь к задаче из раздела 2, заметим, что при условиях (28), (29)

$$\left|\operatorname{Regret}_f\left(\left\{x^k + \tau\tilde{e}_1^k + \mu e_2^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) - \operatorname{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right)\right| \le \varepsilon/2,$$

$$\left|\operatorname{Regret}_f\left(\left\{x^k + \tau\tilde{e}_1^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right) - \operatorname{Regret}_f\left(\left\{x^k\right\}_{k=0}^{N-1}\right)\right| \le \varepsilon/4.$$

Авторы выражают благодарность студенту МФТИ Даниилу Селихановичу, указавшему авторам на ряд опечаток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
2. *Граничин О.Н., Поляк Б.Т.* Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
3. *Duchi J.C., Jordan M.I., Wainwright M.J., Wibisono A.* Optimal Rates for Zero-Order Convex Optimization: The Power of Two Function Evaluations // IEEE Transact. Inf. 2015. V. 61. No. 5. P. 2788–2806.
4. *Shamir O.* An Optimal Algorithm for Bandit and Zero-Order Convex Optimization with Two-Point Feedback // e-print, 2015.

   URL: http://arxiv.org/pdf/1507.08752v1.pdf
5. *Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Нестеров Ю.Е.* Стохастические градиентные методы с неточным оракулом // Тр. МФТИ. 2016. Т. 8. № 1. С. 41–91.

   URL: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1411/1411.4218.pdf
6. *Гасников А.В., Лагуновская А.А., Усманова И.Н. и др.* Безградиентные прокс-методы с неточным оракулом для негладких задач выпуклой стохастической оптимизации на симплексе // АиТ. 2016. № 10. С. 57–77.

   Gasnikov A.V., Lagunovskaya A.A., Usmanova I.N., et al. Gradient-Free Proximal Methods with Inexact Oracle for Convex Stochastic Nonsmooth Optimization Problems on the Simplex // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 11. P. 2018–2034.
7. *Гасников А.В., Крымова Е.А., Лагуновская А.А. и др.* Стохастическая онлайн оптимизация. Одноточечные и двухточечные нелинейные многорукие бандиты. Выпуклый и сильно выпуклый случаи // АиТ. 2017. № 2. С. 36–49.

   Gasnikov A.V., Krymova E.A., Lagunovskaya A.A., et al. Stochastic Online Optimization. Single-Point and multi-Point Non-Linear Multi-Armed Bandits. Convex and Strongly-Convex Case // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 2. P. 224–234.

8. *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.

9. *Agarwal A., Dekel O., Xiao L.* Optimal algorithms for online convex optimization with multi-point bandit feedback // Proc. 23 Annual Conf. on Learning Theory. 2010. P. 28–40.

10. *Bubeck S., Cesa-Bianchi N.* Regret Analysis of Stochastic and Nonstochastic Multi-Armed Bandit Problems // Found. Trends Machine Learning. 2012. V. 5. No. 1. P. 1–122.

11. *Nemirovski A.* Lectures on modern convex optimization analysis, algorithms, and engineering applications. Philadelphia: SIAM, 2013.

    URL: http://www2.isye.gatech.edu/∼nemirovs/Lect_ModConvOpt.pdf

12. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A.* Lecture on stochastic programming. Modeling and theory. MPS-SIAM series on Optimization, 2014.

13. *Nesterov Yu.* Primal-dual subgradient methods for convex problems // Math. Program. Ser. B. 2009. V. 120(1). P. 261–283.

14. *Duchi J.C.* Introduction lectures in stochastic programming // Park City Math. Ser. 2016. URL: http://stanford.edu/˜jduchi/PCMIConvex/Duchi16.pdf

15. *Juditsky A., Nesterov Yu.* Deterministic and Stochastic Primal-Dual Subgradient Algorithms for Uniformly Convex Minimization // Stoch. Syst. 2014. V. 4. No. 1. P. 44–80.

16. *Hazan E., Kale S.* Beyond the Regret Minimization Barrier: Optimal Algorithms for Stochastic Strongly-Convex Optimization // JMLR. 2014. V. 15. P. 2489–2512.

17. *Guiges V., Juditsky A., Nemirovski A.* Non-asymptotic confidence bounds for the optimal value of a stochastic program // e-print, 2016.

    URL: https://arxiv.org/pdf/1601.07592.pdf

18. *Ball K.* An Elementary Introduction to Modern Convex Geometry // Flavors of Geometry. Ed. by S. Levy. Cambridge Univ. Press. 1997. P. 1–58. (Math Sci. Res. Inst. Publ., V. 31.)

19. *Усманова И.Н.* Безградиентный метод зеркального спуска с двухточечным зашумленным оракулом: дипломная работа бакалавра по специальности “Прикладная математика и физика”. Долгопрудный, МФТИ, 2015.

20. *Эванс Л.К., Гариепе К.Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Науч. кн. (ИДМИ), 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 15.01.2017