Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, Решеточная модель синус-Гордон с локальным гамильтонианом, *ТМФ*, 1984, том 61, номер 3, 364–377

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 61, № 3
декабрь, 1984

РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ СИНУС-ГОРДОН С ЛОКАЛЬНЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ

Боголюбов Н. М., Изергин А. Г.

Получен спектр возбуждений в квантовой решеточной модели синус-Гордон с гамильтонианом, описывающим взаимодействие двух ближайших соседей на решетке. Эта решеточная модель является одной из возможных регуляризаций квантово-полевой модели синус-Гордон, сохраняющих свойство полной интегрируемости. Показано, что в доопределенной таким образом квантово-полевой модели существуют фазовые переходы в точках $\gamma=\pi n/(n+1)$ (n целое), которые объясняются изменением структуры вакуумного состояния.

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе продолжается исследование решеточных регуляризаций модели синус-Гордон (СГ), начатое в работе [1], результаты которой мы будем использовать. Напомним, что гамильтониан и скобки Пуассона основных динамических переменных классической полевой модели СГ мы записываем в следующем виде:

$$H=\int dx\,[\pi^2/2+(\partial_x u)^2/2+(m^2/8\gamma)(1-\cos\sqrt{8\gamma}u)];\tag{1}$$
$$\{\pi(x,t),u(y,t)\}=\delta(x-y);\qquad \pi(x,t)=\partial_t u(x,t).$$

Здесь используется обычная константа связи γ; квантовая теория периодична по γ с периодом π, и можно ограничиться рассмотрением области $0<\gamma<\pi$. Заметим, что точка $\gamma=\pi/2$ соответствует свободным фермионам при обычном отождествлении модели СГ и массивной модели Тирринга.

Создание квантового метода обратной задачи рассеяния (КМОЗ) [2] позволило получить точные ответы для модели СГ [3]. При решении квантово-полевой модели СГ возникает проблема ультрафиолетовых расходимостей. Наиболее естественно соответствующую регуляризацию провести с помощью решеточной модели СГ (модель РСГ), предложенной в [4, 5]. Это позволяет и на решетке сохранить свойство полной интегрируемости модели СГ; существенно также, что модель РСГ регуляризует квантово-полевую модель в терминах исходных бозонных полей. Снятие регуляризации и переход к квантово-полевой модели осуществляется при стремлении постоянной решетки к нулю и перенормировке массы.

Основным (для построения в рамках КМОЗ модели РСГ) является матрица монодромии вспомогательной линейной задачи на один узел решетки — локальный $\mathscr{L}$-оператор, найденный в [4, 5]. В обозначениях, которые используются ниже, этот $\mathscr{L}$-оператор записан в (1.3), (1.4) (здесь и ниже цифра 1 перед номером формулы означает ссылку на формулу работы [1]). Само по себе задание $\mathscr{L}$-оператора, однако, не вполне определяет конкретную решеточную модель — необходимо еще задать гамильтониан. В [4, 5] была предложена модель РСГ, гамильтониан которой задается с помощью тождеств следов в терминах следа матрицы монодромии на всей решетке. В работах [1, 6] соответствующая решеточная модель была решена и показано, что в квантово-полевом пределе после перенормировки массы воспроизводятся для области констант связи $0<\gamma<<2\pi/3$ все известные ответы в модели СГ.

В настоящей работе мы рассмотрим регуляризацию модели СГ с помощью другой модели РСГ, отличающейся от рассмотренной в [1] модели выбором гамильтониана. Этот новый гамильтониан, описывающий взаимодействие бозонных операторов в ближайших узлах решетки, был предложен в работе [7]. Хотя соответствующие решеточные модели и различны, в квантово-полевом пределе для области малых констант связи ($0<\gamma<<\pi/2$) они, как будет показано, приводят к одинаковым ответам. Отличие наблюдается в области больших констант связи ($\pi/2<\gamma<\pi$), где ответ зависит от способа регуляризации. Заметим, однако, что при обеих регуляризациях в области констант связи $\gamma>\pi/2$ существуют фазовые переходы, связанные с перестройкой физического вакуума.

Перейдем к краткому описанию модели РСГ с гамильтонианом [7]. Эта модель, давая регуляризацию квантовополевой модели, представляет и самостоятельный интерес как модель взаимодействующих бозонных полей на одномерной пространственной решетке с M узлами и постоянной решетки Δ, так что $L=M\Delta$ — длина решетки. Хотя гамильтониан, описывающий взаимодействие бозонных полей в двух соседних узлах решетки, и не выражен явно в терминах следа матрицы монодромии, в [7] доказано, что он коммутирует с этим следом; следовательно, его собственные состояния могут быть построены с помощью стандартной схемы алгебраического анзаца Бете [2]. Поскольку $\mathscr{L}$-оператор тот же, что для модели РСГ, рассмотренной в [1], то и эти собственные состояния те же. Важную роль среди них играет «голый вакуум» — вектор состояния, соответствующий нулевому собственному значению гамильтониана (состояние без «частиц»). Другие собственные векторы гамильтониана можно рассматривать как получающиеся при внесении в голый вакуум N «частиц» с быстротами $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ ($N=1, 2, 3, \ldots$). Быстроты α_l, вообще говоря, комплексные, должны удовлетворять системе уравнений (1.6):

$$\exp\{ip(\alpha_l)L\} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N} \exp\{-i\Phi(\alpha_l-\alpha_k)\}; \quad l=1,\ldots,N, \tag{2}$$

где фаза рассеяния голых частиц Φ и импульс p прежние (1.7), (1.8):

$$\Phi(\alpha) = -i\ln[\mathrm{sh}((\alpha+2i\gamma)/2)/\mathrm{sh}((\alpha-2i\gamma)/2)]; \tag{3}$$

$$p(\alpha) = (2i\Delta)^{-1}[\Psi(\Lambda+\alpha)-\Psi(\Lambda-\alpha)], \tag{4}$$

где $\Psi(\alpha)=\ln[\mathrm{ch}((\alpha+i\gamma)/2)/\mathrm{ch}((\alpha-i\gamma)/2)]$. Здесь безразмерное «обрезание» по быстротам Λ связано с постоянной решетки Δ и голой массой m

следующей формулой:

$$2\,\mathrm{ch}\,\Lambda=(4/m\Delta)^2. \tag{5}$$

Формулы (2)—(5), таким образом, те же, что в модели РСГ, рассмотренной в [1]. Переход к новой модели РСГ заключается с практической точки зрения в замене одночастичной дисперсии (1.9) на одночастичную дисперсию нового гамильтониана [7] — на производную от импульса по быстроте:

$$h_1(\alpha)=\frac{dp(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\sin\gamma}{2\Delta}\left\{\frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha-\Lambda)+\cos\gamma}+\right. \\ \left.+\frac{1}{\mathrm{ch}(\alpha+\Lambda)+\cos\gamma}\right\}. \tag{6}$$

Заметим, что при $|\alpha|\ll\Lambda$ восстанавливается релятивистская инвариантность:

$$h_1(\alpha)\approx(m^2\Delta\sin\gamma\,\mathrm{ch}\,\alpha)/2;\qquad p(\alpha)\approx(m^2\Delta\sin\gamma\,\mathrm{sh}\,\alpha)/2. \tag{7}$$

Энергия возбуждения над голым вакуумом, содержащего частицы с быстротами $\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ (см. (2)), складывается аддитивно из голых энергий отдельных частиц и равна $\sum_{j=1}^{N}h_1(\alpha_j)$. В модели РСГ можно ввести аддитивный оператор топологического заряда [4]; заряд возбуждения над голым вакуумом есть суммарное число частиц в нем.

План дальнейшего изложения следующий. В разделе 2 мы определяем структуру физического вакуума при небольших ($0<\gamma<\pi/2$), а в разделе 3 — при больших ($\pi/2<\gamma<\pi$) константах связи. В разделе 4 снимаем регуляризацию и после перенормировки массы получаем ответы в квантово-полевой модели СГ.

2. МОДЕЛЬ РСГ ПРИ НЕБОЛЬШИХ КОНСТАНТАХ СВЯЗИ ($0<\gamma<\pi/2$)

Рассмотрим сначала модель РСГ в области небольших констант связи $0<\gamma<\pi/2$. Нас интересует, как обычно, термодинамический предел — число узлов решетки $M\to\infty$; шаг решетки Δ фиксирован. Мы исследуем спектр модели для случая, когда величина $\omega\equiv\pi/\gamma$ является рациональным числом. Представим его в виде цепной дроби (используемые здесь и далее обозначения подробно объяснены в [1]):

$$\omega\equiv\frac{\pi}{\gamma}=[\nu_1;\nu_2,\ldots,\nu_J]=\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\cfrac{1}{\nu_3+\ldots+\cfrac{1}{\nu_J}}}=\frac{p_J}{q_J}, \tag{8}$$

где числитель и знаменатель дроби p_J и q_J — взаимно простые целые числа; $\nu_1\geqslant2$ при $\gamma<\pi/2$.

Опишем сначала решения системы (2) для разрешенных быстрот α_l. Это та же система (см. (1.6)), которая возникала в [1], где было показано, что классификация возможных ее решений совпадает с полученной в [8] классификацией решений аналогичной системы уравнений для

XXZ-модели Гейзенберга. Отличие от [1] состоит в том, что теперь мы считаем ω рациональным; переход к таким ω от общего случая легко получить, устремив $\nu_{J+1}\to\infty$ в бесконечной цепной дроби $\omega=[\nu_1; \nu_2, \ldots, \nu_J, \nu_{J+1}, \ldots]$. Таким образом, получаем следующий результат.

Возможные значения α_l в (2) группируются в связанные состояния из различного числа n голых частиц — «струны». Разрешенные значения n могут быть занумерованы положительными числами j $(1\leqslant j<+\infty)$, причем

$$n_j=p_{i-1}+(j-m_i)p_i \qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1;\ 0\leqslant i\leqslant J). \tag{9}$$

Здесь целые числа p_i — числители подходящих к ω (8) дробей $\omega_i=p_i/q_i=[\nu_1; \nu_2, \ldots, \nu_i]$ $(i\leqslant J)$, причем

$$p_i=\nu_i p_{i-1}+p_{i-2}; \qquad p_{-1}\equiv 0; \qquad p_0\equiv 1; \qquad p_i>p_{i-1}. \tag{10}$$

Числа m_i определяются как

$$m_i=\sum_{k=1}^{i}\nu_k\,(i\leqslant J); \qquad m_0\equiv 0,\ m_{J+1}\equiv\infty. \tag{11}$$

Быстроты частиц, образующих j-струну, связаны соотношением

$$\alpha_l=\beta+i\gamma(n_j-2l-1)+i\pi(1-v_j)/2; \tag{12}$$

$$\operatorname{Im}\beta=0; \qquad l=0, 1, \ldots, n_j-1.$$

«Четность» струны v_j определяется числом частиц в ней:

$$v_1=1; \qquad v_{m_1}=-1; \qquad v_j=\exp\{\pi i[(n_j-1)/\omega]\} \qquad (j\neq 1, m_1) \tag{13}$$

(квадратные скобки в показателе экспоненты означают целую часть числа). Вещественную величину β будем называть быстротой струны; разрешенные значения быстрот струн в данной конфигурации (состоящей, вообще говоря, из струн различной длины) должны быть определены из системы (2). Число i, такое что $m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1$, будем называть номером серии, к которой принадлежит j-струна. Для рациональных ω (8) число зон конечно: $0\leqslant i\leqslant J$; при этом в последней зоне $(i=J)$ номер j пробегает значения $m_J\leqslant j<\infty$. Заряд j-струны равен, очевидно, n_j.

Энергия $h_j(\beta)$ (голая) струны с числом частиц n_j равна сумме энергий (6) составляющих ее частиц и дается простой формулой

$$h_j(\beta)=\frac{v_j\sin(n_j\gamma)}{2\Delta}\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}(\beta-\Lambda)+v_j\cos(n_j\gamma)}+(\Lambda\to-\Lambda)\right\}, \tag{14}$$

которая определяет спектр одночастичных возбуждений над голым вакуумом. Заметим, что знак $h_j(\beta)$ определяется номером зоны:

$$\operatorname{sgn} h_j(\beta)=(-1)^i \qquad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1;\ -\infty<\beta<+\infty). \tag{15}$$

Поэтому голый вакуум — состояние без частиц — не является состоянием с наименьшей энергией, и встает вопрос о построении такого состояния (физического вакуума) и спектра одночастичных возбуждений над ним.

Для решения этого вопроса используем подход работы [8], примененный к модели РСГ (с другим, чем здесь, гамильтонианом) в [1]. Опишем результат, останавливаясь подробнее лишь на отличиях. В термодинамическом пределе спектр быстрот струн, разрешенный уравнениями (2), «сгущается», и можно ввести стандартным образом плотности j-струн $\rho_j(\beta)$ и «дырок» в распределении j-струн $\rho_j^h(\beta)$. Эти плотности (положительные функции β) удовлетворяют уравнениям (1.31), которые запишем в матричном виде:

$$\rho_j^h+\rho_j=Z_j+(IDI)_{jk}*\rho_k^h; \quad j=1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

(по k ведется суммирование; $1\leqslant k<\infty$). Здесь

$$Z_j(\beta)=\delta_{j,\, m_{i+1}-1}Z_i(\beta); \tag{17}$$

фурье-образ величины $Z_i(\beta)$ дается формулой (1.35):

$$\tilde{Z}_i(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_i(\beta)\, e^{ik\beta}\, d\beta=\frac{\cos(k\Lambda)}{2\Delta \operatorname{ch} \pi k x_i \operatorname{ch} \pi k x_{i+1}}, \tag{18}$$

где произведение первых $(i+1)$ остатков цепной дроби ω (см. (1.П.7)) есть

$$x_i=x_{i-2}-\nu_i x_{i-1}; \quad x_{-1}=1; \quad x_0=\omega^{-1}=\gamma/\pi; \quad x_{i+1}<x_i. \tag{19}$$

Матрицы I и D (бесконечной размерности) в (16) определяются так:

$$I_{jk}=(-1)^i\delta_{jk} \quad (m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1), \tag{20}$$

$$D_{jk}(\beta)=\begin{cases}(1-2\delta_{j,\, m_i})\,\delta_{j,\, k+1}s_i(\beta)+\delta_{j,\, k+1}s_i(\beta); & m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-2,\\ (1-2\delta_{j,\, m_i})\,\delta_{j,\, k+1}s_i(\beta)+\delta_{jk}d_i(\beta)+\delta_{j,\, k-1}s_{i+1}(\beta); & j=m_{i+1}-1,\end{cases} \tag{21}$$

где фурье-образы положительных функций $s_i(\beta)$ и $d_i(\beta)$ ((1.33), (1.34)) суть

$$\tilde{s}_i(k)=(2\operatorname{ch}\pi k x_i)^{-1}; \tag{22}$$

$$\tilde{d}_i(k)=\operatorname{ch}\pi k(x_i-x_{i+1})/(2\operatorname{ch}\pi k x_i \operatorname{ch}\pi k x_{i+1}).$$

Наконец, звездочка в (17) означает свертку функций в пространстве быстрот: $a*b=\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\beta-\alpha)\, b(\alpha)\, d\alpha.$

Энергия E состояния с данными плотностями частиц и дырок есть $E=L\sum\limits_j\int h_j(\beta)\,\rho_j(\beta)\,d\beta$. Физический вакуум есть состояние с наименьшей энергией. В этом состоянии (при данных j и β) выполняется, очевидно, одно из двух условий – либо $\rho_j(\beta)=0$, либо $\rho_j^h(\beta)=0$. В первом случае одночастичные возбуждения получаются внесением j-струны с быстротой β в вакуум; физическую энергию соответствующего одночастичного возбуждения (энергия полученной конфигурации с учетом поляризации вакуума минус вакуумная энергия) обозначим $\varepsilon_j^+(\beta)$. Во втором случае ($\rho_j^h(\beta)=0$) одночастичное возбуждение получается, если сделать «дырку» в распределении j-струн (удалить j-струну с быстротой β); физическую энергию дырки (энергия полученной конфигурации минус вакуумная) обозначим $\varepsilon_j^h(\beta)$. В физическом вакууме должно быть $\varepsilon_j^+(\beta)\geqslant 0$ (для всех

j и β, где $\rho_j(\beta)=0$) и $\varepsilon_j^h(\beta)\geqslant 0$ (для всех j и β, где $\rho_j^h(\beta)=0$) — именно эти требования определяют, как должен быть заполнен вакуум.

Удобно ввести функции

$$\varepsilon_j(\beta)=\begin{cases}\varepsilon_j^+(\beta)\geqslant 0, & \text{если } \rho_j(\beta)=0,\\ -\varepsilon_j^h(\beta)<0, & \text{если } \rho_j^h(\beta)=0.\end{cases} \tag{23}$$

Тогда физические энергии возбуждений определяются [8, 9, 1] из системы уравнений (1.41), где надо учесть, что величины X_j (1.36) должны быть вычислены с учетом нового закона дисперсии (6), (14). Поэтому получаем

$$\varepsilon_j(\beta)=2\pi I_{jk}Z_k(\beta)+D_{jk}*\varepsilon_k^+(\beta) \qquad (j=1, 2, \ldots), \tag{24}$$

где Z, I, D определены в (17)—(21). Эту систему надо еще дополнить условием [8]

$$\varepsilon_j(\beta)\to 0 \quad \text{при} \quad j\to\infty. \tag{25}$$

Уравнения (24), (25) позволяют определить, какими струнами заполнено вакуумное состояние, и найти физический спектр одночастичных возбуждений.

Нетрудно видеть, что условие (25) в решеточной модели можно удовлетворить, только если $\omega=\pi/\gamma$ — рациональное число; именно такой случай мы и рассматриваем (8). Заметим, что при таких константах связи модель РСГ сводится к (spin 1/2)$\otimes Z_{p_J}$-модели [5] (голый вакуум в этом случае можно сделать нормированным). Это объясняет тот факт, что ответы на решетке весьма сложно зависят от константы связи (непрерывности по γ нет).

При рациональных ω уравнения (24), (25) явно решаются с помощью преобразования Фурье, благодаря тому что функции $\varepsilon_j(\beta)$ оказываются знакоопределенными при $-\infty<\beta<+\infty$. Приведем ответы для фурье-образов энергий $\tilde\varepsilon(k)=\int\varepsilon(\beta)\exp(ik\beta)d\beta$. Выпишем сначала результат для последней ($i=J$) и предпоследней ($i=J-1$) зон, где они зависят от четности J. Если $J=0 \pmod 2$ — четное число, то в последней зоне все энергии равны нулю:

$$\varepsilon_j(\beta)=0 \qquad (j\geqslant m_J;\ J=0 \pmod 2)). \tag{26}$$

В предпоследней зоне равны нулю все энергии, кроме энергий первого и последнего возбуждений в этой зоне:

$$\varepsilon_j(\beta)=0 \qquad (m_{J-1}+1\leqslant j\leqslant m_J-2;\ J=0 \pmod 2)), \tag{27}$$

а все состояния струн с $j=m_{J-1}$ и $j=m_J-1$ заполнены, так что соответствующие $\varepsilon_j^h(\beta)=-\varepsilon_j(\beta)>0$, причем

$$\tilde\varepsilon_j^h(k)=\frac{\pi}{\Delta}\frac{\operatorname{sh}(\pi\nu_{J-1}x_{J-2}k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{ch}(\pi x_{J-1}k)\operatorname{sh}(\pi x_{J-2}k)\operatorname{ch}(\pi x_{J-3}k)} \tag{28}$$

$$(j=m_{J-1};\ i=J-1;\ J=0 \pmod 2)),$$

$$\tilde\varepsilon_j^h(k)=\frac{\pi}{\Delta}\frac{\cos(k\Lambda)}{\operatorname{ch}(\pi x_{J-1}k)} \qquad (j=m_J-1;\ i=J-1;\ J=0 \pmod 2)). \tag{29}$$

Если $J=1 \pmod 2$ нечетное, то в последней зоне энергии всех возбуждений с $j \geqslant m_J+1$ равны нулю:

$$\varepsilon_j(\beta)=0 \quad (j \geqslant m_J+1;\ i=J;\ J=1 \pmod 2)), \tag{30}$$

а физическая энергия возбуждения с $j=m_J$ есть $\varepsilon_{m_J}{}^h(\beta)=-\varepsilon_{m_J}(\beta)>0$, причем

$$\tilde{\varepsilon}_j^h(k)=\frac{\pi}{\Delta}\frac{\operatorname{sh}(\pi\nu_J x_{J-1}k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{sh}(\pi x_{J-1}k)\operatorname{ch}(x_{J-2}k)} \quad (j=m_J;\ i=J;\ J=1 \pmod 2)). \tag{31}$$

Энергии возбуждений в зоне $i=J-1$ при $J=1 \pmod 2$ даются регулярными формулами (35), (36).

Ответы в зонах с $i \leqslant J-2$ зависят от четности числа i. Если i четное, то соответствующие струны в вакууме отсутствуют $(\varepsilon_j(\beta)=\varepsilon_j{}^+(\beta)>0)$, и получаем

$$\tilde{\varepsilon}_j^+(k)=\frac{2\pi}{\Delta}\frac{\operatorname{sh}(j\pi x_0 k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{sh}(\pi x_0 k)\operatorname{ch}(\pi(1-x_0)k)} \quad (1 \leqslant j \leqslant \nu_1-1;\ i=0), \tag{32}$$

$$\tilde{\varepsilon}_j^+(k)=\frac{2\pi}{\Delta}\frac{\operatorname{sh}((j+1-m_i)\pi x_i k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{sh}(\pi x_i k)\operatorname{ch}(\pi x_{i-1}k)} \quad (m_i \leqslant j \leqslant m_{i+1}-1; \tag{33}$$

$$i=0 \pmod 2;\ i \geqslant 2).$$

Из зон с $i=1 \pmod 2$ (нечетным) в вакууме присутствуют только струны с $j=m_i$ $(\varepsilon^h_{m_i}=-\varepsilon_{m_i}>0)$; энергии остальных возбуждений равны нулю:

$$\tilde{\varepsilon}_j^h(k)=\frac{\pi}{\Delta}\frac{\operatorname{sh}(\pi(\nu_1-1)x_0 k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{ch}(\pi x_1 k)\operatorname{sh}(\pi x_0 k)\operatorname{ch}(\pi(1-x_0)k)} \quad (j=\nu_1;\ i=1), \tag{34}$$

$$\tilde{\varepsilon}_j^h(k)=\frac{\pi}{\Delta}\frac{\operatorname{sh}(\pi\nu_i x_{i-1}k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{ch}(\pi x_i k)\operatorname{sh}(\pi x_{i-1}k)\operatorname{ch}(\pi x_{i-2}k)} \quad (j=m_i; \tag{35}$$

$$i=1 \pmod 2;\ i \geqslant 3),$$

$$\varepsilon_j(\beta)=0 \quad (m_i+1 \leqslant j \leqslant m_{i+1}-1;\ i=1 \pmod 2);\ i \geqslant 1). \tag{36}$$

Напомним, что величины x_i, входящие в них, определены в (19), а обрезание Λ – в (5) (в решеточной модели Δ и Λ можно рассматривать как независимые параметры).

Заметим, что в вакууме присутствуют струны, которым соответствуют дырочные возбуждения (34), (35) и (в зависимости от четности числа J) (28), (29) или (31). Соответствующие плотности легко получить, сравнивая системы для плотностей (16) и для физических энергий (24):

$$\rho_j(\beta)=\varepsilon_j{}^h(\beta)/2\pi; \quad \rho_j{}^h(\beta)=0 \tag{37}$$

для струн (34), (35) и (28), (29) или (31) и

$$\rho_j(\beta)=0; \quad \rho_j{}^h(\beta)=\varepsilon_j{}^+(\beta)/2\pi \tag{38}$$

(для остальных струн). Заметим, что для возбуждений с $\varepsilon_j(\beta)=0$ ((26), (27), (30), (36)) $\rho_j=\rho_j{}^h=0$; таким образом, соответствующие возбуждения фактически отсутствуют. Для наблюдаемых возбуждений $j \leqslant m_J$; при этом $n_j<p_J$ (ср. с [8]). Эта связь между плотностями и энергиями

одночастичных возбуждений, возникающая благодаря закону дисперсии (6), характерна для «фундаментальных» моделей типа XXZ-модели Гейзенберга, в которых размерность локального квантового пространства в узле решетки равна матричной размерности матрицы монодромии. Действительно, в [7] было показано, что гамильтониан, приводящий к дисперсии (6), можно построить из R-матрицы «бесконечной» размерности (матричное пространство соответствующей матрицы монодромии имеет ту же размерность, что локальное квантовое пространство модели РСГ).

Итак, формулы (26)—(38) определяют структуру физического вакуума и богатый спектр одночастичных возбуждений в модели РСГ. Обсудим этот спектр более подробно. Функции $\varepsilon_j^+(\beta)$ и $\varepsilon_j^h(\beta)$ (28), (29), (31)—(35) положительны во всем интервале быстрот $(-\infty<\beta<+\infty)$, убывают при $|\beta|\to\infty$ и имеют два максимума при $|\beta|\sim\Lambda$. Нетрудно определить их асимптотики при малых и больших быстротах. Мы выпишем лишь асимптотики при $|\beta|\ll\Lambda$, которые будем использовать в дальнейшем. Из (32) и (34) получаем эти асимптотики для возбуждений основной серии ($i=0$) и низшего возбуждения (дырки) с $j=\nu_1$; $i=1$:

$$\varepsilon_j^+(\beta)=2M_h\sin(j\varkappa\gamma)\operatorname{ch}(\varkappa\beta)\qquad(|\beta|\ll\Lambda;\ i=0;\ 1\leqslant j\leqslant\nu_1-1), \tag{39}$$

$$\varepsilon_{\nu_1}^h(\beta)=M_h\operatorname{ch}(\varkappa\beta)\qquad(i=1;\ j=\nu_1;\ |\beta|\ll\Lambda), \tag{40}$$

где обозначено

$$\varkappa=\pi/(2(\pi-\gamma)), \tag{41}$$

а «масса» дырки есть

$$M_h=2\varkappa(\Delta\sin\varkappa\gamma)^{-1}\exp\{-\varkappa\Lambda\}. \tag{42}$$

Аналогично выглядят и другие асимптотики. Для возбуждений с ненулевой энергией в зонах с $i=0\pmod 2$ и $i=1\pmod 2$ ($i\geqslant1$) (33), (35) имеем при $|\beta|\ll\Lambda$

$$\varepsilon_j^+(\beta)=2M_h^{(s)}\sin(j_s\varkappa_s\pi x_{2s})\operatorname{ch}(\varkappa_s\beta)\qquad(|\beta|\ll\Lambda;\ i=2s;\ m_i\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1), \tag{43}$$

$$\varepsilon_j^h(\beta)=M_h^{(s)}\operatorname{ch}(\varkappa_s\beta)\qquad(|\beta|\ll\Lambda;\ j=m_i;\ i=2s+1), \tag{44}$$

где

$$\varkappa_s=(2x_{2s-1})^{-1}>\varkappa, \tag{45}$$

$$j_s=j+1-m_{2s}\qquad(1\leqslant j_s\leqslant\nu_{2s+1}), \tag{46}$$

$$M_h^{(s)}=2\varkappa_s(\Delta\sin(\varkappa_s\pi x_{2s}))^{-1}\exp\{-\varkappa_s\Lambda\}. \tag{47}$$

На этом завершим здесь рассмотрение модели РСГ в области констант связи $0<\gamma<\pi/2$. Отметим, что характеристики вакуумного состояния (энергия и заряд) и заряды физических возбуждений в модели РСГ обсуждаются в приложении 1.

3. РЕШЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ ПРИ $\pi/2<\gamma<\pi$

Перейдем к рассмотрению модели РСГ при больших $(\pi/2<\gamma<\pi)$ константах связи. Заметим, что при замене константы связи $\gamma\to\pi-\gamma$ и одновременном сдвиге спектрального параметра $\alpha \to \alpha + i\pi$ система уравнений (2) для разрешенных быстрот остается инвариантной, а одночастичная дисперсия (6) меняет знак. Поэтому при $\pi/2 < \gamma < \pi$ удобно перейти к константе связи μ:

(48) $$\mu = \pi - \gamma; \quad 0 < \mu < \pi/2,$$

и разложить величину $\omega = \pi/\mu$ в цепную дробь (8):

(49) $$\omega = \pi/\mu = [\nu_1; \nu_2, \dots, \nu_J] = p_J/q_J.$$

Тогда решения системы (2) в терминах константы связи μ и сдвинутого спектрального параметра останутся старые (9)—(13); голые энергии связанных состояний (струн) (14) поменяют знак:

(50) $$h_j(\beta) = -\frac{v_j \sin(n_j\mu)}{2\Delta} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch}(\beta - \Lambda) + v_j \cos(n_j\mu)} + (\Lambda \to -\Lambda) \right\};$$
$$\operatorname{sgn} h_j(\beta) = (-1)^{i+1}.$$

Система уравнений (16) для плотностей ρ_j, ρ_j^h сохранится; величины Z_i, входящие в (16), (17), должны по-прежнему вычисляться из (18), но произведения остатков x_i определяются теперь по цепной дроби (49)

(51) $$x_i = x_{i-2} - \nu_i x_{i-1}; \quad x_{-1} = 1; \quad x_0 = \omega^{-1} = \mu/\pi.$$

В системе уравнений для энергий физических возбуждений (24) изменится лишь знак первого слагаемого в правой части благодаря появлению знака минус в (50). Это, конечно, приведет к изменению картины вакуумного заполнения и спектра физических возбуждений. Возбуждения основной серии $i=0$ теперь имеют нулевую энергию:

(52) $$\varepsilon_j(\beta) = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant \nu_1 - 1;\ i = 0).$$

В серии $i=1$ все возбуждения типа частиц $(\varepsilon_j(\beta) = \varepsilon_j^+(\beta) > 0)$, причем фурье-образы энергий суть

(53) $$\tilde{\varepsilon}_j^+(k) = \frac{2\pi}{\Delta} \frac{\operatorname{sh}(\pi(1 - \nu_1 + j)x_1 k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{sh}(\pi x_1 k)\operatorname{ch}(\pi x_0 k)} \quad (\nu_1 \leqslant j \leqslant \nu_1 + \nu_2 - 1).$$

В серии $i=2$ все состояния низшей $(j = m_2)$ струны заполнены $(\varepsilon_{m_2} < 0)$; фурье-образ энергии соответствующей дырки есть

(54) $$\tilde{\varepsilon}_j^h(k) = \frac{\pi}{\Delta} \frac{\operatorname{sh}(\pi\nu_2 x_1 k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{ch}(\pi x_2 k)\operatorname{sh}(\pi x_1 k)\operatorname{ch}(\pi x_0 k)} \quad (j = m_2;\ i = 2).$$

Энергии остальных возбуждений в этой зоне равны нулю:

(55) $$\varepsilon_j(\beta) = 0 \quad (m_2 + 1 \leqslant j \leqslant m_3 - 1).$$

Энергии возбуждений в следующих сериях $(i \geqslant 3)$ аналогичны случаю $\gamma < \pi/2$ ((33), (35), (36)), только четные и нечетные зоны «меняются местами»:

(56) $$\tilde{\varepsilon}_j^+(k) = \frac{2\pi}{\Delta} \frac{\operatorname{sh}(\pi(1 - m_{2s+1} + j)x_{2s+1}k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{sh}(\pi x_{2s+1}k)\operatorname{ch}(\pi x_{2s}k)}$$
$$(m_i \leqslant j \leqslant m_{i+1} - 1;\ i = 2s+1;\ s \geqslant 1),$$

(57) $$\tilde{\varepsilon}_j^h(k)=\frac{\pi}{\Delta}\,\frac{\operatorname{sh}(\pi\nu_{2s}x_{2s-1}k)\cos(k\Lambda)}{\operatorname{ch}(\pi x_{2s}k)\operatorname{sh}(\pi x_{2s-1}k)\operatorname{ch}(\pi x_{2s-2}k)}$$

$$(j=m_{2s};\ i=2s;\ s\geqslant 2),$$

(58) $$\varepsilon_j(\beta)=0\qquad (m_i+1\leqslant j\leqslant m_{i+1}-1;\ i=2s;\ s\geqslant 2)$$

(энергии возбуждений для зон с $i=J$ и $i=J-1$ получаются, как и в случае $\gamma<\pi/2$ ((26)–(31)), зависящими от четности числа J; мы их не выписываем).

Формулы (53)–(58) определяют спектр физических возбуждений при $\pi/2<\gamma<\pi$. Функции $\varepsilon_j^+(\beta)$ и $\varepsilon_j^h(\beta)$ в этих формулах – положительные функции β, убывающие при $|\beta|\to\infty$. Легко определить их асимптотики при больших и малых быстротах. Выпишем асимптотику при $|\beta|\ll\Lambda$ низших возбуждений ($\nu_1\leqslant j\leqslant\nu_1+\nu_2=m_2$), которые важны в квантово-полевом пределе. Для энергии дырки в распределении m_2-струн ($n_{m_2}=\nu_1$) получаем

(59) $$\varepsilon_{m_2}^h(\beta)=M_h\operatorname{ch}(\varkappa\beta);\qquad |\beta|\ll\Lambda;$$

при этом

(60) $$\varepsilon_j^+(\beta)=2M_h\sin((j+1-\nu_1)x_1\varkappa\gamma)\operatorname{ch}(\varkappa\beta)$$

$$(|\beta|\ll\Lambda;\ \nu_1\leqslant j\leqslant\nu_1+\nu_2-1=m_2-1)$$

Здесь $\varkappa$ (в терминах γ) дается формулой (41):

(61) $$\varkappa=1/2x_0=\pi/2\mu=\pi/2(\pi-\gamma),$$

а «масса» дырки M_h есть

(62) $$M_h=2\varkappa(\Delta\sin(\varkappa x_1\pi))^{-1}\exp\{-\varkappa\Lambda\}.$$

Асимптотики остальных состояний выписывать не будем; отметим только, что

(63) $$\varepsilon_j^{+,h}(\beta)\sim\Delta^{-1}\exp\{-a\Lambda\}\qquad (j\geqslant m_2+1),$$

где $a>\varkappa$.

4. КВАНТОВО-ПОЛЕВАЯ МОДЕЛЬ СИНУС-ГОРДОН

Для перехода к квантово-полевой модели СГ необходимо устремить постоянную решетки к нулю и произвести перенормировку массы. Удобно рассматривать как независимые параметры решеточной теории голую массу m и обрезание по быстротам Λ, при этом (см. (5))

(64) $$\Delta=4m^{-1}\exp\{-\Lambda/2\}\qquad(\Delta\to 0;\ \Lambda\to\infty).$$

Рассмотрим сначала случай небольших констант связи $0<\gamma<\pi/2$. Перенормировку массы произведем, потребовав, чтобы при $\Delta\to 0$ оставалась конечной масса M_h (42) дырки в распределении ν_1-струн (напомним, что $n_{\nu_1}=1$, $v_{\nu_1}=-1$, и ν_1-струна – это просто элементарная частица с отрицательной энергией). При этом голая масса m должна стремиться к бесконечности,

(65) $$m=2\varkappa^{-1}\sin(\varkappa\gamma)M_h\exp\{\gamma\Lambda'/\pi\},$$

где $\varkappa=\pi/2(\pi-\gamma)$ (41), и мы ввели обрезание по перенормированной быстроте ϑ:

(66) $\vartheta=\varkappa\beta; \quad \Lambda'=\varkappa\Lambda.$

После перенормировки (65) энергии физических возбуждений с $j\leqslant\nu_1$ остаются при конечных быстротах конечными (см. (39), (40)) и восстанавливается релятивистская инвариантность:

(67) $\varepsilon_j^+(\beta)=2M_h\sin(j\varkappa\gamma)\,\mathrm{ch}\,\vartheta \quad (1\leqslant j\leqslant\nu_1-1),$

(68) $\varepsilon_{\nu_1}{}^h=M_h\,\mathrm{ch}\,\vartheta.$

Тем самым мы восстановили известный спектр модели СГ при $\gamma<\pi/2$ [10, 1]. Заметим, что возбуждения решеточной модели с $j\geqslant\nu_1+1$ в пределе (64), (65) при конечных быстротах имеют нулевую энергию (см. (43)–(47)). При этом и плотности ρ_j, $\rho_j{}^h$ для этих состояний обращаются в нуль при конечных быстротах (см. (37), (38)). Поэтому соответствующих возбуждений в спектре не остается, и картина вакуумного заполнения в квантово-полевой модели при $0<\gamma<\pi/2$ проста: вакуум заполнен элементарными частицами с отрицательной энергией (ν_1-струнами); одночастичные возбуждения при этом получаются либо при внесении в вакуум струны с $j\leqslant\nu_1-1$ (связанного состояния j элементарных частиц) (67), либо при образовании дырки в вакууме (68). Заметим, что при таком предположении о вакуумном заполнении получаем и обычные физические заряды этих возбуждений – «частицы» (67) имеют нулевой физический заряд, а дырка (68) – заряд $[\pi/\gamma]/2$ [1] (в отличие от собственно решеточной модели; см. приложение 1). С помощью метода одевающих уравнений [11] можно вычислить и S-матрицу одетых частиц; она оказывается равной вычисленной в [11] S-матрице массивной модели Тирринга. Таким образом, при небольших ($0<\gamma<\pi/2$) константах связи мы воспроизводим все те же ответы модели СГ, что и при другом выборе регуляризации, сделанном в [1], хотя соответствующие решеточные модели весьма различны. В частности, восстанавливается обычная зависимость ответов от константы связи в этой области (непрерывность в интервалах $\pi/(n+1)<\gamma<\pi/n$; n – целое).

Рассмотрим теперь область больших констант связи ($\pi/2<\gamma<\pi$). Перенормировку массы в этой области определим из требования, чтобы масса дырки M_h в m_2-струне ($n_{m_2}=\nu_1=[\pi/(\pi-\gamma)]$) (59) оставалась конечной при $\Delta\to0$. Это дает

(69) $m=2\varkappa^{-1}\sin(\varkappa\pi x_1)M_h\exp\{\gamma\Lambda'/\pi\},$

где Λ – обрезание по перенормированным быстротам ϑ (66). Таким образом, формула перенормировки массы осталась, в сущности, той же, что и в области $\gamma<\pi/2$. При этом при конечных быстротах остаются конечными энергии струн с $\nu_1\leqslant j\leqslant m_2$, причем из (59)–(61) получаем

(70) $\varepsilon_{m_2}{}^h=M_h\,\mathrm{ch}\,\vartheta,$

(71) $\varepsilon_j^+=2M_h\sin(\mathcal{J}x_1\varkappa\gamma)\,\mathrm{ch}\,\vartheta$

$(\nu_1\leqslant j\leqslant\nu_1+\nu_2-1;\ \mathcal{J}=j-\nu_1=1, 2, \ldots, \nu_2).$

Нетрудно видеть, что вследствие (63) энергии возбуждений, имевших на решетке ненулевую энергию (56), (57), и возбуждений в зонах $i=J-1, J,$

формулы для которых мы явно не выписываем при $\pi/2<\gamma<\pi$, в квантово-полевом пределе обращаются в нуль при любых конечных быстротах; плотности ρ и ρ^h для них также обращаются при этом в нуль.

Таким образом, вакуумное состояние в квантово-полевой модели заполнено m_2-струнами — связанными состояниями элементарных частиц. На интервале $(\nu_1-1)/\nu_1<\gamma/\pi<\nu_1/(\nu_1+1)$ $(\nu_1=[\pi/\mu]=[\pi/(\pi-\gamma)])$ это связанные состояния ν_1 частиц. Можно доказать, что такие связанные состояния остаются стабильными и над физическим вакуумом. Спектр одночастичных возбуждений на этом интервале состоит из (ν_2+1) ветвей. Одна из них соответствует дырке в вакуумном заполнении (70). Другие ветви (71) получаются при внесении j-струн $(\nu_1\leqslant j\leqslant\nu_1+\nu_2-1)$ в физический вакуум (заметим, что число частиц в такой j-струне есть $n_j=1+(j-\nu_2)\nu_2$). Физический заряд дырки равен $\nu_1/2$; остальные возбуждения имеют нулевой заряд. S-матрица вычислена в приложении 2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы построили физический вакуум и нашли спектр одночастичных возбуждений в решеточной версии модели СГ, описывающей взаимодействие бозонных полей в соседних узлах одномерной решетки. Эта модель дает естественную регуляризацию квантово-полевой модели СГ, которая получается из решеточной модели в пределе нулевой постоянной решетки при соответствующей перенормировке массы. В области малых констант связи $(0<\gamma<\pi/2)$ воспроизводятся все известные ответы в модели СГ, которые согласованы с теорией возмущений [10]. При больших константах связи $(\pi/2<\gamma<\pi)$ модель СГ не описывается теорией возмущений по γ; ее гамильтониан нуждается в доопределении. Такое доопределение и дает фактически модель РСГ. Оказывается, что при регуляризации с помощью рассмотренной здесь модели с гамильтонианом [7] в точках $\gamma/\pi=(\nu_1-1)/\nu_1$ $(\nu_1=2, 3, \ldots)$ происходят фазовые переходы, связанные с перестройкой вакуума. Ниже этой точки море Дирака заполнено связанными состояниями ν_1-1 частиц, выше — связанными состояниями ν_1 частиц. Первый такой переход происходит в точке $\gamma=\pi/2$.

Заметим, что можно регуляризовать модель СГ и с помощью модели РСГ с другим гамильтонианом [5], спектр которого был (в области $\gamma<$ $<2\pi/3$) исследован в работах [1, 6] (см. также [12]). Оказывается, что в области $0<\gamma<\pi/2$ в квантово-полевом пределе ответы совпадают. В области же $\gamma>\pi/2$ наблюдается отличие. При регуляризации с гамильтонианом [5] фазовый переход в точке $\gamma=\pi/2$ отсутствует; в окрестности этой точки (вплоть до $\gamma=2\pi/3$) теория описывается теорией возмущений массивной модели Тирринга (точка $\gamma=\pi/2$ соответствует свободным фермионам). Тем не менее в точках $\gamma/\pi=(\nu_1-1)/\nu_1$ $(\nu_1\geqslant3)$ фазовые переходы остаются. Именно в этих точках они и были впервые найдены в работе [13]. Мы видим, что хотя конкретный вид теории при больших константах связи и может зависеть от способа регуляризации, наличие таких фазовых переходов является характерной чертой модели СГ и массивной модели Тирринга при корректной регуляризации.

Мы благодарим В. Е. Корепина за стимулирующие обсуждения и замечания и Л. Д. Фаддеева за интерес к работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Уравнение для наблюдаемых зарядов в модели РСГ (1.42) с помощью матрицы D можно записать в виде

(П.1) $$z_j = D_{jk} * z_k;\quad \lim_{j\to\infty} (z_j/n_j) = 1.$$

При рациональных ω уравнение явно решается. Если $J=2s$, то заряды всех возбуждений с $j<m_J-1$ равны нулю;

$$\overset{h}{z}_{m_J-1} = -z_{m_J-1} = p_J/2;\qquad z_j = (j-m_J)p_J\qquad (j\geqslant m_J).$$

Аналогично и для $J=2s+1$:

$$z_j = 0\ (j<m_J);\qquad z_{m_J}{}^h = p_J/2;\qquad z_j = (j-m_J)p_J\ (j>m_J).$$

Решение уравнения (П.1) для непрерывной модели при $\gamma<\pi/2$ подробно описано в [1]. В области $\gamma>\pi/2$ имеем

$$z_{m_2}{}^h = -z_{m_2} = \nu_1/2;\qquad z_{m_2+1} = \nu_1;\qquad z_{j>m_2+1} = \nu_1 \overset{(i)}{Q_j};\qquad z_{j<m_2} = 0.$$

Энергия вакуума вычисляется по формуле

$$E/L = -\sum_k (-1)^i \int a_k(\beta)\,\varepsilon_k{}^h(\beta)\,d\beta.$$

Гамильтониан модели инвариантен относительно сдвига $h(\Lambda)=h(\Lambda+2i\pi)$. Часть энергии вакуума, неинвариантную относительно этого сдвига, назовем сингулярной частью. Приведем асимптотику E_{sing} при $\Lambda\to\infty$. В области $0<\gamma<\pi/2$

(П.2) $$E_{\mathrm{sing}}/M \cong -2\varkappa(\Delta\sin(\varkappa\gamma)\sin(\varkappa\pi))^{-1}\exp\{-2\varkappa\Lambda\}.$$

В области $\gamma>\pi/2$

(П.3) $$E_{\mathrm{sing}}/M = -2\varkappa(\Delta\sin(\varkappa\pi)\sin(\varkappa x_1\pi))^{-1}\sin(\nu_1\pi/2)\exp\{-2\varkappa\Lambda\}.$$

Из этой формулы видно, что в точках $\gamma/\pi=(\nu_1-1)/\nu_1$ происходят фазовые переходы первого рода по константе связи.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Определим логарифмические производные элементов S-матрицы:

$$\frac{1}{i}\frac{d}{d\alpha}\ln S_{jl}(\alpha) \equiv 2\pi\theta_{jl}.$$

Функции θ_{jl} удовлетворяют уравнению

(П.4) $$\overset{+,\pm}{\theta_{jl}} + \overset{-,\pm}{\theta_{jl}} \pm (DI)_{jl} = D_{jk} * \overset{+,\pm}{\theta_{kl}};\qquad \theta_{j0} = \theta_{0j} = 0.$$

Знаки «+», «−» указывают на принадлежность j-, l-струн областям $\varepsilon\geqslant0$, $\varepsilon<0$, соответственно.

Рассмотрим полевую модель. В области $\gamma<\pi/2$ (вакуумное состояние заполнено ν_1-струнами) решения уравнения (П.2) совпадают с известными [11]. Для области $\pi/2<\gamma<\pi$ (вакуумное состояние заполнено m_2-струнами) выпишем фурье-образы некоторых интегральных решений, из которых по стандартным правилам [11, 13] строится матрица рассеяния физических возбуждений:

(П.5) $$\tilde{\theta}^{-,-}_{m_2,m_2}(k) = -\frac{\mathrm{sh}((x_0-x_1)k\pi)}{2\,\mathrm{sh}(x_1k\pi)\,\mathrm{ch}(x_0k\pi)} + \frac{\mathrm{sh}((\nu_1-1)x_0k\pi)}{2\,\mathrm{ch}(x_0k\pi)\,\mathrm{sh}(\nu_1x_0k\pi)},$$

(П.6) $$\tilde{\theta}^{+,-}_{j,m_2}(k) = \frac{\mathrm{sh}((x_{i-1}-(j-m_i)x_i)k\pi)}{\mathrm{sh}((-1)^i x_1k\pi)}\qquad (j>m_2),$$

(П.7) $$\tilde{\theta}^{+,-}_{\nu_1,m_2}(k) = \frac{\mathrm{ch}((1-x_0)k\pi)\,\mathrm{sh}(x_0k\pi)}{\mathrm{ch}(x_0k\pi)\,\mathrm{sh}(\nu_1x_0k\pi)}.$$

Литература

[1] *Боголюбов Н. М., Изергин А. Г.*— ТМФ, 1984, *59*, № 2, 183–199.
[2] *Фаддеев Л. Д.* Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. Препринт Р-2-79, Л.: ЛОМИ АН СССР, 1979.
[3] *Склянин Е. К., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— ТМФ, 1979, *40*, № 2, 194–220.
[4] *Изергин А. Г., Корепин В. Е.*— Вестн. ЛГУ, 1981, № 22, 84–87.
[5] *Izergin A. G., Korepin V. E.*— Nucl. Phys., 1982, *B205*, FS5, № 3, 401–413.
[6] *Боголюбов Н. М.*— ТМФ, 1982, *51*, № 3, 344–354.
[7] *Тарасов В. О., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.*— ТМФ, 1983, *57*, № 2, 163–182.
[8] *Takahashi M., Suzuki M.*— Progr. Theor. Phys., 1972, *48*, № 6B, 2187–2208.
[9] *Yang C. N., Yang C. P.*— J. Math. Phys., 1969, *10*, 1115–1122.
[10] *Faddeev L. D., Korepin V. E.*— Phys. Rep., 1978, *42C*, № 1, 1–87.
[11] *Корепин В. Е.*— ТМФ, 1979, *41*, № 2, 169–189.
[12] *Ishikawa M., Hida K.* Preprint PAC № 05.30, 1984.
[13] *Korepin V. E.*— Commun. Math. Phys., 1980, *76*, 165–176.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12.VIII.1984 г.

THE LATTICE SINE-GORDON MODEL WITH THE LOCAL HAMILTONIAN

Bogoliubov N. M., Izergin A. G.

The spectrum of excitations for the quantum lattice sine-Gordon model describing the interaction of the neighbouring lattice sites is obtained. This lattice model gives one of possible regularizations of the quantum field sine-Gordon model which preserve the property of complete integrability of the model. It is shown that phase transitions at the points $\gamma=\pi n/(n+1)$ (n being integer) exist due to the change of vacuum structure.