

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Я. Блинкин, Задача оптимального управления транспортным потоком на автомобильной магистрали, *Автомат. и телемех.*, 1976, выпуск 5, 27–33

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

23 марта 2025 г., 05:28:23



**ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫМ
ПОТОКОМ НА АВТОМОБИЛЬНОЙ МАГИСТРАЛИ**

М. Я. БЛИНКИН

(Москва)

Изучается детерминированная идеализация задачи управления транспортным потоком на автомобильной магистрали. Модель строится на основе гидродинамических аналогий, переменные управления характеризуют воздействия на работу въездов на магистраль, скорости движения и смены полос движения. После естественной дискретизации задача укладывается в рамки теории дискретного оптимального управления.

Рассматриваемая задача возникла в связи с необходимостью разработки первой отечественной системы управления транспортным потоком на автомобильной магистрали, общая характеристика которой дана в статьях [1, 2]. Под автомобильной магистралью понимается многополосная автомобильная дорога с разделением встречных потоков, без пересечений потоков в одном уровне и с въездами только на специальных перекрестках.

Понятие управления транспортным потоком на автомобильной магистрали включает в себя три момента: глобальное управление въездами, т. е. дозирование величин входящих с каждого въезда потоков с учетом загрузки магистрали в целом; предписывание определенных скоростей по полосам движения на каждом участке магистрали; назначение определенного порядка смены полос. Во всех случаях речь идет о макровоздействиях, т. е. управлении транспортным потоком в целом, а не отдельными автомобилями.

Настоящая работа посвящена постановке и решению нелинейной задачи оптимального управления транспортным потоком на автомобильной магистрали. В первом разделе формируется модель, описывающая движение транспортного потока в макроскопических терминах. Во втором разделе в построенную модель вводятся управляющие переменные и обсуждается возможность их физической реализации. Третий раздел посвящен формулировке задачи оптимального управления транспортным потоком. Далее приводится пример оптимального управления транспортным потоком на участке автомобильной магистрали.

Задачам, близким к кругу вопросов настоящей статьи, посвящен ряд зарубежных работ. Так, задача глобального управления въездами в «статике» сводится в [3] к схеме линейного программирования, а в [4], в несколько иной постановке, к схеме динамического программирования. Задача поддержания транспортного потока на автомобильной магистрали в некотором номинальном состоянии путем дозирования потоков на въездах рассмотрена в рамках техники линейного оптимального управления в [5]. Наш подход отличается рассмотрением многополосных моделей, характером введения управляющих переменных и применяемым аппаратом оптимизации.

1. Модель транспортного потока на автомобильной магистрали

В связи с тем, что при управлении транспортным потоком возможные управляющие воздействия носят не локальный, т. е. относящийся к одному автомобилю, а глобальный характер, в качестве фазовых переменных системы «транспортный поток» будем рассматривать макроскопические величины, определяющие плотность $\rho(x, t)$ и скорость $v(x, t)$ транспортного потока. Построенные далее модели в значительной степени базируются на гидродинамических представлениях, т. е. на точке зрения, восходящей к известной работе Лайтхилла и Уайтхема [6]. Модель включает два уравнения, связывающих фазовые переменные $\rho(x, t)$, $v(x, t)$. Первое уравнение представляет собой стандартное уравнение неразрывности и записывается в виде

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = Q(x, t),$$

где $Q(x, t)$ — функция источников. Это уравнение выражает тот факт, что приращение плотности $\rho(x, t)$ представляет собой алгебраическую сумму входящих и выходящих потоков из участка автомобильной магистрали. Заметим, что выходящий поток в произвольном сечении участка равен

$$(2) \quad \lambda(x, t) = \rho(x, t) v(x, t).$$

Для составления второго уравнения модели необходимо учесть три следующих эффекта, имеющих место в плотном транспортном потоке.

1. *Эффект инерции.* Его смысл состоит в том, что транспортный поток имеет тенденцию сохранять скорость при переходе от предыдущего участка к последующему, вызывая соответствующее изменение скорости на последующем участке.

2. *Эффект торможения перед более плотным потоком последующего участка или, соответственно, всасывания в менее плотный поток.* Этот эффект позволяет ввести в уравнение движения величину, аналогичную давлению в сжимаемой жидкости.

3. *Эффект релаксации к равновесному состоянию.* Этот эффект соответствует экспериментально наблюдаемому факту, что в равновесных состояниях скорость транспортного потока является функцией плотности

$$(3) \quad v = v^*(\rho).$$

Соотношение, учитывающее все перечисленные эффекты, которое будем называть уравнением движения, аналогично уравнению движения сжимаемой жидкости [7]: с учетом введенного эффекта релаксации оно может быть представлено следующим образом:

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\tau} [v - v^*(\rho)].$$

Здесь $P = P(x, t)$ — давление, τ — параметр релаксации. Член $\frac{\partial v}{\partial x}$ отражает первый из упомянутых эффектов, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ — второй и $\frac{1}{\tau} [v - v^*(\rho)]$ — третий эффект — эффект релаксации.

Как и для идеального газа, для случая транспортного потока давление P представляет собой функцию плотности $\rho(x, t)$. Следуя этой аналогии, положим

$$(5) \quad P = D \rho^\gamma, \quad D = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}.$$

Численные значения связаны с характером зависимости $v^*(\rho)$. Так, $\gamma = 1$ соответствует логарифмической гипотезе Гринберга, $\gamma = 3$ — линейной

гипотезе Гриншилдса. Упомянутые, а также другие известные гипотезы верифицируются на обширном статистическом материале в работе [8].

Уравнения (1), (4) будем называть моделью транспортного потока на автомобильной магистрали.

Отметим, что соотношение для плотности и интенсивности равновесных состояний, следующее из (2) и (3), т. е. уравнение

$$(6) \quad \lambda = \rho v^*(\rho),$$

принято называть основной диаграммой, или λ - ρ -диаграммой, транспортного потока. Фундаментальным экспериментальным фактом является характер этой зависимости, в силу которого $\lambda(0) = \lambda(\bar{\rho}) = 0$, где $\bar{\rho}$ — критическая плотность, а производная $d\lambda/d\rho$, называемая волновой скоростью, меняет знак только один раз.

2. Управляющие параметры в модели транспортного потока

Введение управлений в построенную модель транспортного потока будем проводить одновременно с приведением этой модели к дискретному виду, удобному для дальнейшего изучения. С этой целью рассмотрим m -полосную автомобильную магистраль, транспортный поток на которой движется в одном направлении.

Магистраль разделена на n участков, на каждом из которых может находиться съезд и (или) въезд. Граничные сечения участков выбираются таким образом, что въезды расположены в начале, а съезды в конце участка (рис. 1). Будем производить дискретизацию модели (1), (5) как по пространству,

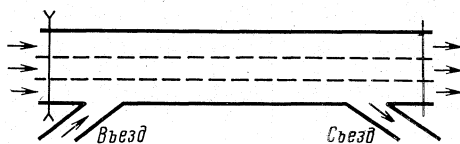


Рис. 1. Схема участка автомобильной магистрали

так и по времени. Пространственный шаг l — это, вообще говоря, переменная длина участка, шаг по времени Δ является величиной, равной (быть может, кратной) частоте спроса датчиков движения. Для действующих систем в США и ФРГ $l \leq 1$ км (см. [5]). Δ имеет порядок 0,01 часа. В дискретной модели в качестве фазовых переменных будем использовать величины $\rho_{i,j}(t)$ и $v_{i,j}(t)$ — плотность и скорость транспортного потока на j -й полосе i -го участка магистрали.

При дискретизации уравнения неразрывности необходимо уточнить природу функций источников. В данном случае эти функции таковы: $q_{i,\alpha,\beta}(t)$ — поток, переходящий в пределах i -го участка с полосы α на полосу β ; $f_i^+(t)$ — поток, прибывающий на магистраль с i -го въезда; $f_i^-(t)$ — поток, уходящий с магистрали на i -м съезде.

Заметим, что поток на i -м въезде не может превышать величины динамической пропускной способности въезда, зависящей от плотности потока на предшествующем участке, т. е. $f_i^+(t) \leq c_i(\rho_{i-1}(t))$, где функция c_i зависит как от геометрических характеристик въезда, так и от качества локального управления, т. е. автоматического выбора подходящих интервалов в потоке. Из соображений глобального управления даже при наличии очередей на въездах не обязательно полное использование пропускной способности въезда. Вводя управляющий параметр ξ , имеем

$$(7) \quad f_i^+(t) = \xi_i c_i(\rho_{i-1}(t)),$$

где $0 \leq \xi_i \leq 1$. Очевидно, что управляющий параметр ξ_i означает, какую долю динамической пропускной способности данного въезда разрешено использовать из соображений управления транспортным потоком на ма-

гистралей в целом. Поток на съезде $f_i^-(t)$ не может, разумеется, превышать интенсивности крайней полосы, т. е.

$$(8) \quad f_i^-(t) = r_i \rho_{i-1,1}(t) v_{i-1,1}(t),$$

где r_i — параметр пользования съездом ($0 \leq r_i \leq 1$).

Для выражения величины потока, переходящего с полосы α на полосу β в пределах i -го участка, воспользуемся моделью Оливера — Лэма [9], которая при подходящем подборе параметров представляется вполне удовлетворительной. Вводя управляющий параметр смены полосы — $\theta_{i,\alpha,\beta}$ ($\theta_{i,\alpha,\beta} = 1$ — разрешение, $\theta_{i,\alpha,\beta} = 0$ — запрет), имеем:

$$(9) \quad q_{i,\alpha,\beta}(t) = \theta_{i,\alpha,\beta} P_{i,\alpha,\beta} \rho_{i,\alpha}^2 [\bar{\rho}_{i,\beta} - \rho_{i,\beta}(t)],$$

где $\bar{\rho}_{i,\beta}$ — критическая плотность; $P_{i,\alpha,\beta}$ — параметр перехода (величина порядка $0,01 \text{ км}^3/\text{час}$). Таким образом, первое уравнение модели имеет вид

$$(10a) \quad \rho_{ij}(t+1) = \rho_{ij}(t) + \frac{\Delta}{l_i} [\rho_{i-1,j}(t) v_{i-1,j}(t) - \rho_{i,j}(t) v_{i,j}(t) + q_{i,j-1,j}(t) + q_{i,j+1,j}(t) - q_{i,j,j-1}(t) - q_{i,j,j+1}(t)],$$

где $j > 1$, $1 < i < n$. Для $j=1$, учитывая, что въезды и съезды происходят только с крайней полосы, имеем:

$$(10b) \quad \rho_{i,1}(t+1) = \rho_{i,1}(t) + \frac{\Delta}{l_i} [\rho_{i-1,1}(t) v_{i-1,1}(t) (1 - r_{i-1}(t)) - \rho_{i,1}(t) v_{i,1}(t) + q_{i,2,1}(t) - q_{i,1,2}(t) + c_i(\rho_{i-1,1}(t)) \xi_i].$$

Уравнения для граничных участков пишутся таким же образом с очевидными видоизменениями.

Второе уравнение напомним с учетом управления скоростями, т. е. в предположении, что релаксация происходит не к максимально возможной при данной плотности ρ равновесной скорости $v^*(\rho)$, а к рекомендованному значению $\chi v^*(\rho)$, где χ — управляющий параметр по скорости ($0 \leq \chi \leq 1$). Таким образом, имеем

$$(11) \quad v_{i,j}(t+1) = v_{i,j}(t) - \Delta \left\{ v_{i,j}(t) \frac{2[v_{i,j}(t) - v_{i-1,j}(t)]}{l_i + l_{i-1}} + \frac{1}{\tau} [v_{i,j}(t) - \chi_{i,j} v_{i,j}^*(\rho_{i,j}(t))] + a \rho_{i,j}(t) \frac{2[\rho_{i+1,j}(t) - \rho_{i,j}(t)]}{l_i + l_{i+1}} \right\}.$$

Здесь слагаемое для давления выписано в предположении, что $\gamma=3$, т. е. по простейшей гипотезе Гриндшилдса. Так как вклад третьего слагаемого невелик, здесь нет нужды пользоваться более тонкими допущениями. Функцию $v^*(\rho)$ для второго слагаемого необходимо выбирать гораздо аккуратнее, руководствуясь экспериментальными данными для конкретного участка магистрали. Параметр τ имеет величину порядка $0,002$ часа, a — порядка $1,25 \text{ км}^4/\text{час}$.

Для полноты описания системы представляется естественным ввести уравнение, характеризующее изменение длин очередей на въездах:

$$(12) \quad L_i(t+1) = L_i(t) + \Delta [f_i(t) - c_i(\rho_{i-1}(t)) \xi_i],$$

где $f_i(t)$ — интенсивность спроса на i -й въезд.

3. Задача оптимального управления

Введем совокупные переменные: фазового состояния $x = \{p_{i,j}; v_{i,j}; L_i\}$ — $n(2m+1)$ -мерный вектор; входа $z = \{g_j; f_i; r_i\}$ — $(2n+m)$ -мерный вектор; управления $u = \{\xi_i; \chi_{i,j}; \theta_{i,j,k}\}$ — $n(3m+1)$ -мерный вектор, где g_j — интенсивность въезда на начальный участок магистрали. В введенных переменных имеем следующее уравнение:

$$(13) \quad x(t+1) = A[x(t), z(t)] + B[x(t)]u(t),$$

где вектор-функция A и матрица B заданы правыми частями уравнений (10а), (10б), (11), (12). Имеют место ограничения на переменные управления:

$$(14a) \quad 0 \leq u_i \leq 1 \text{ при } 1 \leq i \leq n(m+1),$$

$$(14b) \quad u_i = 0 \vee 1 \text{ при } n(m+1) < i \leq n(3m+1)$$

и фазовые переменные:

$$(15a) \quad x_i \geq 0 \text{ при } 1 \leq i \leq n(2m+1),$$

$$(15b) \quad x_i \leq \bar{x}_i \text{ при } 1 \leq i \leq nm.$$

Заметим, что в физически содержательной ситуации из ограничений на фазовые переменные только условия неотрицательности очередей ($x_i \geq 0$ при $2nm < i \leq n(2m+1)$) могут выступать в качестве «активных».

Выбор целевого функционала должен отражать неизбежный при высоком уровне спроса на пользование магистралью компромисс между плот-

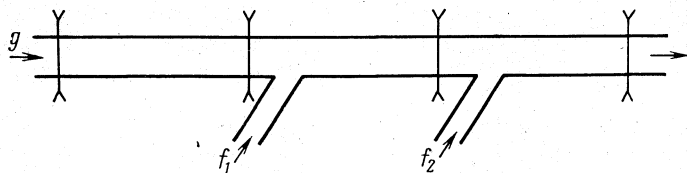


Рис. 2. Три однополосных участка с двумя въездами

ностью потока на магистрали и ожиданием въезда. Повышение плотности приводит к снижению скорости, т. е. к увеличению временных потерь транспортного потока на магистрали, кроме того, создает опасность переуплотнения потока, чреватого образованием заторов. С другой стороны, очереди на въездах — это потери времени в системе в чистом виде. Представляется разумным следующий вид целевого функционала (функционала обобщенной задержки), значение которого нужно минимизировать:

$$(16) \quad J = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^N (Qx(t), x(t)),$$

где $N\Delta$ — временной интервал, в течение которого производится управление, а

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

— блок-матрица, блоки которой Q_1 и Q_2 — положительно определенные и симметрические матрицы размеров соответственно $m \times m$ и $n \times n$. Таким образом, при управлении транспортным потоком на автомобильной магистрали минимизируется взвешенная сумма квадратов плотностей потока и длин очередей на въездах. При этом выбор весов требует, естественно, технико-экономического анализа. Функционал, выраженный формулой (16), может быть дополнен терминальным членом, выражающим «штраф» за большие колебания на правом конце траектории.

Задача (13) при ограничениях (14) и (15), целевом функционале (16) и заданной функции на входе $z(t)$ представляет собой стандартную задачу дискретного оптимального управления. Задача имеет большую размерность (60–80 в практически интересных случаях), но весьма простую структуру: каждая фазовая координата зависит от 6, 4 и 2 переменных соответственно для плотности, скорости и длины очереди, кроме того, легко видеть, что гамильтониан задачи линеен по переменной управления u . Решение задачи удобно осуществлять методами возможных направлений [10].

Нормальному ненапряженному режиму работы магистрали соответствует такое оптимальное управление $u(t)$, для которого $u_i(t) \equiv 1$ для всех i , т. е. на въездах только ограничения локального управления, смены полос разрешены, скорости на участке ограничены только по условиям данного участка. В этом случае нет нужды в координированном ограничении скоростей и глобальном управлении въездами.

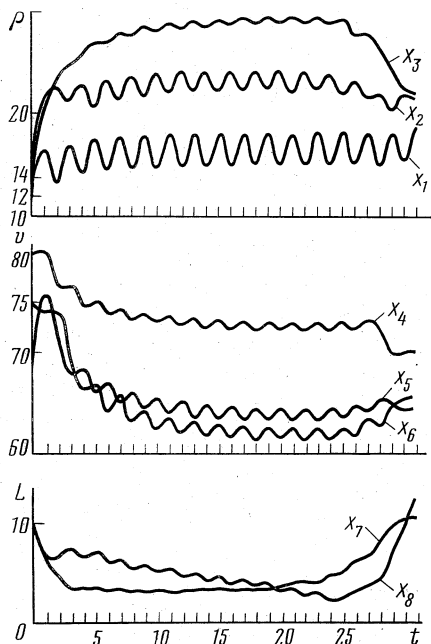


Рис. 3. Оптимальные траектории (8 фазовых переменных)

Пример. Рассмотрим три однополосных участка с двумя въездами в начале второго и третьего участков (рис. 2). Примем следующие значения параметров: $l_1=l_2=l_3=1$ км, $\Delta=0,01$ час, $\tau=0,002$ час, $a=1,25$ км²/час. Зададимся следующими v - ρ -диаграммами для последовательных участков: $v_1^*(\rho)=96-1,25\rho$, $v_2^*(\rho)=84-1,2\rho$, $v_3^*(\rho)=96-1,25\rho$, и линейными функциями динамической пропускной способности для обоих въездов — $c=1360-0,7v\rho$. В целевом функционале положим:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и введем терминальное слагаемое

$$J_1 = 10 \sum_{i=4}^6 [x_i(N+1) - x_i(N)]^2,$$

выражающее «штраф» за большие колебания скорости потока на правом конце траектории. Наконец, будем считать функцию входа на начальный участок периодической: $f(t) = 1200 + (-1)^t 200$ авт/час, а функции спроса

на въездах — постоянными и равными 300 авт/час. Рассмотрим промежуток уравнивания, равный 30 тактам, т. е. 18 мин. Оптимальная траектория при данных начальных значениях переменных приведена на рис. 3. Графики $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ относятся к плотностям потока (авт/км), $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_6(t)$ — к средним скоростям (км/час), $x_7(t)$, $x_8(t)$ — к средним длинам очередей.

Достаточные условия оптимальности, учитывая линейность по переменным управления и выпуклость множества $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, проверяются непосредственно.

Оптимальное управление здесь дает выигрыш 4,6% в смысле введенного целевого функционала по сравнению с некоординированным случаем.

Поступила в редакцию
27 октября 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А. П., Фримштейн М. И. Система автоматического регулирования автомобильного движения. Автомобильные дороги, № 1, стр. 7–8, 1972.
2. Блинкин М. Я., Васильев А. П., Фримштейн М. И. Выбор стратегии управления движением на скоростных автомобильных магистралях. В сб. «Некоторые вопросы исследования транспортных потоков», вып. 4, стр. 5–15. Изд. ЦЭМИ АН СССР, 1973.
3. Chen Cheng-I., Cruz J. B., Paquet J. G. Entrance ramp control for travel — rate maximization in expressways. Transpn. Res., vol. 8, No. 6, pp. 503–508, 1974.
4. Wang C. F. On a ramp flow assignment problem. Transpn. Sci., vol. 6, No. 2, pp. 114–130, 1972.
5. Изаксен Л., Пейн Г. Наблюдение и регулирование движения на скоростных автомагистралях. В сб. «Транспорт 80-х годов», стр. 22–36. «Мир», 1974.
6. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads. Proc. Roy. Soc., A, vol. 229, pp. 317–345, 1955.
7. Лаврентьев М. А., Шабар Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. «Наука», 1973.
8. Drake J., Schofer J., May A. A statistical analysis of speed-density hypothesis. Vehicular traffic science, pp. 112–117, American Elsevier, New York, 1967.
9. Oliver R. M., Lam T. Statistical experiments with a two-lane flow model. Vehicular traffic science, pp. 170–180, American Elsevier, New York, 1967.
10. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. «Наука», 1973.

OPTIMAL CONTROL OF ROAD TRAFFIC

М. Я. BLINKIN

A deterministic idealization of the problem of road traffic control is studied. The model is built around hydrodynamic analogies; the control variables characterize control actions on the operation of on-ramp blows, speed and lane changing. Following a natural discretization the problem can be handled by theory of optimal discrete control.