



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Шафаревич, Деформации коммутативных алгебр
класса 2,
Алгебра и анализ, 1990, том 2, выпуск 6, 178–196

<https://www.mathnet.ru/aa229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

21 апреля 2025 г., 04:35:25



© 1990 г.

И. Р. Шафаревич

ДЕФОРМАЦИИ КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР КЛАССА 2

Рассматривается многообразие коммутативных ассоциативных алгебр класса нильпотентности 2 и размерности n . Изучаются неприводимые компоненты. Исследуется вопрос о сохранении класса нильпотентности при деформациях.

Введение

О нильпотентных (или вообще неполупростых) алгебрах известно очень мало. Основное свойство, резко отличающее их от полупростых алгебр, заключается в том, что в заданной размерности их может быть бесконечное число неизоморфных, и их структура с точностью до изоморфизма зависит от параметров. Например, алгебра N размерности 6 с базисом $e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2$ и таблицей умножения

$$e_i e_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad e_1^2 = \lambda_1 f_1 + \mu_1 f_2, \quad e_i f_k = f_k f_\ell = 0$$

коммулативна, нильпотентна и имеет класс 2 (т.е. $N^3=0$). Ангармоническое отношение четырех точек $(\lambda_i: \mu_i)$, $i=1, 2, 3, 4$ на проективной прямой является, как легко видеть, инвариантом алгебры с точностью до изоморфизма.

Ввиду этого обстоятельства естественно рассматривать многообразия, образуемые этими алгебрами (вернее, коэффициентами их таблиц умножения). Эта точка зрения широко применяется. Здесь мы рассмотрим простейшую ситуацию коммутативных алгебр класса 2 (т.е. таких, что $xyz=0$ для любых элементов x, y, z алгебры). Вопрос, который нас интересует, — насколько это свойство „устойчиво“, т.е. когда любую алгебру такого типа можно деформировать в алгебру большего класса. Точнее этот вопрос ставится так. Мы исследуем многообразие \mathcal{A}_n всех коммутативных алгебр N класса 2 размерности n . Оно содержится в многообразии \mathcal{E}_n всех коммутативных ассоциативных алгебр той же размерности. Вообще говоря, многообразие \mathcal{A}_n приводимо, и мы перечисляем его неприводимые компоненты, находим их размерности и особые точки (см. теорему 1). Компонента $\mathcal{A}_{n,r}$ определяется числом $r = \dim N^2$. Здесь может представиться два случая — эта компонента является компонентой и многообразия \mathcal{E}_n (т.е. некоторая окрестность общей алгебры этого типа состоит только из алгебр класса 2) или она является собственным подмногообразием некоторой компоненты многообразия \mathcal{E}_n (т.е. любая алгебра этого типа может быть деформирована в алгебру, не являющуюся алгеброй класса 2). Какой случай имеет место, зависит только от чисел r и n .

Ключевые слова: нильпотентные алгебры, коммутативные алгебры, деформации алгебр, тангенциальные когомологии.

Например, пусть таблица умножения алгебры N в базисе, $e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_r$, $(r+d=n)$ имеет вид $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, $e_i^2 = \sum_{s=1}^r \lambda_1^s f_s$, $e_i f_s = f_s f_t = 0$. Тогда алгебра с таблицей умножения $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, $e_i^2 = \alpha e_1 + \sum_{s=1}^r \lambda_1^s f_s$, $e_i f_s = f_s f_t = 0$ ассоциативна, но в ней $e_1^3 = \alpha e_1^2 \neq 0$. Поэтому в любой окрестности алгебры N имеются алгебры класса большего, чем 2. Любая коммутативная алгебра класса 2 имеет базис с таблицей умножения, задаваемой формулами (2) ниже. При $r=1$ мы имеем одну симметрическую матрицу (a_{ij}^1) и замена базиса e_1, \dots, e_d приводит к обычному преобразованию этой матрицы. Приведя ее к диагональному виду, мы получим таблицу умножения, в которой $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$. То же верно и при $r=2$, так как общую пару симметрических матриц можно привести к диагональному виду. Таким образом, при $r=1$ или 2 мы имеем второй случай описанной выше дихотомии. В случае $r=3$ и $d=4$ (т.е. $n=7$) в работе Ярробино и Энсалема [1] впервые было показано, что имеет место первый случай. В настоящей работе вопрос решается в более общей ситуации, хотя и не в общем случае. А именно доказано, что первый случай имеет место при $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6} + 2$, кроме, может быть, случая $d=5$, $r=4$ (здесь $d=n-r=\dim N/N^2$), а второй случай - при $r \geq \frac{d^2-1}{3}$. Надо иметь в виду, что всегда $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Рассматривая асимптотику при $d \rightarrow \infty$ (т.е. обращая внимание лишь на коэффициент при d^2), мы можем сказать, что делим интервал $2 < r \leq \frac{d(d+1)}{2}$ на три равные части, причем в левом интервале имеет место первый случай, в правом - второй, а средний интервал остается неисследованным.

Технически легче исследовать не нильпотентные алгебры N , а локальные алгебры $A = K \cdot 1 + N$, получающиеся присоединением единицы. Так, \mathcal{A}_n и $\mathcal{A}_{n,r}$, которые мы для простоты называли многообразиями, на самом деле являются схемами, и $\mathcal{A}_{n,r}$ как подсхема в \mathcal{C}_n не приведена, в то время как аналогичные схемы для локальных алгебр приведены (см. замечание 1 в конце работы). Поэтому результаты формулируются для локальных алгебр (см. теорему 2).

Основное поле K , над которым определены все рассматриваемые нами алгебры, мы будем считать алгебраически замкнутым и имеющим характеристику 0.

Когда речь будет идти об "общей точке" алгебраического многообразия X , то, в духе старых геометров, будет подразумеваться точка некоторого непустого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset X$, которое всегда легко уточнить из рассуждения.

§ 1. Коммутативные алгебры класса 2

Для любого целого числа $n > 0$ рассмотрим коммутативные, ассоциативные алгебры N размерности n и такие, что $N^3 = 0$, т.е. $xuz = 0$ для любых $x, y, z \in N$. Если фиксировать в такой алгебре базис e_1, \dots, e_n или, что то же самое, отождествить ее пространство с некоторым стандартным n -мерным пространством E , то задание умножения сводится к заданию билинейного отображения $c: E \otimes E \rightarrow E$, удовлетворяющего соотношениям $c(x, y) = c(y, x)$ и $c(c(x, y), z) = 0$, которые определяют замкнутую подсхему \mathcal{A}_n во

множестве всех билинейных отображений. Если пользоваться базисом e_1, \dots, e_n , то умножение задается структурными константами $c_{ij}^k: e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$, а уравнения схемы \mathcal{A}_n принимают вид

$$c_{ij}^k = c_{ji}^k, \quad \sum_{k,m=1}^n c_{ij}^k c_{kl}^m = 0, \quad i, j, l = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Схема \mathcal{A}_n является классифицирующим пространством (или многообразием модулей) для таких объектов - алгебр указанного типа с выделенным базисом (аналогично тому, как в [2], т. II, с. 124).

Для каждой алгебры N обозначим через N^2 подалгебру, порожденную элементами $x, y, z \in N$, а через N_0 - аннулятор алгебры N , т.е. множество тех $x \in N$, для которых $xu=0$ для всех $u \in N$. Условие $N^3=0$, очевидно, эквивалентно тому, что $N^2 \subset N_0$. Обозначим через $\mathcal{A}_{n,r}$ подсхему, определенную условиями $\dim N^2 \leq r$, $\dim N_0 \geq r$. Она задается условиями $\text{rg}\{e_i e_j, i, j=1, \dots, n\} \leq r$ и $\text{rg}\{x | x e_i = 0, i=1, \dots, n\} \geq r$, т.е. обращением в 0 некоторых миноров. Поэтому $\mathcal{A}_{n,r}$ - замкнутая подсхема в \mathcal{A}_n . Положим $d=n-r$. В алгебре, соответствующей точке схемы $\mathcal{A}_{n,r}$, можно выбрать часть базиса (обозначим его f_1, \dots, f_k , $k=\dim N^2$), лежащую в N^2 , и дополнить до r векторов базиса f_1, \dots, f_r , лежащих в N_0 . Наконец, оставшиеся векторы базиса обозначим через e_1, \dots, e_d . Тогда таблица умножения примет вид

$$e_i e_j = \sum_{s=1}^r a_{ij}^s f_s, \quad e_i f_k = f_k f_l = 0, \quad (2)$$

$$i, j = 1, \dots, d; \quad k, l = 1, \dots, r,$$

где $A^s = (a_{ij}^s)$ - симметрические матрицы. Наоборот, любая такая таблица умножения определяет алгебру, соответствующую точке схемы $\mathcal{A}_{n,r}$. Через $U_{n,r} \subset \mathcal{A}_{n,r}$ обозначим подсхему, выделенную условиями $\text{rg} N^2 = r$, $\text{rg} N_0 = r$. Первое условие означает, что система $\frac{d(d+1)}{2}$ векторов $\xi_{ij} = \{a_{ij}^s, s=1, \dots, r\}$ в r -мерном пространстве имеет ранг r . Для этого необходимо, чтобы было $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Поэтому при $r > \frac{d(d+1)}{2}$ $U_{n,r}$ пусто. Если же $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$, то первое условие равносильно тому, что симметрические матрицы $A^s = (a_{ij}^s)$ линейно независимы. Второе же условие равносильно тому, что уравнения $A^s x = 0$, $s=1, \dots, r$ не имеют ненулевого решения, т.е. ядра линейных преобразований A^s , $s=1, \dots, r$ пересекаются только по 0.

Теорема 1. *Неприводимые компоненты схемы \mathcal{A}_n совпадают с $\mathcal{A}_{n,r}$ при $1 \leq r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Они приведены, и подсхемы $U_{n,r}$ в них открыты, гладки и совпадают с множеством их простых точек. Их размерность равна $\frac{d(d+3)}{2} \cdot r$.*

Очевидно, что если $\xi \in \mathcal{A}_n$, то $\xi \in \mathcal{A}_{n,r}$, где $r = \dim N^2$, а N - алгебра, соответствующая ξ . В записи (2) тогда векторы $\xi_{ij} = \{a_{ij}^s, s=1, \dots, r\}$ линейно независимы, а отсюда, как мы видели, $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Кроме того, $\mathcal{A}_{n,0}$ соответствует $a_{ij}^s = 0$, и, значит, $\mathcal{A}_{n,0} \subset \mathcal{A}_{n,r}$ при всех $r \geq 1$. Поэтому

$$\mathcal{A}_n = \bigcup_r \mathcal{A}_{n,r} \quad \text{для } 1 \leq r \leq \frac{d(d+1)}{2}. \quad (3)$$

Обозначим через $S_{n,r}$ множество таблиц умножения вида (2). Тогда $\mathcal{A}_{n,r} = G \cdot S_{n,r}$,

где $G=GL(n)$ действует на \mathcal{A}_n через действие на векторы e_1, \dots, e_n . Поэтому $\mathcal{A}_{n,r}$ неприводимо.

Очевидно, что при общих a_{ij}^s в формулах (2) и при $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$ система векторов $\xi_{1j} = \{a_{1j}^s, s=1, \dots, r\}$ в r -мерном пространстве имеет ранг r , и, значит, $rg N^2 = r$. Точно так же при $r \geq 1$ общая матрица A^s невырождена и, значит, $rg N_0 = r$. Таким образом, $U_{n,r}$ открыто в $\mathcal{A}_{n,r}$ при $1 \leq r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Но очевидно, что $U_{n,r}$ и $U_{n,r'}$ не пересекаются при $r \neq r'$, и, значит, (3) есть разложение \mathcal{A}_n на неприводимые компоненты.

Из (2) видно, что $\dim S_{n,r} = \frac{d(d+1)}{2} \cdot r$. Рассматривая отображение $G \times S_{n,r} \rightarrow G \cdot S_{n,r} = \mathcal{A}_{n,r}$, $(g, \xi) \rightarrow g(\xi)$, мы получаем, что

$$\dim \mathcal{A}_{n,r} = \dim G + \dim S_{n,r} - \dim F, \tag{4}$$

где F - общий слой этого отображения.

Очевидно, что слой над точкой $\xi_0 \in S_{n,r}$ состоит из пар (g, ξ) , где $g(\xi) = \xi_0$, т.е. $g^{-1}(\xi_0) \in S_{n,r}$. Отсюда следует, что $g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_d)$, $g^{-1}(f_1), \dots, g^{-1}(f_r)$ имеют таблицу умножения вида (2), и, значит, если $\xi_0 \in U_{n,r}$, то $g^{-1}(f_i) \in N^2 = \{f_1, \dots, f_r\}$. Т.е. g принадлежат параболической подгруппе, состоящей из преобразований, сохраняющих подпространство $\{f_1, \dots, f_r\}$, размерность которой равна $d^2 + rd + r^2$. Подставляя в (4), получаем, ввиду $\dim G = (d+r)^2$, что

$$\dim \mathcal{A}_{n,r} = \frac{d(d+3)}{2} \cdot r.$$

Наконец, чтобы доказать приведенность схемы $\mathcal{A}_{n,r}$, нам надо вычислить размерность касательного пространства в ее общей точке $\xi \in \mathcal{A}_{n,r}$. Пусть ей соответствует алгебра N . Дифференцируя соотношения (1), мы получаем (например, аналогично [2], т. I, с. 115), что оно изоморфно пространству билинейных форм $c(x, y)$ на пространстве алгебры N , удовлетворяющих соотношениям

$$c(x, y) = c(y, x), \quad c(x, y)z + c(xy, z) = 0, \quad x, y, z \in N. \tag{5}$$

Пространство решений уравнений (5) обозначим через $V^1(N, N)$.

Из (5) следует, что $c(N, N_0) \subset N_0$, поэтому c определяет линейное отображение $c: S^2(N/N_0) \rightarrow N/N_0$, где S^2 обозначает симметрический квадрат. Докажем, что оно дополняется до коммутативного треугольника

$$\begin{array}{ccc} S^2(N/N_0) & \xrightarrow{c} & N/N_0 \\ & \searrow m & \nearrow \psi_0 \\ & & N^2 \end{array}$$

где m обозначает умножение в N , а ψ_0 - некоторое линейное преобразование. Для этого достаточно доказать, что c обращается в 0 на ядре m , т.е. что из $\sum x_i y_i = 0$ следует, что $\sum c(x_i, y_i) \in N_0$. Это очевидно, так как

$$(\sum c(x_i, y_i))z = - \sum c(x_i, y_i, z) = -c(\sum x_i y_i, z) = 0.$$

Положим $c(x, y) - \psi(xy) = \xi(x, y)$, где ψ - подъем ψ_0 до отображения в N . Тогда $\xi(x, y) \in N_0$, а из (5) следует, что $\xi(N, N^2) = 0$.

Таким образом, все решения уравнений (5) представляются в виде $c(x, y) = \xi(x, y) + \psi(x, y)$, где $\xi \in \text{Hom}(S^2(N/N^2), N_0)$, $\psi \in \text{Hom}(N^2, N)$.

При этом пересечение пространств билинейных форм $\xi(x, y)$ и $\psi(xy)$, $\psi \in \text{Hom}(N^2, N)$ состоит из $\psi \in \text{Hom}(N^2, N_0)$. Поэтому размерность касательного пространства в точке ξ равна

$$(\dim S^2(N/N^2)) \dim N_0 + \dim N^2 \cdot \dim N - \dim N^2 \dim N_0. \quad (6)$$

Если $\dim N/N^2=d$, $\dim N^2=r$, $\dim N_0=r'$, то $\dim S^2(N/N^2)=\frac{d(d+1)}{2}$, и выражение (6) приобретает вид $\frac{d(d+1)}{2}r' + nr - rr' = \left(\frac{d(d+1)}{2} - r\right)r' + nr$. Так как $r \leq r'$ и $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$, то оно принимает максимальное значение в точности при $r'=r$, и тогда это значение равно $\frac{d(d+3)}{2} \cdot r$.

Этим доказаны все утверждения теоремы.

Замечание. Из теоремы следует, что число неприводимых компонент $\mathcal{A}_{n,r}$ многообразия \mathcal{A}_n равно $[n+3/2 - \sqrt{2n+9/4}]$. Размерности многообразий $\mathcal{A}_{n,r}$ сначала монотонно растут с ростом r , а потом, достигнув некоторого максимума, монотонно убывают. Например, при $n=9$ для $r=1, 2, 3, 4, 5, 6$ эти размерности равны 44, 70, 81, 80, 70, 54.

§ 2. Тангенциальные когомологии алгебр класса 2

Перейдем к рассмотрению произвольных коммутативных алгебр. Мы введем аналогично предыдущему классифицирующее пространство для множества алгебр с отмеченным базисом, причем рассмотрим два случая - совершенно произвольных коммутативных ассоциативных алгебр и алгебр с единицей. В первом случае мы получим для алгебр размерности n схему с уравнениями

$$c_{ij}^k = c_{ji}^k, \quad \sum_{k,m=1}^n c_{ij}^k c_{kl}^m = \sum_{k,m=1}^n c_{ik}^m c_{jl}^k; \quad i, j, \ell = 1, \dots, n, \quad (7)$$

которую обозначим \mathcal{E}_n . Во втором случае мы будем рассматривать алгебры размерности $n+1$ с базисом $e_0=1, e_1, \dots, e_n$. В качестве классифицирующего пространства получим схему, определенную уравнениями (7), где теперь $i, j, k, \ell, m=0, \dots, n$ и $C_{0j}^k = \delta_{j0}^k$. Мы обозначим ее через \mathcal{E}_n .

Касательное пространство к схеме \mathcal{E}_n в точке, соответствующей алгебре A , состоит из билинейных функций на A , $\varphi(x, y) \in A$, $x, y \in A$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi(y, x) = \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y)z + \varphi(xy, z) = x\varphi(y, z) + \varphi(x, yz). \quad (8)$$

В случае схемы \mathcal{E}_n добавляются условия $\varphi(1, x)=0$.

Напомним стандартные обозначения. Если M - модуль над алгеброй A , то билинейная функция $\varphi(x, y) \in M$, $x, y \in A$, называется коциклом, если она удовлетворяет соотношениям (8). Пространство коциклов обозначается через $Z^1(A, M)$. Если алгебра A обладает единицей, то пространство коциклов с условием $\varphi(1, x)=0, x \in A$, обозначается $\tilde{Z}^1(A, M)$. Таким образом, касательное пространство к схеме \mathcal{E}_n в точке, соответствующей алгебре A , совпадает с $Z^1(A, A)$, а к схеме $\mathcal{E}_n - \tilde{Z}^1(A, A)$. Если ψ любое линейное отображение $A \rightarrow M$, то коциклом является $\varphi(x, y) = \psi(xy) - x\psi(y) - y\psi(x)$. Пространство таких коциклов обозначается $B^1(A, M)$. В случае алгебр с единицей дополнительно налагается условие $\psi(1)=0$. Пространство $T^1(A, M) = Z^1(A, M)/B^1(A, M)$

называется первым пространством тангенциальных когомологий (или вторым пространством когомологий Харрисона). Легко видеть, что $Z^1(A, M)/\tilde{B}^1(A, M) = T^1(A, M)$. Известно, что если $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ - точная последовательность A -модулей, то точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Der}(A, M_1) \rightarrow \text{Der}(A, M_2) \rightarrow \text{Der}(A, M_3) \rightarrow T^1(A, M_1) \rightarrow T^1(A, M_2) \rightarrow T^1(A, M_3),$$

где $\text{Der}(A, M)$ - пространство K -дифференцирований A в M (см. [3] или [4]).

В качестве вспомогательного результата нам нужно будет вычислить пространство $T^1(N, K)$, где K - основное поле, на которое N действует нулевым образом. Пространство $T^1(N, K)$ равно, следовательно, фактор-пространству пространства билинейных форм $\lambda(x, y) \in K$, $x, y \in N$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \lambda(y, x) &= \lambda(x, y), & \lambda(xy, z) &= \lambda(x, yz) \\ x, y, z &\in N \end{aligned}$$

по пространству форм вида $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$, где $\mu: N \rightarrow K$ - любая линейная форма.

Мы будем называть коцикл $\lambda(x, y)$ стандартным, если $\lambda(N, N^2) = 0$.

Для изучения пространства $T^1(N, K)$ полезно воспользоваться другой его интерпретацией. Обозначим через \mathfrak{D}_d кольцо формальных степенных рядов от переменных t_1, \dots, t_d , $d = \dim N/N^2$, а через M - максимальный идеал кольца \mathfrak{D}_d . Представим алгебру N в виде $N = M/I$, где $I \subset M$ - идеал, причем даже $I \subset M^2$, что, очевидно, возможно. Надо только отобразить e_i в t_i при $i = 1, \dots, d$. Согласно лемме Накаямы, e_1, \dots, e_d являются образующими алгебры N , и мы получим нужное представление $N = M/I$. Иначе говоря, мы имеем точную последовательность I -модулей $0 \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$, из которой вытекает точность последовательности $\text{Der}_M(M, K) \xrightarrow{\alpha} \text{Der}_M(I, K) \rightarrow T^1(N, K) \rightarrow 0$, где Der_M означает M -дифференцирование, а M действует на K нулевым образом. В нашем случае, очевидно, $\text{Der}_M(I, K) \cong \text{Hom}_K(I/IM, K)$, а $\alpha(\text{Der}_M(M, K)) = 0$. Поэтому $T^1(N, K) \cong \text{Hom}_K(I/IM, K)$ (см., например, [4]). Это сопоставление легко явно задать. Если $\xi \in \text{Hom}_K(I/IM, K)$, а $\sigma: N \rightarrow M$ - некоторое сечение гомоморфизма $M \rightarrow N$, то $\lambda(x, y) = \xi(\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(xy))$ определяет коцикл, лежащий в классе когомологий пространства $T^1(N, K)$, соответствующем линейной форме ξ .

Выясним, когда все циклы являются стандартными. Если $x \in N$, $y \in N^2$, то $xy = 0$ и стандартность означает, что $\xi(\sigma(x)\sigma(y)) = 0$. Если стандартны коциклы, соответствующие всем линейным формам ξ , то $\sigma(x)\sigma(y) \in IM$ для всех $x \in N$, $y \in N^2$, т.е. $\sigma(N)\sigma(N^2) \subset IM$. Обозначим через $I^{(k)}$ и $M^{(k)}$ однородные составляющие степени k идеалов I и M .

Мы можем выбрать σ так, что $\sigma(e_1) \in M^{(1)}$, $\sigma(N^2) \subset M^{(2)}$. Тогда $M^{(1)} = I^{(1)}$, $M^{(2)} = I^{(2)} + \sigma(N^2)$ и $M^{(3)} = M^{(1)}M^{(2)} = I^{(2)}M^{(1)} + \sigma(N^2)M^{(1)}$. Поэтому наше условие $\sigma(N)\sigma(N^2) \subset IM$ дает $M^{(3)} = I^{(2)}M^{(1)}$. Очевидно, и наоборот, если $M^{(3)} = I^{(2)}M^{(1)}$, то $\sigma(e_1)\sigma(N^2) \subset M^{(3)} = I^{(2)}M^{(1)}$, и тогда $\sigma(N)\sigma(N^2) \subset IM$. Пространство $I^{(2)}$ состоит из $\frac{d(d+1)}{2} - r = \rho$ квадратичных форм F_1, \dots, F_ρ , и мы видим, что для алгебры N все циклы являются стандартными тогда и только тогда, когда для форм F_1, \dots, F_ρ , порождающих пространство $I^{(2)}$, формы $x_i F_j$, $i = 1, \dots, d$; $j = 1, \dots, \rho$ порождают пространство $M^{(3)}$. Тогда, конечно, формы F_1, \dots, F_ρ порождают и весь идеал I . Иными словами, алгебра N

является „квадратичной“ - она определяется квадратичными соотношениями F_1, \dots, F_ρ . (Напомним, что для произвольной алгебры N с $N^3=0$ верно лишь соотношение $I=(F_1, \dots, F_\rho, M^3)$).

Из этих соображений очевидно, что при $\rho < \frac{(d+1)(d+2)}{6}$ на алгебре N обязательно существуют нестандартные коциклы. Действительно, число форм $x_i F_j$ тогда равно $d\rho < \frac{d(d+1)(d+2)}{6}$, и они не могут порождать все пространство $M^{(3)}$. Пусть в этих условиях $\lambda(x, y)$ - нестандартный коцикл. Так как $\lambda(N^2, N^2)=0$, то он устанавливает спаривание пространств N/N^2 и N^2 со значениями в K . Так как $r = \frac{d(d+1)}{2} - \rho > \frac{d^2-1}{3}$, то $r > d$ при $d \geq 2$, и поэтому существует такое $f_0 \in N^2, f_0 \neq 0$, что $\lambda(N, f_0)=0$. В этом случае мы можем включить алгебру N в неприводимое семейство алгебр, общая алгебра которого уже не удовлетворяет условию $N^3=0$. Достаточно ввести в алгебре N новое умножение

$$x \circ y = xy + t\lambda(x, y)f_0.$$

Тогда $(x \circ y) \circ z = xyz + t\lambda(xy, z)f_0 = t\lambda(xy, z)f_0$ и ассоциативность следует из того, что $\lambda \in T^1(N, K)$.

Таким образом, нами доказано

Предложение. Если $r > \frac{d^2-1}{3}$, то компонента $\mathcal{A}_{n,r}$ не составляет компоненты в схеме \mathcal{E}_n (является собственной подсхемой некоторой компоненты).

Дальше нам понадобится обращение этого результата - утверждение, что все циклы $\lambda \in T^1(N, K)$ стандартны для алгебры, соответствующей общей точке компоненты $\mathcal{A}_{n,r}$, если $r \leq \frac{d^2-1}{3}$, т.е. $\rho \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$. Это, ввиду сказанного выше, вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. Если $\rho \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$ и F_1, \dots, F_ρ - общие квадратичные формы от d переменных, то формы $x_i F_j$, $i=1, \dots, d$; $j=1, \dots, \rho$ порождают все кубические формы.

Обозначим пространство линейных форм от d переменных через E . Тогда квадратичные формы составляют пространство $S^2 E$, а кубические - $S^3 E$. В двукратно проективном пространстве $\mathbb{P}(E^p) \times \mathbb{P}((S^2 E)^p)$ рассмотрим многообразие Γ , заданное уравнениями $\ell_1 F_1 + \dots + \ell_\rho F_\rho = 0$, где $(\ell_1, \dots, \ell_\rho) \in E^p, (F_1, \dots, F_\rho) \in (S^2(E))^p$. Множество тех точек из Γ , для которых ранг системы форм ℓ_1, \dots, ℓ_ρ равен p , обозначим через Γ_p . Тогда $\Gamma = \bigcup \bar{\Gamma}_p$, где $p=1, \dots, d$, а $\bar{\Gamma}_p$ обозначает замыкание Γ_p . Вычислим $\dim \bar{\Gamma}_p$. При проекции $p_1: \Gamma_p \rightarrow \mathbb{P}(E^p)$ слой $p_1^{-1}(L)$, $L=(\ell_1, \dots, \ell_\rho) \in E^p$ состоит из тех F_1, \dots, F_ρ , для которых $\ell_1 F_1 + \dots + \ell_\rho F_\rho = 0$. Пусть сначала $\rho=p$, т.е. ℓ_1, \dots, ℓ_p линейно независимы. Тогда мы можем считать их независимыми переменными x_1, \dots, x_p . Комплекс Кошуля (см. [5], гл. VIII, § 4) даст точную последовательность

$$0 \leftarrow \Phi \xleftarrow{\alpha} E^{\frac{p(p-1)}{2}} \xleftarrow{\beta} K^{\frac{p(p-1)(p-2)}{6}} \leftarrow 0, \quad (9)$$

где Φ состоит из (F_1, \dots, F_p) , для которых $\sum_1^p x_i F_i = 0$, $E^{\frac{p(p-1)}{2}}$ состоит из

$\{\ell_{ij}\}, -\ell_{ji} = \ell_{ij}, i, j = 1, \dots, p, \ell_{ij} \in E$ и $\alpha(\{\ell_{ij}\}) = (F_1, \dots, F_p), F_i = \sum_{j=1}^p \ell_{ij} x_j$. Наконец,

$$K \frac{p(p-1)(p-2)}{6} = \{c_{ijk} | c_{ijk} \in K \text{ и косимметричны}\}, \text{ а } \beta(\{c_{ijk}\}) = \{\ell_{ij}\}, \ell_{ij} = \sum_{k=1}^p c_{ijk} x_k.$$

Из точной последовательности (9) следует, что

$$\dim \Phi = \frac{p(p-1)}{2} d - \frac{p(p-1)(p-2)}{6} = \frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6}. \tag{10}$$

Пусть теперь $p \leq \rho$ любое и ℓ_1, \dots, ℓ_p линейно независимы, а $\ell_{p+j} = \sum_{i=1}^p \gamma_{ij} \ell_i$,

$j=1, \dots, \rho-p$. Соотношение $\sum_1^p \ell_i F_i = 0$ переписывается как $\sum_{i=1}^p \ell_i (F_i + \sum_j \gamma_{ij} F_{p+j}) = 0$. Если

$F_i + \sum_{j=1}^{\rho-p} \gamma_{ij} F_{p+j} = G_i, i=1, \dots, p$, то $\sum_{i=1}^p \ell_i G_i = 0$, так что размерность пространства

таких наборов (G_1, \dots, G_p) задается формулой (10), а $F_i = G_i - \sum_{j=1}^{\rho-p} \gamma_{ij} F_{p+j}$, где

$F_{p+j}, j=1, \dots, \rho-p$ произвольные. Поэтому размерность пространства решений

уравнений $\sum_1^p \ell_i F_i = 0$ равна $\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d+1)}{2}$ и, значит,

$$\dim p_1^{-1}(\xi) = \frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d+1)}{2} - 1.$$

Так как множество систем $\xi = (\ell_1, \dots, \ell_\rho), \xi \in p_1(\Gamma_p)$ имеет размерность $p(d+\rho-p)-1$, то

$$\dim \Gamma_p = \frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d+1)}{2} + p(d+\rho-p) - 2. \tag{11}$$

Из неприводимости $p_1(\Gamma_p)$ следует, что и Γ_p неприводимо.

Рассмотрим теперь отображение $(\ell_1, \dots, \ell_\rho) \mapsto \sum_1^p \ell_i F_i$ для некоторых общих форм $(F_1, \dots, F_\rho) = F$. Оно определяет морфизм

$$\varphi_F : \mathbb{P}(E^\rho) \setminus p_1 p_2^{-1}(F) \rightarrow \mathbb{P}(S^3(E)).$$

Нам надо доказать, что при общих F_i и при $\rho \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$ этот морфизм эпиморфен.

Если это не так, то для точки $\eta \in \mathbb{P}(S^3(E))$, принадлежащей образу φ_F ,

$$\dim \varphi_F^{-1}(\eta) > \dim \mathbb{P}(E^\rho) - \dim \mathbb{P}(S^3(E)) = d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6}. \tag{12}$$

Но для всех точек образа морфизма φ_F размерность $\varphi_F^{-1}(\eta)$ одна и та же и равна $\dim p_2^{-1}(F) + 1$ при проекции $p_2: \Gamma \rightarrow \mathbb{P}((S^2(E))^\rho)$. Поэтому (12) равносильно тому, что

$$\dim p_2^{-1}(F) > d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} - 1$$

для общего F . Но тогда

$$\dim \Gamma > d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d+1)}{2} \rho - 2.$$

Нам надо доказать, следовательно, что

$$\dim \Gamma \leq d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} - \frac{d(d+1)}{2} \rho - 2.$$

Т.е. ввиду (11) (и так как $\Gamma = \overline{U\Gamma_p}$), то

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho-p)\frac{d(d+1)}{2} + p(d+p-p) \leq d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d+1)}{2} \rho$$

для всех $p \leq d$ при $\rho \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$.

Сокращая в обеих частях член $\rho \frac{d(d+1)}{2}$, мы получаем неравенство

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} - p\frac{d(d+1)}{2} + p(d-p) + (p-d)\rho + \frac{d(d+1)(d+2)}{6} \leq 0.$$

Так как $p \leq d$, то мы можем заменить ρ на $\frac{(d+1)(d+2)}{6}$ и, значит, нам достаточно

доказать неравенство

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} - p\frac{d(d+1)}{2} + p(d-p) + p\frac{(d+1)(d+2)}{6} \leq 0.$$

Левая часть его равна, как легко видеть, $\frac{1}{6} p(d-p)(p-2d+3)$ и поэтому неположительна.

Дальше нам понадобится утверждение, аналогичное лемме 1, также и для кососимметрических форм.

Лемма 2. Пусть $\alpha_i \in \Lambda^2 E$, $i=1, \dots, \rho$ — общие бивекторы в d -мерном пространстве E . Соотношение $\alpha_1 \wedge \ell_1 + \dots + \alpha_\rho \wedge \ell_\rho = 0$, где $\ell_i \in E$, тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда $\rho > \frac{(d-1)(d-2)}{6}$ или $d=5, \rho > 1$.

Одна часть утверждения очевидна: если $\rho > \frac{(d-1)(d-2)}{6}$, то уравнение $\sum \alpha_i \wedge \ell_i = 0$ равносильно $\frac{d(d-1)(d-2)}{6}$ линейным уравнениям (приравнивание нулю координат три первых вектора), а число неизвестных равно $d\rho$ и в нашем случае больше числа уравнений.

Пусть $\rho \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6}$. В пространстве $\mathbb{P}(E^\rho) \times \mathbb{P}((\Lambda^2 E)^\rho)$ рассмотрим многообразие

Γ , состоящее из таких $(\ell_1, \dots, \ell_\rho; \alpha_1, \dots, \alpha_\rho)$, что $\sum \alpha_i \wedge \ell_i = 0$, и многообразия Γ_p , для которых $g(\ell_1, \dots, \ell_\rho) = p$, $p \leq \rho$. Пусть $p = \rho$ и ℓ_1, \dots, ℓ_ρ фиксированы и линейно

независимы. Рассмотрим комплекс Кошуля (см. [6], с. 133)

$$0 \longleftarrow \Phi \xleftarrow{\alpha} E \xrightarrow{\frac{p(p-1)}{2}} K \xleftarrow{\beta} K \xrightarrow{\frac{p(p+1)(p+2)}{6}} 0, \quad (13)$$

где Φ состоит из $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, для которых $\sum \alpha_i \wedge l_i = 0$, $E \xrightarrow{\frac{p(p+1)}{2}}$ состоит из векторов $\varphi_{ij} \in E$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}$ и $\alpha(\{\varphi_{ij}\}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\alpha_i = \sum \varphi_{ij} \wedge l_j$, а $K \xrightarrow{\frac{p(p+1)(p+2)}{6}}$ — из констант $c_{ijk} \in K$, c_{ijk} симметричны по i, j, k и $\beta(\{c_{ijk}\}) = \{\varphi_{ij}\}$, $\varphi_{ij} = \sum c_{ijk} l_k$.

Из точности последовательности (13) следует, что

$$\dim \Phi = \frac{p(p+1)}{2} d - \frac{p(p+1)(p+2)}{6} = \frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6}.$$

Пусть $p \leq \rho$ любое и l_1, \dots, l_p независимы.

Рассуждая как и в лемме 1, получим, что множество $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ решений уравнения $\sum_{i=1}^p \alpha_i \wedge l_i = 0$ имеет размерность

$$\frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d-1)}{2}.$$

Рассмотрим проекцию $p_1: \Gamma_p \rightarrow P(E^\rho)$. Так как $p_1(\Gamma_p)$ неприводимо и имеет размерность $p(d+\rho-p)-1$, то Γ_p неприводимо и

$$\dim \Gamma_p = \frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d-1)}{2} + p(d+\rho-p) - 2. \quad (14)$$

Докажем, что $\dim \Gamma < \dim P((\Lambda^2 E)^\rho)$ — это и даст утверждение леммы 2. Ввиду (14) наше неравенство равносильно тому, что для всех $p \leq d$

$$\frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d-1)}{2} + p(d+\rho-p) \leq \rho \frac{d(d-1)}{2}.$$

Сокращая обе части на $\rho \frac{d(d-1)}{2}$ и деля на p , получим неравенство

$$\frac{(p+1)(3d-p-2)}{6} - \frac{d(d-1)}{2} + \rho + d - p \leq 0.$$

Так как $\rho \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6}$, то достаточно доказать неравенство

$$\frac{(p+1)(3d-p-2)}{6} - \frac{d(d-1)}{2} + \frac{(d-1)(d-2)}{6} + d - p \leq 0.$$

Левая часть его равна, как легко проверить,

$$\frac{1}{6}(d-p)(p-2d+9). \quad (15)$$

Так как $p \leq d$, то выражение (15) может быть положительным лишь при $d \leq 8$ и $p < d$. Но

условие $p \leq \rho \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6}$ показывает, что оно неположительно во всех оставшихся

случаях $d=8, 7, \dots, 3$, кроме $d=5$ (относительно случая $\rho=p=1$ при $d=4$ (см. замечание 3 в конце работы).

Проверим, что в случае $d=5$ мы действительно имеем исключение, т.е. уравнение $\alpha x + \beta y = 0$, где $\alpha, \beta \in \Lambda^2 E$, $x, y \in E$, $\dim E=5$, всегда имеет ненулевое решение для общих α и β . Ввиду того, что 5 - нечетное число, бивектор β вырожден, т.е. его можно записать в некотором базисе e_1, \dots, e_5 в виде $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. Положим $\alpha = \alpha_0 + u \wedge e_5$, где $u \in E_0 = Ke_1 + \dots + Ke_4$, $\alpha_0 \in \Lambda^2 E_0$. Положив $x=u$, мы получим, что $\alpha_0 u + \beta y = 0$. Будем искать y как вектор из E_0 . Отображение $\varphi_\beta: E_0 \rightarrow \Lambda^3 E_0$, $z \rightarrow z \wedge \beta$ невырождено, и поэтому мы можем положить $y = -\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha(u)$.

§ 3. Деформации алгебр класса 2

Для любой нильпотентной алгебры N алгебра $A = K \cdot 1 + N$ является локальной, а для любой локальной конечномерной алгебры A ее радикал N нильпотентен и $A = K \cdot 1 + N$. Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между нильпотентными алгебрами размерности n и локальными алгебрами размерности $n+1$, рассматриваемыми с точностью до изоморфизма. Однако нас будут интересовать алгебры с фиксированным базисом, и здесь ситуация требует отдельного рассмотрения.

Пусть A - локальная конечномерная алгебра и N - ее радикал. Из точной последовательности A -модулей $0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ вытекает точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Der}(A, N) \rightarrow \text{Der}(A, A) \xrightarrow{\delta_1} (A, K) \xrightarrow{T^1(\alpha)} T^1(A, N) \xrightarrow{T^1(\alpha)} T^1(A, A) \xrightarrow{T^1(\beta)} T^1(A, K). \quad (16)$$

Лемма 3. Если $N^3=0$, $r = \dim N^2 > 2$, то для общей алгебры $A = K \cdot 1 + N$ гомоморфизм $T^1(\beta)$ нулевой.

Ввиду изоморфизмов $T^1(A, M) \cong T^1(A, N) \oplus T^1(N, M)$ мы можем заменить $T^1(A, M)$ на $T^1(N, M)$.

Запишем коцикл Φ из $T^1(N, A)$ в виде $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda(x, y)$, где $\lambda(x, y) \in T^1(N, K)$, $\varphi \in N$. Условие коцикла имеет вид

$$\lambda(x, y)z + \varphi(x, y)z + \lambda(xy, z) + \varphi(xy, z) = x\lambda(y, z) + x\varphi(y, z) + \lambda(xy, z) + \varphi(xy, z). \quad (17)$$

Если $y \in N^2$, то отсюда $\lambda(x, y)z \equiv x\lambda(y, z) \pmod{N^2}$, и выбирая z , непропорциональным x , получаем $\lambda(N, N^2) = 0$. Теперь соотношение (17) дает $\varphi(x, y)z = x\varphi(y, z)$ при $y \in N^2$. Фиксируем y и положим $\varphi(x, y) = \psi(x)$. Докажем, что при сделанных об алгебре N предположениях отображение $\psi \in \text{End}(N/N^2)$, обладающее свойством $\psi(x)z = x\psi(z)$, имеет вид $\psi(x) \equiv \alpha x \pmod{N^2}$.

Введем в алгебре N базис с таблицей умножения (2) и предположим, что матрицы A^1 и A^2 имеют простой спектр, т.е. форма $\det(t_1 A^1 + t_2 A^2)$ не имеет кратных множителей. Тогда заменой базиса e_1, \dots, e_d мы можем сделать матрицы A^1 и A^2 диагональными, а A^1 - единичной. Положим $\psi(e_i) \equiv \sum_1^k \xi_1^k e_k \pmod{N^2}$. Соотношение $\psi(e_i) e_j = e_i \psi(e_j)$ даст, если мы приравняем коэффициенты при f_1 , что $\xi_1^j = \xi_1^i$. Пусть на диагонали матрицы A^2 стоят $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Приравнявая коэффициенты при

f_2 , получаем $\lambda_i \xi_i^j = \lambda_j \xi_j^i$, а ввиду того, что $\xi_i^j = \xi_j^i$, $(\lambda_i - \lambda_j) \xi_i^j = 0$. Поэтому $\xi_i^j = 0$ при $i \neq j$, и мы можем записать ψ в виде $\psi(e_i) \equiv \xi_i e_i \pmod{N^2}$. Наше соотношение $\psi(e_i) e_j = e_i \psi(e_j)$ даст теперь $\xi_i e_i e_j = \xi_j e_j e_i$. Так как алгебра N - общая для $r \geq 3$, то мы можем предполагать, что $e_i e_j \neq 0$ при всех i, j . Отсюда $\xi_i = \xi_j$.

Возвращаясь к $\varphi(x, y)$, мы можем теперь положить $\varphi(x, y) \equiv \xi(y)x \pmod{N^2}$ при $y \in N^2$. Тогда соотношение (17) дает (ввиду $\lambda(n, N^2) = 0$) $(\lambda(x, y) + \xi(xy))z = x(\lambda(y, z) + \xi(yz))$. Выбирая z непропорциональным x , получаем, что $\lambda(x, y) = -\xi(xy)$, т.е. λ - нулевой класс в $T^1(N, K)$.

Заметим, что в последовательности (16)

$$\text{Der}(A, K) = \text{Der}(N, K) = \text{Hom}(N/N^2, K) = (N/N^2)^*,$$

так как N действует на K нулевым образом. Если $\ell \in (N/N^2)^*$, то $-(\delta_1 \ell)(x, y) = \ell(x)y + \ell(y)x$. Из леммы 3 мы получаем

$$T^1(A, A) \approx T^1(N, N) / \delta_1(N/N^2)^* \quad (18)$$

(при условиях, наложенных на N в лемме 3).

Лемма 4. Пусть N - алгебра, соответствующая общей точке многообразия $\mathcal{A}_{n,r}$, причем $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6} + 2$ и $d \neq 5$. Тогда отображение $V^1(N, N) \rightarrow T^1(A, A)$ имеет своим образом все пространство $T^1(A, A)$.

Доказательство. Как мы видели, $T^1(A, A) \approx T^1(N, A)$, и ввиду (18) нам достаточно доказать, что образ отображения $V^1(N, N) \rightarrow T^1(N, N)$ порождает все пространство $T^1(N, N)$.

Пусть $\varphi \in Z^1(N, N)$. Рассматривая его образ $\tilde{\varphi}$ в $N/N^2 \approx K^r$, мы получаем, что $\tilde{\varphi} \in Z^1(N, K^r)$, где $N \cdot K = 0$, и из леммы 1 получаем, что $\tilde{\varphi}(N, N^2) = 0$, т.е. $\varphi(N, N^2) \subset N^2$.

Воспользовавшись тем, что алгебра N - общая, мы предположим, что в связке матриц $\alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_r A^r$ имеются две линейно-независимые матрицы с простым спектром. Тогда мы можем взять их за A^1 и A^2 и при помощи линейного преобразования в пространстве N/N^2 привести к виду $A^1 = E$, A^2 - диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ на диагонали.

Запишем теперь φ в явном виде

$$\begin{aligned} \varphi(e_i, e_j) &\equiv \sum_{m=1}^d \alpha_{ijm} e_m \pmod{N^2}, \quad i, j = 1, \dots, d, \\ \varphi(e_i, f_s) &= \sum_{t=1}^r \beta_{is}^t f_t, \quad i=1, \dots, d; \quad s=1, \dots, r. \end{aligned} \quad (19)$$

Если $\varphi \in B^1(N, N)$, то $\varphi(e, f) = -e\psi(f)$ для $e \in N$, $f \in N^2$, $\psi \in \text{End } N$.

Обозначим через $C_1(f)$ коэффициент при f_i в разложении элемента $f \in N^2$ по базису f_1, \dots, f_r . Ввиду сделанного выбора мы имеем $C_1(e_i e_j) = \delta_{ij}$, $C_2(e_i e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$.

В частности, линейные формы $\xi_i(x) = C_1(e_i x)$ образуют взаимный базис к базису e_1, \dots, e_d . Поэтому в виде $C_1(e_i \psi(f))$ можно получить любые d линейных форм на пространстве N^2 , подбирая соответствующее отображение $\psi \in \text{Hom}(N^2, N/N^2)$.

В частности, за счет выбора ψ мы можем добиться того, что $C_1(\varphi(e_1, f))=0$, т.е. $\beta_{1s}^1=0$, $i=1, \dots, d$; $s=1, \dots, r$.

Кроме того, воспользуемся существованием коциклов $\{\varphi \in \delta_1((N/N^2)^*)\}$. Если $\ell \in (N/N^2)^*$, то $(\delta\ell)(e, f) = -\ell(e)f$. Из точности последовательности (16) следует, что эти коциклы являются кограницами в $T^1(N, A)$ (хотя и не в $T^1(N, N)$). Поэтому можно изменить φ на такой коцикл, не меняя его образа в $T^1(N, A)$. В частности, положим $\psi(f_s)=0$ при $s>1$, $\psi(f_1) \equiv \sum \alpha_1 e_1 \pmod{N^2}$, $\ell(e_1)=\alpha_1$. Тогда $C_1(\ell(e_1)f_s - e_1\psi(f_s))=0$, а $C_2(\ell(e_1)f_2 - e_1\psi(f_2))=\alpha_1$. В результате мы можем добиться того, что $\beta_{1s}^1=0$, $\beta_{12}^2=0$.

Рассмотрим теперь соотношение (17) для $x=e_i$, $y=e_j$, $z=e_k$. Пусть сначала $i \neq j \neq k \neq i$.

Приравнявая коэффициенты при f_1 , мы получаем $\alpha_{1jk}=\alpha_{1kj}$, т.е. (ввиду $\alpha_{ij\ell}=\alpha_{jil}$) симметричность α_{ijk} при $i \neq j \neq k \neq i$. Приравнявая коэффициенты, при f_2 получим

$$\alpha_{1jk}\lambda_k + \sum_{s \geq 3} a_{1j}^s \beta_{ks}^2 = \alpha_{jki}\lambda_i + \sum_{s \geq 3} a_{jk}^s \beta_{is}^2$$

(суммирование по $s \geq 3$ ввиду условия $\beta_{k2}^2=0$). Отсюда ввиду симметрии α_{ijk} имеем

$$\alpha_{1jk} = \frac{\sum_{s \geq 3} (a_{1j}^s \beta_{ks}^2 - a_{jk}^s \beta_{is}^2)}{\lambda_k - \lambda_i} \quad (20)$$

при $i \neq j \neq k \neq i$.

Симметрия α_{ijk} по i и j дает

$$\sum_{s \geq 3} ((a_{1j}^s (\lambda_i - \lambda_j) \beta_{ks}^2 + a_{jk}^s (\lambda_j - \lambda_k) \beta_{is}^2 + a_{ki}^s (\lambda_k - \lambda_i) \beta_{js}^2) = 0. \quad (21)$$

Матрицы $\Gamma^s = (a_{ij}^s (\lambda_i - \lambda_j))$ при $s \geq 3$ кососимметричны. Это коммутаторы $[A^s, A^2]$, где A^2 - диагональная матрица, имеющая $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ по диагонали. Более того, при надлежащем выборе матриц A^s , $s=3, \dots, r$, мы получим так любые $r-2$ кососимметрические матрицы - уравнения $a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = b_{ij}$ разрешимы для любых

$$b_{ij}, b_{ji} = -b_{ij} \text{ в виде } a_{ij} = \frac{b_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Введем бивекторы ω^s с матрицами Γ^s и векторы x_s с координатами β_{ks}^2 . Тогда равенство (21) переписывается в виде $\sum_{s \geq 3} \omega^s \wedge x_s = 0$. Так как бивекторы ω^s мы можем считать общими, то, согласно лемме 2, отсюда следует, что $x_s = 0$, т.е. $\beta_{ks}^2 = 0$ при $s \geq 3$. Так как по условию также и $\beta_{k2}^2 = 0$, то среди чисел β_{ks}^2 остаются еще не определенными только β_{k1}^2 . Мы положим $\beta_{k1}^2 = \beta_k$. Из того, что $\beta_{ks}^2 = 0$ при $s \geq 3$, и из (20) следует, что $\alpha_{1jk} = 0$ при $i \neq j \neq k \neq i$.

Положим теперь в соотношении (17) $x=y=e_i$, $z=e_j$, $i \neq j$. Приравнявая коэффициенты при f_1 в обеих частях равенства, получаем, что $\alpha_{1ij} = \alpha_{1ji}$.

Из рассмотрения коэффициентов при f_2 имеем $\alpha_{1ij}\lambda_j + \beta_j = \alpha_{1ji}\lambda_i$, откуда ввиду найденной симметрии $\alpha_{1ij} = \frac{\beta_j}{\lambda_i - \lambda_j}$, т.е.

$$\varphi(e_i, e_j) \equiv \frac{\beta_j e_i - \beta_i e_j}{\lambda_i - \lambda_j} \pmod{N^2} \text{ при } i \neq j.$$

Рассмотрим теперь аналогично коэффициент при $f_s, s > 2$. Полагая $i \neq j \neq k \neq i$, получаем

$$\frac{\beta_j a_{ik}^s - \beta_i a_{jk}^s}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{t \geq 3} a_{ij}^t \beta_{kt}^s = \frac{\beta_k a_{ji}^s - \beta_j a_{ki}^s}{\lambda_j - \lambda_k} + \sum_{t \geq 3} a_{jk}^t \beta_{it}^s.$$

Это соотношение переписывается в виде

$$a_{ik}^s (\lambda_i - \lambda_k) \beta_j + a_{kj}^s (\lambda_k - \lambda_j) \beta_i + a_{ji}^s (\lambda_j - \lambda_i) \beta_k = (\lambda_i - \lambda_j) (\lambda_k - \lambda_j) \sum_{t \geq 3} (a_{ij}^t \beta_{kt}^s - a_{jk}^t \beta_{it}^s).$$

Слева стоит компонента с индексами i, j, k тривектора $\omega^s \wedge \beta$, где β - вектор с координатами β_k . Она кососимметрична по i, j и k . Кососимметричность правой части по i и j дает соотношение, которое можно записать в виде

$$\sum_{t \geq 3} \omega^t \wedge b_t^s = 0,$$

где b_t^s - вектор с координатами β_{kt}^s . Из леммы 2 мы получаем, что $b_t^s = 0$, т.е. $\beta_{kt}^s = 0$ при $t \geq 3$. Отсюда следует, что $\omega^s \wedge \beta = 0$ и, значит, $\beta = 0$, т.е. $\beta_{k1}^2 = 0$, а значит, $\alpha_{ij}^s = 0$ при $i \neq j$.

Теперь остаются еще не найденными только $\alpha_{11}^s = \xi_1$, $\beta_{k1}^s = \xi_k^s$ при $s \geq 3$ и $\beta_{k2}^s = \eta_k^s$ при $s \geq 3$. Мы имеем

$$\varphi(e_i, e_1) \equiv \xi_1 e_i \pmod{N^2}, \quad \varphi(x, f_s) = 0 \text{ при } s \geq 3,$$

$$\varphi(e_i, f_1) = \sum_{s \geq 3} \xi_1^s f_s, \quad \varphi(e_i, f_2) = \sum_{s \geq 3} \eta_1^s f_s,$$

$$\varphi(e_i, e_j) \in N^2 \text{ при } i \neq j.$$

В соотношении (17) при $x=y=e_1, z=e_j$ рассмотрение коэффициента при f_s дает

$$\xi_1 a_{ij}^s + \xi_j^s + \lambda_1 \eta_j^s = 0. \tag{22}$$

Вычитая два уравнения этого типа (с одним и тем же s), мы получим, что $\eta_j^s = \frac{\xi_k a_{kj}^s - \xi_1 a_{1j}^s}{\lambda_1 - \lambda_k}$. Эта формула должна быть верна при всех k . Заменяя k на ℓ и приравнявая результаты, получим уравнение

$$\xi_k a_{kj} (\lambda_i - \lambda_\ell) + \xi_1 a_{1j} (\lambda_\ell - \lambda_k) + \xi_\ell a_{\ell j} (\lambda_k - \lambda_1) = 0. \tag{23}$$

Для четверки (i, j, k, ℓ) мы получим четыре таких уравнения. Определитель полученной системы, как легко проверить, равен пфаффиену матрицы $(a_{\alpha\beta} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta))$, $\alpha, \beta = i, j, k, \ell$. Если не все $\xi_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, d$, то среди ξ_α , $\alpha = i, j, k, \ell$, тоже есть отличное от 0 - если хотя бы два $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0$, то из (23) следует что $\xi_j^s = \eta_j^s = \xi_1 = 0$. Поэтому в кососимметрической матрице $(a_{\alpha\beta} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta))$ все диагональные миноры порядка 4 равны 0, а это противоречит тому, что матрицы A^s общие и $d \geq 4$.

Каждой алгебре N с $N^2 = 0$ размерности n сопоставим алгебру A размерности $n+1$, получающуюся из нее присоединением единицы - $A = K \cdot 1 + N$.

В схеме \mathfrak{C}_n точки, соответствующие таким алгебрам, образуют подсхему \mathfrak{A}_n .

Ее можно задать уравнениями $(x - \frac{1}{n+1} \text{Sp}(x))^3 = 0$ для всех $x \in A$, где $\text{Sp}(x)$ - след матрицы, соответствующей элементу x в регулярном представлении.

В схеме \mathcal{A}_n содержатся замкнутые подсхемы $\mathcal{A}_{n,r}$, соответствующие схемам $\mathcal{A}_{n,r}$, введенным в начале работы.

Теорема 2. При $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6} + 2$ схема $\mathcal{A}_{n,r}'$ является неприводимой компонентой схемы \mathcal{E}_n . Она приведена и имеет размерность $\frac{d(d+3)}{2} r + n$. При $r > \frac{d^2-1}{3}$ эта схема является собственной подсхемой некоторой неприводимой компоненты.

Последнее утверждение доказано в предложении. Рассмотрим теперь случай $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 2$. Найдем сначала размерность схемы $\mathcal{A}_{n,r}$. В базисе $e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_r$ алгебра N имеет таблицу умножения (2) и множество $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}_n$ точек, соответствующих таким алгебрам, имеет размерность $\frac{d(d+1)}{2} r$.

Вся редуцированная подсхема схемы $\mathcal{A}_{n,r}$ имеет вид $G\mathcal{S}$, где $G \subset \text{GL}(n+1)$ состоит из преобразований g с $g(1)=1$. Как и в доказательстве теоремы 1,

$$\dim G\mathcal{S} = \dim \mathcal{S} + \dim G - \dim F_{s_0},$$

где F_{s_0} состоит из тех $g \in G$, для которых $g(s_0) \in \mathcal{S}$. Это значит, что $1, g(e_1), \dots, g(e_d), g(f_1), \dots, g(f_r)$ имеет таблицу умножения такого же вида, как и базис $1, e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_r$ алгебры A , соответствующей точке s_0 .

Иными словами, $g(e_1), \dots, g(e_d), g(f_1), \dots, g(f_r)$ порождают подалгебру коразмерности 1, не содержащую 1. Отсюда следует, что они образуют базис в N . Кроме того,

$$g(e_1)g(e_j) \in \{g(f_1), \dots, g(f_r)\}, \quad g(e_1)g(f_s) = g(f_s)g(f_t) = 0,$$

откуда $g(f_1) \in N^2$, т.е. $g(N) = N$, $g(N^2) = N^2$ и g имеет матрицу вида

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \\ \vphantom{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} d \\ r \end{array}$$

Мы получаем, что $\dim G = n(n+1)$, $\dim F_s = d^2 + dr + r^2$ и $\dim G\mathcal{S} = \frac{d(d+1)}{2} r + n^2 + n - d^2 - dr - r^2 = \frac{d(d+3)}{2} \cdot r + n$, так как $n = d + r$.

Найдем теперь касательное пространство в некоторой общей точке многообразия $\mathcal{A}_{n,r}$ к схеме \mathcal{E}_n . Оно изоморфно $Z^1(A, A)$, если A - алгебра, соответствующая этой точке. Ввиду леммы 4 пространство $T^1(A, A)$ порождается коциклами из пространства $V^1(N, N)$. Для них $\varphi(N, N) \subset N^2$ и $\varphi(N, N^2) = 0$, так что такой коцикл имеет вид (19) с $\alpha_{1,jk} = \beta_{1,j}^t = 0$, откуда $\dim V^1(N, N) = \frac{d(d+1)}{2} r$. Согласно лемме 4, $Z^1(A, A) = V^1(N, N) + B^1(A, A)$. Коцикл из $B^1(A, A)$ определяется отображением $\psi: A \rightarrow A$, для которого $\psi(1) = 0$. Пространство таких отображений обозначим через \mathcal{L} , а пространство тех из них, для

которых соответствующий коцикл $\varphi(x, y) = \psi(xy) - x\psi(y) - y\psi(x)$, $\varphi \in V^1(N, N)$, обозначим \mathcal{L}_0 . Очевидно,

$$\dim Z^1(A, A) = \dim V^1(N, N) + \dim \mathcal{L} - \dim \mathcal{L}_0. \quad (24)$$

Если $\psi \in \mathcal{L}_0$, то $\psi(xy) - x\psi(y) - y\psi(x) \in N^2$ при $x, y \in N$. Отсюда $\psi(N^2) \subset N^2$. Положим $\psi(x) = \ell(x) \cdot 1 + \psi_0(x)$, где $\ell(x) \in K$, $\psi_0(x) \in N$. Тогда $\ell(N^2) = 0$, $\ell(x)y + \ell(y)x \in N^2$. Беря $y \notin Kx + N^2$, получаем $\ell = 0$. Мы видим, что $\psi(N) \subset N$, $\psi(N^2) \subset N^2$, $\psi(1) = 0$, откуда, как и в первой части рассуждения, получаем, что $\dim \mathcal{L}_0 = d^2 + dr + r^2$. Очевидно, что $\dim \mathcal{L} = n(n+1)$, и так как $\dim V^1(N, N) = \frac{d(d+1)}{2}r$, то формула (24) показывает, что $\dim Z^1(A, A) = \frac{d(d+3)}{2}r + n$.

Мы видим, что касательное пространство к схеме \mathcal{E}_n в общей точке схемы $\mathcal{A}_{n,r}$ совпадает с размерностью схемы $\mathcal{A}_{n,r}$. Отсюда следует, что в окрестности этой точки схемы \mathcal{E}_n и $\mathcal{A}_{n,r}$ совпадают, приведены и гладки. Это и утверждалось теоремой.

Замечания. 1. Рассмотренный случай показывает, что изучение локальных колец $A = K \cdot 1 + N$ естественнее, чем соответствующих нильпотентных алгебр. Действительно, те же рассуждения показывают, что в условиях теоремы 2 схема $\mathcal{A}_{n,r}$, соответствующая нильпотентным алгебрам, совпадает с максимальной приведенной компонентой схемы \mathcal{E}_n , но компонента эта не приведена. Это связано с наличием коциклов $\delta_1((N/N^2)^*)$ в (18). Легко видеть, что гомоморфизм δ_1 является вложением — это следует из того, что в характеристике 0 $\text{Der}(A, A) = \text{Lie Aut}(A)$, $\text{Der}(N, N) = \text{Lie Aut}(N)$, где Lie обозначает алгебру Ли соответствующей группы. Но $\text{Aut}(A) = \text{Aut}(N)$, так как автоморфизм сохраняет радикал, откуда и следует наше утверждение. Соответствующие коциклы $\varphi(x, y) = \ell(x) + y\ell(x)$, $\ell \in (N/N^2)^*$ представляют собой инфинитезимальные автоморфизмы $x \rightarrow x + \ell(x) \cdot \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$, которые радикал не сохраняют. Легко проверить, что для общей алгебры деформация $x \circ y = xy + (\ell(x)y + \ell(y)x)\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$, не может быть уже продолжена до деформации по модулю ε^3 .

Такая разница в свойствах компоненты $\mathcal{A}_{n,r}$ и $\mathcal{A}_{n,r}$ кажется удивительной: описываемые ими алгебры N и $K \cdot 1 + N$ с точностью до изоморфизма находятся во взаимно-однозначном соответствии. Схема $\mathcal{A}_{n,r}$ получается из $\mathcal{A}_{n,r}$ пересечением с подпространством, определенным условиями $c_{ij}^0 = 0$, $i > 0$, $j > 0$, наложенными на таблицу умножения (если в базисе $1, e_1, \dots, e_n$ положить $e_0 = 1$). Это подпространство касается подмногообразия $\mathcal{A}_{n,r}$. Такой эффект можно видеть уже в случае $n=1$. Если алгебра, соответствующая точке многообразия \mathcal{E}_n , имеет базис $1, e$ с таблицей умножения $e^2 = \alpha + \beta e$, то для элемента $x = u + ve$, $\text{Sp}(x) = 2u + v\beta$, $(x - \frac{1}{2}\text{Sp}(x))^2 = v^2(\alpha - \frac{\beta^2}{4})$. Поэтому компонента \mathcal{A} в этом случае является параболой $\alpha - \frac{\beta^2}{4} = 0$, а \mathcal{A} получается из нее пересечением с прямой $\alpha = 0$.

2. Реальные трудности содержатся в доказательстве леммы 4. В ней решающую роль играют вычисления во внешней алгебре $\Lambda(N/N^2)$, хотя не ясно, какое отношение эта алгебра имеет к изучаемой алгебре N и ее пространству $T^1(N, N)$. Выяснение внутренней (а не чисто формульной) роли внешней алгебры, вероятно, сделало бы доказательство более прозрачным.

3. Ключевое соотношение $\sum_{s \geq 3} \omega^s \wedge x_s = 0$ в доказательстве леммы 4 в случае $s=3$ приобретает вид $\omega \wedge x = 0$, где ω - бивектор с матрицей $\Gamma = [A^3, A^2]$. Его разрешимость с $x \neq 0$ равносильна тому, что $\text{rg } \Gamma \leq 2$. В таком виде оно встречалось в работе В. Барта [7] в связи с описанием двумерных векторных расслоений на проективной плоскости \mathbb{P}^2 (рассматриваются стабильные расслоения с первым классом Черна, равным 0). Если попытаться интерпретировать его в духе настоящей работы, то надо сопоставить пучку F на \mathbb{P}^2 локальную алгебру $A = \bigoplus_{p=0}^2 H^p(\mathbb{P}^2, \Lambda^p F(-2p))$. При этом $\Lambda^2 F = 0$. Умножение

$$H^1(\Lambda^1 F(-2)) \otimes H^1(\Lambda^1 F(-2)) \rightarrow H^2(\Omega(-4))$$

коммутативно. При этом $\dim H^2(\Omega(-4)) = 3$.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] J a r r o b i n o A., E m s a l e m J. Some zero-dimensional generic singularities; finite algebras having small tangent space // *Compositio Mathematica*. 1978. Vol.36, N 2. P.145-188.
- [2] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т.1, II. М.: Наука, 1988.
- [3] H a r r i s o n D.K. Commutative algebras and cohomology // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1962. Vol.104. P.191-204.
- [4] Q u i l l e n D. On the (co-)homology of commutative rings // *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. Vol.XVII. 1970. P.65-87.
- [5] Картан А., Эйленбергер С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.
- [6] Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры. Т.1. М.: Наука, 1988.
- [7] B a r t h W. Moduli of Vector Bundles on the Projective Plane // *Invent. Math.* 1977. Vol.42. P.63-93.

Математический институт АН СССР им. В. А. Стеклова
117966, Москва, ГСП-1, ул. Вавилова, д. 42

Поступило 5 июня 1990 г.