Ю. А. Шрейдер, Непрерывные групповые спектры,
Уч. записки Моск. гос. ун-та, 1959, выпуск 186, 131–136

https://www.mathnet.ru/uzmu7

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ МГУ
Вып. 186. Математика. т. IX

Ю. А. ШРЕЙДЕР

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППОВЫЕ СПЕКТРЫ

Зачастую в математике приходится конструировать тот или иной сложный объект (группу, кольцо, пространство и т. п.) из более простых объектов того же рода. Для этой цели служат, например, известные конструкции прямой суммы (произведения), непрерывной прямой суммы и обратного спектра групп.

Оказывается, что перечисленные выше понятия являются частными случаями единой конструкции, изложению которой посвящена настоящая заметка.

Для определенности мы будем проводить конструкцию для случая топологических групп, хотя та же конструкция может быть перенесена и на другие объекты.

Рассмотрим топологическое пространство Ω, каждому элементу α которого соотнесена топологическая группа $\boldsymbol{G}_\alpha$. Относительно пространства Ω мы будем предполагать, что в нем выполнена нулевая аксиома отделимости.*

Система групп $\boldsymbol{G}_\alpha$ образует непрерывный групповой спектр, если выполнены следующие условия:

а) Какова бы ни была точка $\alpha \in \Omega$, существует такая окрестность $U(\alpha) \subset \Omega$, что для всякой точки $\beta \in U(\alpha)$ задана не пустая совокупность непрерывных гомоморфизмов $S_{\beta\alpha}$, отображающих группу $\boldsymbol{G}_\beta$ на $\boldsymbol{G}_\alpha$; эти гомоморфизмы мы будем в дальнейшем называть д о п у с т и м ы м и.

б) Каковы бы ни были элемент $\xi_\alpha \in \boldsymbol{G}_\alpha$ и его окрестность $V(\xi_\alpha) \subset \boldsymbol{G}_\alpha$, найдется такая окрестность $U(\alpha) \subset \Omega$, что если некоторая точка $\beta \in \Omega$ лежит в окрестности $U(\alpha)$ и некоторый допустимый гомоморфизм $S_{\beta\alpha}$ переводит элемент $\xi_\beta \in \boldsymbol{G}_\beta$ в элемент $\xi_\alpha \in \boldsymbol{G}_\alpha$, т. е.

$$S_{\beta\alpha}\,\xi_\beta = \xi_\alpha,$$

то для всякого другого допустимого гомоморфизма

$$S'_{\beta\alpha}\,\xi_\beta \in V(\xi_\alpha).$$

в) Каковы бы ни были элемент $\xi_\alpha \in \boldsymbol{G}_\alpha$ и его окрестность $V(\xi_\alpha) \in \boldsymbol{G}_\alpha$, найдется такая окрестность $U(\alpha) \subset \Omega$, что если $\beta \in U(\alpha)$ и $\gamma \in U(\alpha)$, а

* Топологическое пространство удовлетворяет нулевой аксиоме отделимости (является T_0-пространством), если для любых двух его точек найдется окрестность одной из них, не содержащая другую точку (см. [2]).

допустимые гомоморфизмы $S_{\gamma\beta}$ и $S_{\beta\alpha}$ удовлетворяют условиям

$$S_{\gamma\beta}\,\xi_\gamma = \xi_\beta,$$
$$S_{\beta\alpha}\,\xi_\beta = \xi_\alpha,$$

где $\xi_\gamma \in G_\gamma$, а $\xi_\beta \in G_\beta$, то существует допустимый гомоморфизм $S_{\gamma\alpha}$, такой, что

$$S_{\gamma\alpha}\,\xi_\gamma \in V(\xi_\alpha).$$

Непрерывной функцией относительно данного непрерывного группового спектра мы назовем функцию, которая каждой точке α из пространства Ω ставит в соответствие элемент $\xi(\alpha) \subset G_\alpha$ так, что при этом выполнено следующее условие: *для всякой окрестности* $V(\xi(\alpha)) \subset G_\alpha$ *найдется такая окрестность* $U(\alpha) \subset \Omega$, *что для любого элемента* $\beta \subset U(\alpha)$ *и любого допустимого гомоморфизма* $S_{\beta\alpha}$, *отображающего группу* G_β *на* G_α, *выполнено условие*

$$S_{\beta\alpha}(\xi(\beta)) \in V(\xi(\alpha)).$$

Нетрудно проверить, что произведение двух непрерывных функций

$$\zeta(\alpha) = \xi(\alpha)\cdot\eta(\alpha)$$

также является непрерывной функцией в указанном выше смысле.

Таким образом, совокупность всех непрерывных функций относительно данного непрерывного группового спектра является группой, которую мы будем в дальнейшем называть алгебраической предельной группой непрерывного группового спектра.

Алгебраическая предельная группа может быть различными способами топологизирована. В частности, можно определить окрестности по Тихонову, а именно окрестностью $W(V_1, V_2, \ldots, V_n;\ \xi(\alpha))$ непрерывной функции $\xi(\alpha)$ назвать совокупность всех непрерывных функций $\eta(\alpha)$, удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{array}{l} \eta(\alpha_1) \in V_1(\xi(\alpha_1)) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \eta(\alpha_n) \in V_n(\xi(\alpha_n)) \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Полученную таким образом топологическую группу мы назовем топологической предельной группой непрерывного группового спектра.

Рассмотрим примеры.

Прямое произведение групп. Пусть топологическое пространство Ω является дискретным хаусдорфовым топологическим пространством.

Тогда в качестве полной системы окрестностей каждой точки $\alpha \in \Omega$ может быть взята сама эта точка. Совокупность допустимых гомоморфизмов состоит из тождественных изоморфизмов групп G_α каждая на самое себя. Очевидно, группы G_α образуют непрерывный групповой спектр. Алгебраическая предельная группа этого спектра состоит из всех функций $\xi(\alpha)$, ставящих в соответствие точке $\alpha \in \Omega$ элемент $\xi(\alpha) \in G_\alpha$. Таким образом, алгебраическая предельная группа непрерывного спектра является в этом случае прямым произведением групп.

Непрерывное прямое произведение. Пусть все группы G_α изоморфны некоторой группе G. Пусть, далее, пространство Ω является хаусдорфовым. Допустимые гомоморфизмы мы определим как тождественные изоморфизмы

$$G_\alpha \to G \to G_\beta.$$

В этом случае непрерывные функции относительно непрерывного группового спектра суть обычные непрерывные функции на топологическом пространстве Ω, принимающие значения из группы $\boldsymbol{G}$.

Если же группы $\boldsymbol{G}_\alpha$ не изоморфны между собой, а пространство Ω — хаусдорфово, то мы получаем определение непрерывного произведения различных топологических групп.

Обратный групповой спектр. Пусть пространство Ω является дискретным T_0-пространством [2]. Всякое T_0-пространство может быть рассматриваемо как частичное упорядоченное множество, если положить для двух точек этого пространства

$$\alpha \ll \beta$$

в том случае, когда точка α принадлежит замыканию точки β. Обратно, всякое частичное упорядоченное множество может быть рассматриваемо как дискретное T_0-пространство, если единственной окрестностью элемента α этого множества назвать совокупность, состоящую из всех элементов, следующих за ним, а также самого элемента α.

В терминах частичной упорядоченности условие а) означает, что для всякой пары точек из Ω, такой, что $\alpha \ll \beta$, существует допустимый гомоморфизм $S_{\beta\alpha}$, отображающий группу $\boldsymbol{G}_\beta$ на $\boldsymbol{G}_\alpha$.

Если заметить, что в силу дискретности пространства Ω каждая точка $\alpha \in \Omega$ обладает единственной окрестностью, то станет ясным, что условие б) означает единственность допустимого гомоморфизма $S_{\beta\alpha}$, отображающего группу $\boldsymbol{G}_\beta$ на $\boldsymbol{G}_\alpha$.

В силу этого условие в) означает, что коль скоро $\alpha \ll \beta \ll \gamma$, и

$$S_{\gamma\beta}\,\xi_\gamma = \xi_\beta,$$
$$S_{\beta\alpha}\,\xi_\beta = \xi_\alpha,$$

где

$$\xi_\gamma \in \boldsymbol{G}_\gamma, \quad \xi_\beta \in \boldsymbol{G}_\beta, \quad \xi_\alpha \in \boldsymbol{G}_\alpha,$$

то

$$S_{\gamma\alpha}\,\xi_\gamma = \xi_\alpha.$$

Таким образом, система групп $\boldsymbol{G}_\alpha$ образует обратный спектр (см. [1]).

Непрерывные функции относительно непрерывного группового спектра в этом случае суть функции $\xi(\alpha)$, ставящие в соответствие каждой точке $\alpha \in \Omega$ элемент группы $\boldsymbol{G}_\alpha$, для которых выполнено условие

$$S_{\beta\alpha}\,\xi(\beta) = \xi(\alpha).$$

Таким образом, непрерывные функции суть „нити“ обратного спектра (см. [1]). Отсюда вытекает, что алгебраическая предельная группа непрерывного спектра совпадает в данном случае с предельной группой обратного спектра групп.

Рассмотрим теперь пример, в котором определение непрерывного спектра дает существенно новую конструкцию.

Непрерывный спектр в этом случае будет состоять из конечномерных векторных групп, а предельная группа будет являться банаховым пространством $\overline{R}$, сопряженным к некоторому банаховому пространству R.

Прежде чем переходить к описанию самой конструкции, заметим, что понятие непрерывного спектра совершенно очевидным способом переносится на тот случай, когда группы $\boldsymbol{G}_\alpha$ суть линейные пространства [3], а в качестве допустимых гомоморфизмов рассматриваются гомоморфизмы линейных пространств. В этом случае предельная группа также является линейным пространством.

Пусть R — некоторое банахово пространство. Обозначим через Ω топологическое пространство, точками которого служат конечномерные подпространства $R_\alpha \subset R$. Топология в Ω задается окрестностями, которые мы определим следующим образом.

Рассмотрим некоторый базис в R_α: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда окрестность $U_\varepsilon(R_\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ состоит из всех таких конечномерных подпространств $R_\beta \subset R$, что для каждого базисного вектора x_i найдется элемент y_i, для которого

$$\| x_i - y_i \| < \varepsilon.$$

Каждой „точке" R_α из пространства Ω мы поставим в соответствие линейное пространство G_α. Каждому базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в R_α мы поставим в соответствие базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в G_α. При этом, если новый базис $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ связан со старым соотношением

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \tag{2}$$

то соответствующие базисы в G_α связаны соотношениями

$$f_i = \sum a_{ji} f_j'. \tag{3}$$

Пусть $R_\beta \in U_\varepsilon(R_\alpha, x_1, \ldots, x_n)$; тогда семейство допустимых гомоморфизмов, отображающих G_β на G_α, мы определим так.

По определению окрестности $U_\varepsilon(R_\alpha, x_1, \ldots, x_n)$ найдется совокупность векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ из подпространства R_β, таких, что

$$\| y_i - x_i \| < \varepsilon. \tag{4}$$

Если выбрать число ε достаточно малым, то система векторов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будет линейно независимой, а значит может быть дополнена до базиса в R_β: $y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_m$.

Выберем в G_β базис $g_1, g_2, \ldots, g_m$, соответствующий базису $y_1, y_2, \ldots, y_m$, а в G_α базис $f_1, \ldots, f_n$, соответствующий $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустимый гомоморфизм $S_{\beta\alpha}$ зададим соотношениями

$$g_i \to f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$g_i \to 0 \quad (i = n+1, \ldots, m).$$

Проверим, что при этом система групп G_α образует непрерывный спектр. Условие а) тривиально. Покажем, что выполнено условие б).

Пусть некий допустимый гомоморфизм $S_{\beta\alpha}$ переводит элемент $\xi_\beta \in G_\beta$ в элемент $\xi_\alpha \in G_\alpha$.

Разложим элемент ξ_α по базисным векторам

$$\xi_\alpha = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n,$$

тогда

$$\xi_\beta = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n.$$

Всякий другой допустимый гомоморфизм $S_{\beta\alpha}'$ задается выбором нового базиса $y_1', y_2', \ldots, y_n', \ldots, y_m'$ в R_β, удовлетворяющего условиям

$$\| y_i' - x_i' \| < \varepsilon \ (i \leqslant n). \tag{5}$$

Пусть

$$y'_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j, \tag{6}$$

тогда соответствующий базис в G_β определяется согласно (2) и (3) условиями

$$g_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g'_j. \tag{7}$$

Отсюда

$$\xi_\beta = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \lambda_i \right) g_j$$

и

$$S'_{\beta\alpha} \xi_\beta = \left(\sum a_{ji} \lambda_i \right) f_j. \tag{8}$$

Таким образом, нам нужно показать, что при достаточно малом ε матрица n-го ранга (a_{ij}) близка к единичной. Действительно, согласно (4) и (5)

$$\| y_i - y'_i \| < 2\varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{9}$$

отсюда имеем систему неравенств

$$\left\| \sum (a_{ij} - \delta_{ij}) y_i \right\| < 2\varepsilon \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

В силу линейной независимости векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \inf \left\| \sum_{i=1}^{n} l_i x_i \right\| = c(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0; \\ \sum | l_i | = 1. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Сочетая (10), (4) и (11), получим

$$\sum_{j=1}^{n} | a_{ij} - \delta_{ij} | c(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 3\varepsilon. \tag{12}$$

Зададим теперь окрестность $V_\delta(\xi_\alpha)$, состоящую из всех элементов вида

$$\eta_\alpha = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_n f_n,$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n} | \mu_i - \lambda_i | < \delta. \tag{13}$$

Тогда, если $R_\beta \in U_\varepsilon(R_\alpha, x_1, \ldots, x_n)$, где

$$\varepsilon = \frac{c(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{3 \sum | \lambda_i |} \tag{14}$$

и для некоторого допустимого гомоморфизма $S_{\beta\alpha} \xi_\beta = \xi_\alpha$, то для всякого другого допустимого гомоморфизма

$$S'_{\beta\alpha} \xi_\beta \in V(\xi_\alpha).$$

В самом деле, согласно (9), если

$$S'_{\beta\alpha} \xi_\beta = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_n f_n,$$

то

$$\sum_i |\mu_i - \lambda_i| = \sum_i \left| \sum (a_{ji} - \delta_{ji}) \lambda_i \right|,$$

а, согласно (12), отсюда вытекает

$$|\mu_i - \lambda_i| < \frac{3\varepsilon}{c(x_1, x_2, \ldots x_n)} \sum |\lambda_i| = \delta.$$

Следовательно, условие б) выполнено. Так же несложно проверяется и условие в).

Покажем, что предельная группа непрерывного спектра изоморфна в этом случае пространству $\overline{R}$, сопряженному к R.

В самом деле, пусть $R_x \subset R$ — одномерное подпространство, порождаемое вектором x; тогда по условию вектору x поставлен в соответствие вектор $f_x \in G_x$. При этом каждая непрерывная функция относительно спектра принимает в „точке" R_x некоторое значение

$$\xi(R_x) = \lambda f.$$

Таким образом, каждая непрерывная функция относительно спектра порождает функционал

$$\xi(R_\alpha) \to F(x) = \lambda.$$

Этот функционал обладает следующими свойствами:

1) Линейность —

$$F(\mu x) = \mu F(x) \tag{15}$$

доказывается путем применения равенств (2) и (5) к пространствам R_x и G_x.

2) Аддитивность —

$$F(x + y) = F(x) + F(y). \tag{16}$$

3) Непрерывность — если

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0,$$

то

$$\lim F(x_n) = F(x). \tag{17}$$

Таким образом, из (16), (17) и (15) вытекает, что каждой непрерывной функции относительно спектра поставлен в соответствие линейный функционал в пространстве R, т. е. элемент сопряженного пространства. Обратно, каждому линейному функционалу в R можно сопоставить непрерывную функцию относительно спектра. Для этого достаточно каждому подпространству $R_\alpha \subset R$ сопоставить подпространство $\overline{R}_\alpha \subset R$, состоящее из всех функционалов, обращающихся в нуль на R_α, а группе G_α — фактор-пространство $\overline{R}/\overline{R}_\alpha$. Тогда каждому функционалу f соответствует некоторый элемент $\xi_f(R_\alpha)$, являющийся образом функционала при гомоморфном отображении

$$\overline{R} \to \overline{R}/\overline{R}_\alpha.$$

Можно показать, что образы $\xi_f(R_\alpha)$ образуют непрерывную функцию от R_α в том смысле, как это было определено выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Теория гомологий. Ученые записки МГУ, вып. 45, 1940.
2. Александров П. С. Discrete Räume. Матем. сб., 2, 501—519, 1937.
3. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М., 1948.

Статья поступила в редакцию 8. XII 1954 г.