А. С. Андреев, О. А. Перегудова, С. Ю. Раков, Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора,
Журнал СВМО, 2016, том 18, номер 3, 8–18

https://www.mathnet.ru/svmo602

Математика

УДК 62.51

Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора

© А. С. Андреев [1], О. А. Перегудова [2], С. Ю. Раков[3]

Аннотация. В статье исследуется проблема построения нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных регуляторов для управляемых голономных механических систем. Предложен подход, основанный на анализе свойств асимптотической устойчивости и неустойчивости решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Определены предельные свойства решений таких уравнений. Доказана теорема, являющаяся развитием принципа инвариантности на нелинейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра. С использованием метода функционалов Ляпунова доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений таких уравнений. Отличие полученных теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости от классических состоит в применении функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. При этом для установления свойства притяжения к нулю анализируется положительное предельное множество решений интегро-дифференциальных уравнений. Дано решение задачи о построении нелинейного интегрального регулятора для голономной механической системы с n степенями свободы, обеспечивающего стабилизацию заданного программного положения. В качестве приложения решена задача о стабилизации программного положения пространственного двухзвенного манипулятора путем построения нелинейного интегрального регулятора. Представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, положительное предельное множество, голономная механическая система, стабилизация, нелинейный интегральный регулятор, функционал Ляпунова.

1. Введение

Большинство известных стратегий управления механическими системами получено в предположении, что доступными для измерения являются как координаты, так и скорости управляемого объекта. При этом на практике установка тахометров часто бывает неоправдана из-за дороговизны, а также в связи с тем, что сигналы, получаемые с этих устройств, являются зашумленными. Поэтому проблема построения регуляторов для механических систем без измерения скоростей является актуальной. Один из подходов к решению этой проблемы состоит в использовании динамических компенсаторов (см. напр. [1]–[3]). Отметим, что результаты, полученные в работах [1]–[3], применимы лишь для ограниченного класса механических систем и основаны на использовании принципа инвариантности Ла-Салля и теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости автономной системы с построением знакопостоянной функции Ляпунова.

[1] Декан факультета математики, информационных и авиационных технологий, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; andreevas@sv.ulsu.ru

[2] Профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; peregudovaoa@gmail.com

[3] М.н.с. Управления научных исследований, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; rakov.stanislav@gmail.com

Применение динамических компенсаторов по сути является включением в регулятор интегральных слагаемых. Используя представление интегральных членов в структуре управляющих сигналов как регуляторов с неограниченным последействием [4]–[6], движение механических систем с такими типами регуляторов можно моделировать интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

В работе [7] дано развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. На этой основе разработаны методики построения ПИ- и ПИД-регуляторов в задачах управления механическими системами.

В работе [8] предложен закон управления, осуществляющий стабилизацию заданного программного движения двухзвенного манипулятора в виде пропорционально-интегральной зависимости для случая, когда основание манипулятора совершает заданное нестационарное движение. При этом задача стабилизации программного движения решена для линеаризованной модели манипулятора.

В работе [9] решена задача о стабилизации программного движения двухзвенного манипулятора без измерения скоростей. Представлена методика синтеза кусочно-непрерывного нелинейного управления на основе построения наблюдателя и применения метода вектор-функций Ляпунова.

Целью настоящей работы является разработка нелинейных законов управления для широкого класса голономных механических систем без измерения скоростей на основе нелинейных интегральных регуляторов.

Результаты настоящей статьи делятся на две части. Первая часть состоит в установлении предельных свойств решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида Вольтерра с получением новых теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе применения функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Во вторую часть вошли результаты по стабилизации программных положений голономных механических систем путем построения интегральных регуляторов с неограниченным последействием на основе обратной связи с непрерывным измерением координат объекта. Структура регулятора включает две составляющие: первая имеет форму потенциальных сил, компенсирующих действие внешних потенциальных сил в выбранном положении, другая – форму интегрального регулятора с неограниченным последействием, действие короторого обеспечивает диссипацию. На примере двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы проведено численное моделирование, подтверждающее полученные теоретические результаты.

2. Предельные свойства решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\dot{x} = f\left(x\left(t\right)\right) + \int\limits_0^t g\left(s - t, x\left(t\right), x\left(s\right)\right)\, ds, \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное линейное действительное пространство с нормой $\|x\|$; f, g — функции, определенные и непрерывные соответственно в областях $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^- \times \mathscr{D} \times \mathscr{D}$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$, при этом функция f удовлетворяет условию Липшица

$$\|f\left(x^{(2)}\right) - f\left(x^{(1)}\right)\| \leqslant L_1\|x^{(2)} - x^{(1)}\|,\ L_1 = L_1\left(K_1\right) \tag{2.2}$$

для каждого компактного множества $K_1 \subset \mathscr{D}$, а функция g — следующим условиям: для каждого компактного множества $K_2 \subset \mathscr{D} \times \mathscr{D}$ выполняются неравенства

$$\|g(t,x,y)\| \leqslant g_1(\tau,K_2) \ \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}^- \times K_2, \qquad \int\limits_{-\infty}^{0} g_1(\tau,K_2)\,d\tau < +\infty, \tag{2.3}$$

$$\|g\left(\tau,x^{(2)},y^{(2)}\right) - g\left(\tau,x^{(1)},y^{(1)}\right)\| \leqslant L_{21}\|x^{(2)}-x^{(1)}\| + L_{22}\|y^{(2)}-y^{(1)}\|, \quad L_{2j} = L_{2j}(K_2). \tag{2.4}$$

При условиях (2.2)–(2.4) для каждой начальной точки $x_0 \in \mathscr{D}$ существует единственное решение $x = x(t,x_0)$ $(x(0,x_0) = x_0)$ уравнения (2.1), определенное на интервале $[0,\alpha)$, при этом $x(t,x_0) \to \partial\mathscr{D}$ при $t \to \alpha - 0$.

Пусть $x = x(t,x_0)$ есть некоторое решение (2.1), определенное и ограниченное некоторым компактом $K \subset \mathscr{D}$ при $t \geqslant 0$. Определим классическим образом положительную предельную точку $p \in \mathscr{D}$ и соответствующее положительное предельное множество $\omega^+(x_0)$

$$p = \lim_{t_k \to +\infty} x(t_k,x_0), \ \omega(x_0) = \{p \in \mathscr{D} : x(t_k,x_0) \to p, \ t_k \to +\infty\}.$$

В дополнение к (2.1) можно ввести уравнение Вольтерра с бесконечным запаздыванием

$$\dot{x} = f(x(t)) + \int\limits_{-\infty}^{t} g(s-t,x(t),x(s))\,ds, \tag{2.5}$$

существование которого следует из условия (2.3).

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $x = x(t,x_0)$ есть некоторое решение (2.1), определенное компактом $K \subset \mathscr{D}$ при всех всех $t \geqslant 0$. Тогда для каждой предельной точки $p \in \omega^+(x_0)$ существует решение $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (2.5), такое что $x(0) = p$, $\{x(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \omega^+(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in \omega^+(x_0)$ есть некоторая точка, определяемая последовательностью $t_k \to +\infty$

$$\lim_{t_k \to +\infty} x(t_k,x_0) = p.$$

Несложно найти, что для фиксированного $T_1 = t_1/2$ последовательность функций $x_k(t) = x(t_k+t,t_0)$, $t \in [-T_1,T_1]$, равномерно ограничена, равностепенно непрерывна. Отсюда найдется последовательность $x_{k_l}(t)$ и функция $x = x^*(t)$, такие что $x_{k_l}(t) \to x^*(t)$ при $t \in [-T_1,T_1]$. Выбирая из $\{x_{k_l}(t)\}$ подпоследовательность $\{x_{k_{l_m}}(t)\}$, сходящуюся равномерно при $t \in [-T_2,T_1]$, $T_2 = t_{k_l}/2$, к $x^{**}(t)$ и продолжая этот процесс далее, найдем подпоследовательности $t^*_m \to +\infty$ и $T^*_m \to +\infty$ и функцию $x = \phi(t)$, такие что подпоследовательность $\{x^{(m)}(t) = x(t^*_m+t,x_0)\}$ сходится к $x = \phi(t)$ равномерно по $t \in [-T^*_m,T^*_m]$ при фиксированном T^*_m. В силу того, что $x(t,x_0)$ есть решение (2.1) последовательно имеем

$$x(t,x_0) = x_0 + \int\limits_0^t f(x(\tau,x_0))\,d\tau + \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^\tau g(s-\tau,x(\tau,x_0),x(s,x_0))\,ds\right) d\tau,$$

$$x^{(m)}(t) = x(t_m) + \int\limits_{t_m^*}^{t_m^*+t} f(x(\tau, x_0))\, d\tau + \int\limits_{t_m^*}^{t_m^*+t} \left(\int\limits_0^{\tau} g(s-\tau, x(\tau, x_0), x(s, x_0))\, ds \right) d\tau,$$

$$x^{(m)}(t) = x(t_m^*) + \int\limits_0^t f(x_m(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t \left(\int\limits_{-t_m}^{\tau} g(s-\tau, x_m(t), x_m(s))\, ds \right) d\tau.$$

Отсюда, учитывая условия (2.2), в пределе при $m \to +\infty$ получим

$$\phi(t) = p + \int\limits_0^t f(\phi(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t \left(\int\limits_{-\infty}^{\tau} g(s-\tau, \phi(\tau), \phi(s))\, ds \right) d\tau.$$

Таким образом, функция $x = \phi(t)$ является решением (2.5), при этом по построению $\phi(0) = p, \{\phi(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \omega^+(x_0)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости

Пусть для уравнения (2.1) можно найти функционал Ляпунова вида

$$V(x_t) = V_1(x(t)) + \int\limits_0^t V_2(s-t, x(t), x(s))\, ds, \quad (x_t = x(s), 0 \leqslant s \leqslant t), \tag{3.1}$$

где V_1 и V_2 есть некоторые неотрицательные скалярные функции, определенные и непрерывные в областях $\mathscr{D}$ и $\mathbb{R}^- \times \mathscr{D} \times \mathscr{D}$.

Предположим существование верхней правосторонней производной функционала (3.1) в силу (2.1)

$$\dot{V}^+(x_t) = \lim_{h \to 0+} \frac{V(x_{t+h}) - V(x_t)}{h},$$

имеющей следующую оценку

$$\dot{V}^+(x_t) \leqslant -W(x_t), \quad W(x_t) = W_1(x(t)) + \int\limits_0^t W_2(s-t, x(t), x(s))\, ds, \tag{3.2}$$

где $W_1(x)$ и $W_2(\tau, x, y)$ есть некоторые неотрицательные функции, определенные и непрерывные в областях $\mathscr{D}$ и $\mathbb{R}^- \times \mathscr{D} \times \mathscr{D}$ и удовлетворяющие в этих областях условиям вида (2.2),(2.3) и (2.4).

Отсюда, в частности, для непрерывной функции $x : \mathbb{R} \to K, K \subset \mathscr{D}$ – компакт, следует существование

$$\int\limits_{-\infty}^t W_2(s-t, x(t), x(s))\, ds.$$

Т е о р е м а 3.1. *Предположим, что для уравнения* (2.1) *можно найти функционал* $V = V(x_t)$, *верхняя правосторонняя производная которого удовлетворяет неравенству* (3.2). *Тогда для каждого ограниченного компактом* $K \subset \mathscr{D}$ *решения* $x = x(t, x_0)$ *уравнения* (2.1) *множество* $\omega^+(x_0)$ *состоит из решений уравнения* (2.1), *удовлетворяющих равенствам*

$$W_1(x(t)) = 0,\ W_2(s-t, x(t), x(s)) = 0,\ t \geqslant s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для решения $x = x(t, x_0)$ в силу условия (3.2) функция $V(x_t(x_0))$ $\left(x_t(x_0) = x(s, x_0)_t\ \ 0 \leqslant s \leqslant t\right)$ является монотонно убывающей, и значит существует

$$\lim_{t\to+\infty} V(x_t) = V^* \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Из неравенства (3.1) также для каждого $T > 0$ находим

$$V(x_{t+T}) - V(x_{t-T}) \leqslant -\int\limits_{t-T}^{t+T} W_1(x(\tau))\, d\tau - \int\limits_{t-T}^{t+T} \left(\int\limits_{0}^{\tau} W_2(s-\tau, x(\tau), x(s))\, ds\right) d\tau.$$

Пусть $\omega^+(x_0)$ есть положительное предельное множество, а $p \in \omega^+(x_0)$ есть положительная предельная точка, определяемая последовательностью $t_k \to +\infty, x(t_k, x_0) \to p$. Как и в теореме 2.1., найдем решение $x = \phi(t)$ уравнения (2.5), проходящее через точку p, $\phi(0) = p$. Соответственно для построенных в теореме 2.1. последовательностей $t^*_m \to +\infty$ и $T^*_m \to +\infty$ имеем

$$V\left(x_t^{(m)}\right)\Big|_{t=t^*_m+T^*_m} - V\left(x_t^{(m)}\right)\Big|_{t=t^*_m-T^*_m} \leqslant$$
$$\leqslant -\int\limits_{-T^*_m}^{T^*_m} W_1\left(x^{(m)}(\tau)\right) d\tau - \int\limits_{-T^*_m}^{T^*_m}\left(\int\limits_{-t^*_m}^{\tau} W_2\left(s-\tau, x^{(m)}(\tau), x^{(m)}(s)\right) ds\right) d\tau.$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \to +\infty$ и учитывая (3.3), для всех $t \in \mathbb{R}$ получим

$$W_1(\phi(\tau)) = 0,\ \int\limits_{-\infty}^{\tau} W_2(s-\tau, \phi(\tau), \phi(s))\, ds = 0,$$

и соответственно $W_2(s-\tau, \phi(\tau), \phi(s)) = 0,\ \tau \geqslant 0$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Теорема 3.1. представляет собой теорему принципа инвариантности для уравнения (2.1).

Положим, что в уравнении (2.1) $f(0) = 0, g(\tau, 0, 0) = 0$, и значит, уравнение (2.1) имеет нулевое решение $x(t, 0) = 0$.

Из теоремы 3.1. несложно вывести следующие достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решения, в которых через $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ обозначена функция типа Хана.

Т е о р е м а 3.2. *Предположим, что для уравнения* (2.1) *можно найти функционал вида (3.1) с функцией* $V_1(x) \geqslant a(\|x\|)$, *верхняя правосторонняя производная которого удовлетворяет неравенству* (3.2). *При этом отсутствуют решения* $x = \phi(t)$ *уравнения* (2.5), *удовлетворяющие при всех* $t \in \mathbb{R}$ *равенствам*

$$W_1(t, \phi(t)) = 0;\ W_2(s-t, \phi(t), \phi(s)) = 0, s \leqslant t,$$

кроме нулевого $\phi(t) = 0$. *Тогда решение x=0 уравнения* (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 3.3. *Предположим, что для уравнения* (2.1) *можно найти функционал вида* (3.1) *с функцией* $V_1(x)$, *принимающей в любой достаточно малой окрестности* $x = 0$ *отрицательные значения, и верхней правосторонней производной, удовлетворяющей неравенству* (3.2). *При этом отсутствуют решения* $x = \phi(t)$ *уравнения, удовлетворяющие соотношениям*

$$V_1(\phi(t)) < 0,\ W_1(\phi(t)) = 0,\ W_2(s-t, \phi(t), \phi(s)).$$

Тогда решение $x = 0$ *уравнения* (2.1) *неустойчиво.*

Доказательства теорем 3.2. и 3.3. выводятся непосредственно из теоремы 3.1.

4. Решение задачи о стабилизации программного положения голономной механической системы при помощи ПИ-регулятора

Рассмотрим управляемую механическую систему с n степенями свободы и соответственно обобщенными координатами, описываемыми уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{d\Pi}{dq} + Q(q, \dot q) + U, \tag{4.1}$$

где $T = \dot q' A(q)\dot q/2$ – кинетическая энергия системы с инерционной матрицей $A(q)$, $\dot q = dq/dt$, $Q(q, \dot q)$ – вектор обобщенных диссипативных и гироскопических сил, $Q(q_i, 0) = 0$, $Q'\dot q \leqslant 0$, $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия, U – обобщенная управляющая сила, $()'$ – операция транспонирования. Полагаем, что функции, входящие в (4.1), определены и непрерывны при всех $q \in \mathbb{R}^n$, ограничения на управление U не накладываются.

Уравнения (4.1), разрешенные относительно $\ddot q$, представим в виде:

$$\frac{dq}{dt} = \dot q, \frac{d\dot q}{dt} = A^{-1}(q)\left(C(q, \dot q)\dot q + Q(q, \dot q) - \frac{d\Pi}{dq} + U\right).$$

При этом коэффициенты матрицы $C = (c_{jk})$ инерционных сил определяются равенством

$$c_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot q_j;\ j, k = 1, ...n.$$

Рассмотрим задачу о стабилизации программного положения равновесия

$$\dot q = 0,\ q = q_0 = const. \tag{4.2}$$

Покажем, что эта задача решается посредством интегрального регулятора вида

$$U = -\frac{d\Pi_u(q)}{dq} - \left(\frac{df}{dq}\right)' \int_0^t P(\nu - t)\left(f(q(t)) - f(q(\nu))\right)d\nu, \tag{4.3}$$

где $\Pi_u \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть некоторая непрерывно дифференцируемая функция, $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ есть некоторая неотрицательная матричная функция с производной $\frac{dP(s)}{ds} \geqslant 0$, $x'\frac{dP(s)}{ds} \geqslant \alpha(s)\|s\|^2$, $\alpha(s) > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ есть некоторая дифференцируемая функция, имеющая в любой ограниченной области $\{q \in \mathbb{R}^m : \|q\| \leqslant \mu = const\}$ конечное число прообразов $f(c)$, или, иначе, конечное число решений уравнения $f(q) = c$.

Сделаем замену $x = q - q^0$, $y = q'$. Тогда уравнения движения (4.1) с управлением (4.3) примут следующий вид (2.1)

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t))\left(C_1(x(t), y(t))\,y(t) + Q_1(x(t), y(t)) - \right. \tag{4.4}$$

$$\left. -\frac{d\Pi_1(x(t))}{dt}\left(\frac{df_1(x(t))}{dx}\right)'\int\limits_0^t P(\nu - t)\left(f(x(t)) - f(x(\nu))\right)d\nu\right), \tag{4.5}$$

где индексом "1" обозначены функции, полученные из соответствующих функций, входящих в (4.2) и (4.3), в результате указанной замены переменных.

Введем функционал

$$V = \frac{1}{2}y'(t)A_1(x(t))\,y(t) + \Pi_1(x(t)) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(f(x(t)) - f(x(\nu))\right)' P(\nu - t)\left(f(x(t)) - f(x(\nu))\right)d\nu.$$

Для производной этого функционала в силу уравнений (4.5)

$$\dot{V} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^t \left(f_1(x(t)) - f_1(x(\nu))\right)'\frac{dP(\nu - t)}{ds}\left(f_1(x(t)) - f_1(x(\nu))\right)d\nu \leqslant 0.$$

Таким образом, производная удовлетворяет равенству вида. Соответственно теоремам 3.1.-3.3. несложно вывести следующие результаты.

Теорема 4.1. *Предположим, что управление* (4.3) *таково, что функция* $\Pi_1(x)$ *является определенно-положительной, при этом в некоторой области* $\{0 < \|x\| < \Delta\}$ *выполнено неравенство* $\frac{d\Pi_1}{dx} > 0$. *Тогда это управление обеспечивает стабилизацию программного положения* (4.2). *При этом, каждое S S движение системы неограниченно приближается при* $t \to +\infty$ *к множеству движений* $\{\dot{x}(t) = 0\ \frac{d\Pi(x(t))}{dx} = 0\}$.

Теорема 4.2. *Предположим, что управление* (4.3) *таково, что функция* $\Pi_1(x)$ *принимает в любой достаточно малой окрестности* $x = 0$ *отрицательные значения, при этом* $\|\frac{d\Pi_1}{dx}\| > 0$ *в области* $\{0 < \|x\| < \Delta,\ \Pi_1(x) < 0\}$. *Тогда управление* (4.3) *является дестабилизирующим.*

Теоремы 4.1. и 4.2. представляют собой основу для построения как линейных интегральных регуляторов (пропорционально-интегральных), так и нелинейных, в решении задач о стабилизации программных положений равновесия голономных механических систем в нелинейной постановке.

5. Решение задачи о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы

Рассмотрим задачу о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы [10]. Выберем в качестве обобщенных координат q_1, q_2 и q_3 углы поворота в трех цилиндрических шарнирах манипулятора: угол поворота q_1 колонки вокруг вертикальной оси, угол q_2 поворота первого звена длиной l_2 и массой m_2 и угол q_3 поворота второго звена длиной l_3 и массой m_3 [10]. Полагаем, что на систему действуют только силы тяжести, выражаемые потенциальной энергией

$$\Pi(q_2, q_3) = \mu_2 \sin q_2 + \mu_3 \sin(q_2 + q_3),$$

где $\mu_2 = gl_2(m_3 + 0.5m_2)$, $\mu_3 = 0.5gl_3m_3$.

Для задачи стабилизации программного положения $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$ манипулятора найден нелинейный интегральный регулятор вида

$$\begin{aligned}
&Q_1 = -\lambda_1 \sin(q_1(t) - q_1^0) - \cos q_1(t) \int\limits_{t-h(t)}^{t} p_1(\nu - t)(\sin q_1(t) - \sin q_1(\nu))d\nu,\\
&Q_2 = \mu_2 \cos q_2^0 \cos(q_2(t) - q_2^0) + \mu_3 \cos(q_2^0 + q_3^0) \cos(q_2(t) + q_3(t) - q_2^0 - q_3^0) -\\
&-\lambda_2 \sin(q_2(t) - q_2^0) - \cos q_2(t) \int\limits_{t-h(t)}^{t} p_2(\nu - t)(\sin q_2(t) - \sin q_2(\nu))d\nu,\\
&Q_3 = \mu_3 \cos(q_2^0 + q_3^0) \cos(q_2(t) + q_3(t) - q_2^0 - q_3^0) - \lambda_3 \sin(q_3(t) - q_3^0) -\\
&- \cos q_3(t) \int\limits_{t-h(t)}^{t} p_3(\nu - t)(\sin q_3(t) - \sin q_3(\nu))d\nu,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 \geq \rho_1 > 0$, $\lambda_3 - \mu_3 \geq \rho_2 > 0$, $\rho_1\rho_2 > \mu_3^2$.

Численное моделирование проводилось в системе MathCad при следующих значениях параметров манипулятора

$$m_2 = m_3 = 20 \text{ кг}, \, l_2 = l_3 = 1 \text{ м}.$$

Были выбраны следующие значения программной позиции

$$q_1^0 = \pi \text{ рад}, \, q_2^0 = \frac{\pi}{3} \text{ рад}, \, q_3^0 = \frac{\pi}{4} \text{ рад}.$$

Найдены следующие значения параметров управления (5.1)

$$\lambda_1 = 10, \, \lambda_2 = 500, \, \lambda_3 = 200, \, p_i(\nu - t) = e^{k(\nu - t) + 8} \quad (i = 1, 2, 3), \quad k = 10.$$

На рисунках 5.1 – 5.3 показаны результаты моделирования на временном интервале $0 \leq t \leq 25$с. Сплошной линией показаны графики действительного движения, а штриховой – значения соответствующей программной позиции. Видно, что при начальных отклонениях от программной позиции, равных $0,8$ рад, происходит стабилизация данного положения.

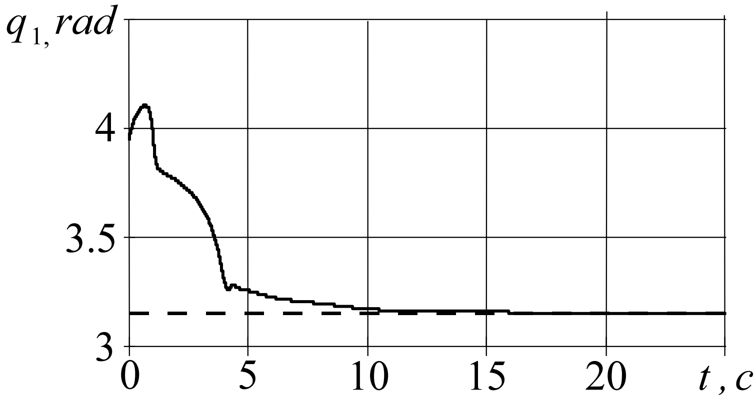

Рисунок **5.1**

График зависимости угловой координаты колонки от времени.

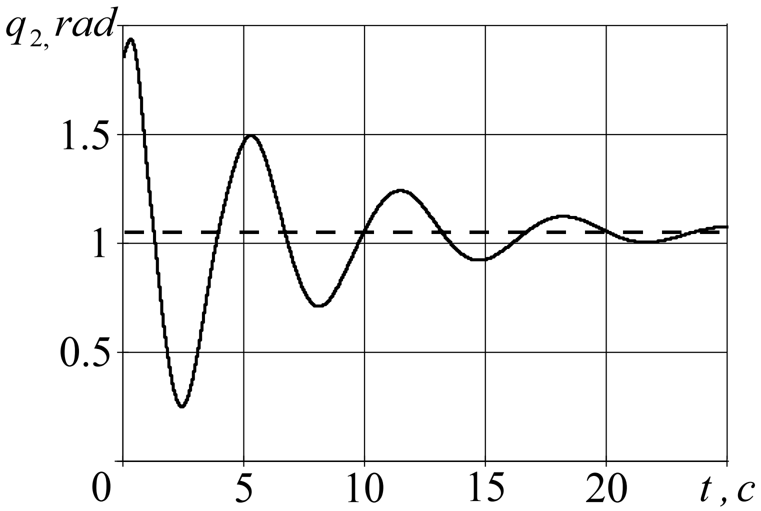

Рисунок **5.2**

График зависимости угловой координаты первого звена манипулятора от времени.

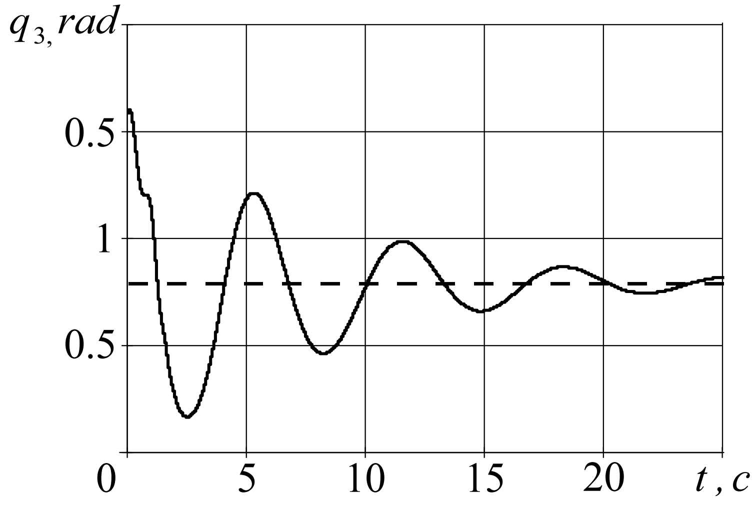

Рисунок **5.3**

График зависимости угловой координаты второго звена манипулятора от времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-08482, № 15-01-08599).

Дата поступления 01.11.2016

Список литературы

1. H. Berghuis, H. Nijmeijer, "Global regulation of robots using only position measurements", *Systems and Contr. Letters*, **21** (1993), 289-293.

2. Бурков И.В., "Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом", *Прикладная математика и механика*, **62**:6 (1998), 923-933.

3. Burkov I.V., "Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements", 3-rd IEEE Multi-conference on Systems and Control. (St. Petersburg), 2009, 400-405.

4. И. М. Ананьевский, В. Б. Колмановский, "О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием", *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 9, 34-42.

5. А. С. Андреев, *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений: монография*, Изд-во Ул-ГУ, Ульяновск, 2005, 328 с.

6. А. С. Андреев, "Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений", *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 9, 4-55.

7. А. С. Андреев, В. В. Благодатнов, А.Р. Кильметова, "Уравнения Вольтерра в моделировании ПИ- и ПИД-регуляторов", *Научно-технический вестник Поволжья*, 2013, № 1, 84-90.

8. А. С. Андреев, С. Ю. Раков, "Об управлении двухзвенным роботом-манипулятором на основе ПИ-регулятора", *Автоматизация процессов управления*, 2015, № 3(41), 69-72.

9. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, "Синтез управления двухзвенным манипулятором без измерения скоростей", *Автоматизация процессов управления*, 2015, № 4(42), 81-89.

10. Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин, *Методы управления нелинейными механическими системами*, Физматлит, М., 2006, 326 с.

On Modeling a nonlinear integral regulator on the base of the Volterra equations

© A. S. Andreev[4], O. A. Peregudova[5], S. Yu. Rakov[6]

Abstract. Synthesis of discrete-time control which solves the problem of stabilization of holonomic mechanical systems' program motion is considered. Such systems are described by Lagrange equations of the second kind. Digital control signals are used in computer-containing control systems for continuous processes. Development of models for such controlled processes leads to investigation of continuous-discrete systems with state described by a continuous function and discrete control functions. This paper proposes an approach for constructing of controller taking into account non-linearity of the system and non-stationarity of program motion. By means of Lyapunov vector function and the comparison system sufficient conditions of given program motion's stabilization are obtained. A feature of the article is in solving of the problem by use of Lyapunov vector function with components that explicitly depend on time, and are nonlinear with respect to the generalized coordinates. It allows to solve the stabilization problem in general having the possibility to select the most suitable control parameters for each particular system.

Key Words: stabilization, control, discrete-time control, synthesis of control for mechanical systems, Lyapunov vector-function, comparison systems, nonstationary nonlinear dynamical systems

[4] Dean of Faculty of Mathematics and Information and Aviation Technology, Prof., D.Sc., Head of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; andreevas@sv.ulsu.ru

[5] Professor of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; peregudovaoa@gmail.com

[6] JJunior Researcher of Scientific Research Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; rakov.stanislav@gmail.com