В. В. Маймескул, О скорости рациональной аппроксимации функций на множествах комплексной плоскости, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 8, 35–41

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1991 МАТЕМАТИКА № 8 (351)

В. В. Маймескул УДК 517.538

О СКОРОСТИ РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВАХ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

В данной статье установлены оценки сверху скорости равномерной рациональной аппроксимации функций обобщенных классов Гёльдера на компактах из достаточно широкого класса. Показана асимптотическая точность этих оценок на рассматриваемых классах множеств и функций.

§ 1. Обозначения и формулировки результатов

Пусть K — произвольный компакт в C; $\omega(\delta)$, $\delta>0$, — функция типа модуля непрерывности, т. е. положительная, неубывающая (причем $\omega(+0)=0$) функция, удовлетворяющая при некотором $C=\text{const}>0$ условию $\omega(t\delta)\leqslant \leqslant Ct\omega(\delta)$, $\delta>0$, $t>1$. Через $CH^{\omega}=CH^{\omega}(K)$, $C=\text{const}>0$, обозначим класс функций $f(z)$, аналитических во внутренних точках K и непрерывных на K, для которых $|f(z_1)-f(z_2)|\leqslant C\omega(|z_1-z_2|)$, $z_1, z_2\in K$, а через H^{ω} — множество всех функций, каждая из которых при некотором C принадлежит классу CH^{ω}. Если $\omega(\delta)=\delta^{\beta}$, $0<\beta\leqslant 1$, будем пользоваться стандартными обозначениями CH^{β} и H^{β}. Для $\delta>0$ положим $U(z, \delta)=\{\zeta:|\zeta-z|<\delta\}$, $d(z, K)= =\inf\limits_{\zeta\in K}|\zeta-z|$, $K_{\delta}=\bigcup\limits_{z\in K} U(z,\delta)=\{\zeta: d(\zeta, K)<\delta\}$.

Определение ([1]). Будем говорить, что компакт $K\in \boldsymbol{R}$, если при некотором $C=C(K)=\text{const}>1$ для точек $\zeta\in\partial K$ и $\delta>0$ выполняется соотношение

$$U(\zeta, C\delta)\cap CK_{\delta}\neq\varnothing, \tag{1}$$

где $CK_{\delta}=C\diagdown K_{\delta}$ — дополнение открытого множества K_{δ}.

Геометрическое строение ограниченных континуумов со связным дополнением, принадлежащих $\boldsymbol{R}$, изучалось в [1]. Дополнительно отметим, что как сами компакты класса $\boldsymbol{R}$, так и их дополнения могут состоять из бесконечного числа связных компонент, напр.,

$$K_1=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} U(2^{-n},\ 2^{-n-2})},\quad K_2=\overline{U(0,\ 1)\diagdown K_1}.$$

Важную роль будет играть также следующая характеристика компакта (см. [2]), которую естественно назвать „сеточной" размерностью его границы. Пусть $\mathbf{M}_0$ обозначает сетку, состоящую из квадратов со стороной длины 1, вершины которых имеют целочисленные координаты. Сетка $\mathbf{M}_k$ получается из $\mathbf{M}_0$ делением каждого из составляющих ее квадратов на 2^{2k} равных квадратов. Через $m(k, \partial K)=m(k)$ обозначим число квадратов сетки $\mathbf{M}_k$, имеющих с ∂K непустое пересечение, и положим

$$\alpha(\partial K)=\overline{\lim_{k\to\infty}}\ \frac{\log_2 m(k)}{k}.\ ^{1)} \tag{2}$$

В дальнейшем совокупность квадратов из $\mathbf{M}_k$, пересекающих ∂K, будем обозначать через $\{\tau_k\}$.

Через $R_n(f, K)$ обозначим скорость наилучшего равномерного рационального приближения непрерывной на K функции $f(z)$ рациональными дробями порядка, не выше n.

[1] Как отмечено в [3], „сеточная" размерность множества совпадает с его верхней метрической размерностью (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть $K \in \boldsymbol{R}$, $f \in 1H^{\omega}(K)$. Тогда для произвольного $\alpha > \alpha(\partial K)$ справедливо неравенство $R_n(f, K) \leqslant C_1 \omega(n^{-1/\alpha})$, $n = 1, 2, \ldots$, где $C_1 > 0$ — постоянная, значение которой зависит только от α, константы C в (1) и диаметра компакта K.*

Следствие 1. Пусть $K \in \boldsymbol{R}$, $f \in H^{\beta}(K)$. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} ((-\ln R_n(f, K))/\ln n) \geqslant \beta/\alpha(\partial K). \tag{3}$$

Пусть Γ — произвольная ограниченная квазиконформная дуга. Известно [1], что $\Gamma \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, приводимая ниже теорема 2 позволяет говорить в определенном смысле о точности полученных в теореме 1 результатов на рассматриваемых классах множеств и функций.

Теорема 2. *Для произвольного $\beta \in (0, 1]$ существует функция $f(z) \in H^{\beta}(\Gamma)$ и последовательность $\{p_i\} \uparrow \infty$ такие, что для любого $\alpha < \alpha(\Gamma)$ при $i > i(\alpha)$ справедливо неравенство $R_{p_i}(f, \Gamma) \geqslant c p_i^{-\beta/\alpha}$, в котором значение постоянной $c > 0$ зависит только от коэффициента квазиконформности дуги Γ.*

Следствие 2. Для произвольной конечной квазиконформной дуги Γ и произвольного $\beta \in (0, 1]$ существует функция $f(z) \in H^{\beta}(\Gamma)$, для которой оценка (3) неулучшаема, т. е.

$$\varliminf_{n\to\infty} ((-\ln R_n(f, \Gamma))/\ln n) = \beta/\alpha(\Gamma).$$

Замечание. Полученные результаты показывают, что при рациональной аппроксимации гладкость границы компакта не играет столь существенной роли, как в случае приближения полиномами. Определяющим фактором здесь является ее „сеточная“ размерность.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Построение аппроксимирующих рациональных дробей удобно вести по схеме доказательства известной леммы С. Н. Мергеляна [5] (лемма 2, с. 114).

Мы можем считать, что в некоторой точке $\tilde{z} \in K$ $f(\tilde{z}) = 0$ и, следовательно, $\|f\|_{C(K)} < \omega(d)$, где d — диаметр компакта K. Продолжим функцию $f(z)$ во всю комплексную плоскость $\boldsymbol{C}$ (оставим за ней обозначение f) так, чтобы выполнялись соотношения

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant C_2 \omega(|z_1 - z_2|), \quad z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}; \quad \max_{z\in \boldsymbol{C}} |f(z)| < C_2 \omega(d).$$

Одно из возможных продолжений с указанными свойствами описано в [6]. При фиксированном $\delta > 0$ построим δ-усреднение функции $f(z)$, полагая

$$f_\delta(z) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint\limits_{U(z,\,\delta)} f(\zeta)\, d\sigma_\zeta.$$

Полученная функция $f_\delta(z)$ обладает следующими свойствами (см. [7], лемма 2, с. 341):

$$|f(z) - f_\delta(z)| \leqslant C_2 \omega(\delta), \quad z \in \boldsymbol{C}; \quad f_\delta(z) = f(z), \quad z \in K \setminus G_\delta,$$

где $G_\delta = \{z \in K : d(z, CK) < \delta\}$. Кроме того, функция $f_\delta(z)$ непрерывно дифференцируема в $\boldsymbol{C}$, а ее формальная производная удовлетворяет неравенству $|\partial f_\delta(z)/\partial \bar{z}| \leqslant C_2 \omega(\delta)/\delta$, $z \in \boldsymbol{C}$. Пусть число k выбрано так, что $\delta \leqslant 2^{-k-1} < 2\delta$. Обозначая для произвольного квадрата $\Delta \in \{\tau_k\}$ через 2Δ квадрат с тем же центром и удвоенной стороной, нетрудно убедиться в справедливости следующих включений:

$$G_\delta \subset G_\delta^* = \bigcup_{\Delta \in \{\tau_k\}} 2\Delta, \quad K_\delta \subset K_\delta^* = K \cup G_\delta^* \subset K_{16\delta}. \tag{4}$$

Пусть $\alpha_1 \in (\alpha(\partial K), \alpha)$ произвольное. Непосредственно из (2) следует, что при всех достаточно больших k

$$m(k) < 2^{k\alpha_1} \leqslant \delta^{-1}. \tag{5}$$

Периметр квадрата 2Δ, $\Delta \in \{\tau_k\}$, не превосходит 32δ, и из (5) легко получаем оценку длины $\Gamma_\delta^* = \partial K_\delta^*$:

$$\operatorname{mes} \Gamma_\delta^* \leqslant 32\delta^{1-\alpha_1}. \tag{6}$$

Приближающие рациональные функции будем строить, исходя из формулы Коши — Грина:

$$f_\delta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta^*}\frac{f_\delta(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_\delta^*}\frac{\partial f_\delta}{\partial\bar\zeta}\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in K.$$

Разобьем Γ_δ^* точками $\zeta_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, N_1$, на дуги $\gamma_j = \overparen{\zeta_j^{(1)}\zeta_{j+1}^{(1)}}$ длиной $\delta/2$, за исключением, может быть, одной дуги в каждой компоненте связности Γ_δ^*, длина которой $< \delta/2$. В силу (6) $N_1 \leqslant C_3\delta^{-\alpha_1}$. При $\zeta \in \gamma_j$, $z \in K$ положим

$$r_{j,l}^{(1)}(\zeta, z) = \sum_{s=0}^{l-1}\frac{(\zeta_j^{(1)} - \zeta)^s}{(\zeta_j^{(1)} - z)^{s+1}}.$$

Из (4) следует, что при $\zeta \in \gamma_j$, $z \in K$

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - r_{j,l}^{(1)}(\zeta, z)\right| = \left|\frac{1}{\zeta - z}\left(\frac{\zeta_j^{(1)} - \zeta}{\zeta_j^{(1)} - z}\right)^l\right| \leqslant \frac{2^{-l}}{\delta}. \tag{7}$$

Построим теперь следующее разбиение множества G_δ^*. Перенумеруем квадраты $\Delta \in \{\tau_k\}$ и положим

$$D_1 = 2\Delta_1, \quad D_j = (2\Delta_j)\setminus\left(\bigcup_{n=1}^{j-1} D_n\right), \quad j = 2, 3, \ldots, N_2.$$

Очевидно, что:

1) $D_i \cap D_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
2) $\operatorname{diam} D_j \leqslant 16\delta$;
3) $N_2 \leqslant m(k) < \delta^{-\alpha_1}$.

Для произвольной фиксированной точки $\xi \in D_j$ из (1) и (4) следует существование точки $\zeta_j^{(2)} \in CK_\delta^*$ такой, что $|\xi - \zeta_j^{(2)}| \leqslant C_4\delta$. Полагая при $\zeta \in D_j$, $z \in K$

$$r_j^{(2)}(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta_j^{(2)} - z} + \frac{\zeta_j^{(2)} - \zeta}{(\zeta_j^{(2)} - z)^2},$$

получим

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - r_j^{(2)}(\zeta, z)\right| = \frac{|\zeta_j^{(2)} - \zeta|^2}{|(\zeta - z)(\zeta_j^{(2)} - z)^2|} \leqslant \frac{C_5\delta^2}{|\zeta - z|\,|\zeta_j^{(2)} - z|^2}. \tag{8}$$

Выбирая постоянную C_6 достаточно большой, неравенство (8) можно переписать в виде

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - r_j^{(2)}(\zeta, z)\right| \leqslant \begin{cases} C_7/|\zeta - z|, & |\zeta - z| \leqslant C_6\delta; \\ C_7\delta^2/|\zeta - z|^3, & |\zeta - z| > C_6\delta. \end{cases} \tag{9}$$

Пусть

$$r(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N_1}\int\limits_{\gamma_j} f_\delta(\zeta)\, r_{j,l}^{(1)}(\zeta, z)\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N_2}\iint\limits_{D_j}\frac{\partial f_\delta}{\partial\bar\zeta}\, r_j^{(2)}(\zeta, z)\,d\sigma_\zeta.$$

Тогда при $z \in K$

$$f_\delta(z) - r(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{N_1}\int_{\gamma_j} f_\delta(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - r_{j,l}^{(1)}(\zeta, z)\right]d\zeta -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N_2}\iint_{D_j}\frac{\partial f_\delta}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{1}{\zeta - z} - r_j^{(2)}(\zeta, z)\right]d\sigma_\zeta = I_1 + I_2.$$

Первый из этих интегралов легко оценивается с учетом (7):

$$|I_1| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_1}\int_{\gamma_j}|f_\delta(\zeta)|\left|\frac{1}{\zeta - z} - r_{j,l}^{(1)}(\zeta, z)\right||d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2\omega(d)}{2\pi}\sum_{j=1}^{N_1}\frac{2^{-l}}{\delta}\operatorname{mes}\gamma_j \leqslant C_8 2^{-l}\delta^{-\alpha_1}. \tag{10}$$

Для оценки I_2 воспользуемся (9):

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N_2}\iint_{D_j}\left|\frac{\partial f_\delta}{\partial\bar\zeta}\right|\left|\frac{1}{\zeta - z} - r_j^{(2)}(\zeta, z)\right|d\sigma_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_9\omega(\delta)}{\delta}\left[\iint_{|\zeta - z|\leqslant C_6\delta}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|} + \delta^2\iint_{|\zeta - z| > C_6\delta}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^3}\right] \leqslant C_{10}\omega(\delta). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$|f_\delta(z) - r(z)| \leqslant C_8 2^{-l}\delta^{-\alpha_1} + C_{10}\omega(\delta). \tag{12}$$

Полагая в (12) $l = [3\log_2 n]$, $\delta = n^{-1/\alpha}$, заключаем, что при $z \in K$

$$|f(z) - r(z)| \leqslant C_{11}(n^{\alpha_1/\alpha - 3} + \omega(n^{-1/\alpha})) \leqslant C_{12}\omega(n^{-1/\alpha}).$$

При этом порядок рациональной функции $r(z)$ не выше $C_{13}(\alpha_1)n^{\alpha_1/\alpha}\log_2 n = o(n)$ при $n \to \infty$. Теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Заметим сначала, что существует точка $z_0 \in \Gamma$ такая, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\alpha(\Gamma_\varepsilon) = \alpha(\Gamma), \tag{13}$$

где через Γ_ε обозначена часть дуги Γ, попадающая в круг $U(z_0, \varepsilon)$. Справедливость этого утверждения следует непосредственно из соотношения $\alpha(K_1 \cup K_2) = \max\{\alpha(K_1), \alpha(K_2)\}$, которое имеет место для произвольных множеств K_1 и K_2 комплексной плоскости. Мы можем, очевидно, считать, что z_0 является концевой точкой Γ. В противном случае достаточно рассмотреть в качестве Γ ту из двух дуг, на которые Γ разбивается точкой z_0, для которой (13) имеет место.

Для произвольных $\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma$ обозначим через $\Gamma(\zeta_1, \zeta_2)$ часть Γ, заключенную между точками ζ_1 и ζ_2. Из (13) следует, что для любой точки $\zeta \in \Gamma$, $\zeta \neq z_0$,

$$\alpha(\Gamma(z_0, \zeta)) = \alpha(\Gamma). \tag{14}$$

Пусть $\{\alpha^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ — произвольная монотонно возрастающая последовательность, сходящаяся к $\alpha(\Gamma)$. Через $z_1^{(0)}$ обозначим отличный от z_0 конец дуги Γ.

В силу (14) существуют подпоследовательность $\{k_n\}$ и номер N такие, что при $n \geqslant N$

$$m(k_n, \Gamma(z_0, z_1^{(0)})) > 2^{k_n^{\alpha(1)}}. \tag{15}$$

Положим, напр., $k^{(1)} = k_N$. Если точка $z_1^{(j-1)}$ выбрана, то точку $z_1^{(j)}, j = 1, 2, \ldots$, определим следующим образом. Пусть $\Delta \in \{\tau_{k^{(1)}}\}$ — произвольный квадрат, содержащий $z_1^{(j-1)}$. Через $\mathring{z}_1^{(j)}$ обозначим первую при движении от $z_1^{(j-1)}$ к z_0 точку пересечения дуги $\Gamma(z_0, z_1^{(j-1)})$ с границей квадрата 3Δ. Поскольку каждый из квадратов 3Δ, используемых при построении точек $z_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots$, содержит не более девяти квадратов семейства $\{\tau_{k^{(1)}}\}$, для их количества n справедлива оценка $n \geqslant (1/9)\, 2^{k^{(1)}\alpha^{(1)}} = p$. Для точки $z_1^{(j)}$ с индексом $j = 2[p/4] = p_1$ будем использовать также обозначение $z_2^{(0)}$; точки $z_1^{(j)}$ с большими индексами j использоваться не будут.

Аналогичную процедуру проделаем с дугой $\Gamma(z_0, z_2^{(0)})$ и $\alpha^{(2)}$, выбирая при этом $k^{(2)} > k^{(1)}$, и т. д. Полученная при этом последовательность точек $\{\{z_i^{(j)}\}_{j=1}^{p_i}\}_{i=1}^{\infty}$ является, очевидно, сходящейся. Не ограничивая общности, будем считать, что ее предел есть z_0.

Через $\zeta_i^{(j)}$ обозначим точку дуги $\Gamma(z_i^{(j-1)}, z_i^{(j)})$, равноудаленную от ее концов.

Функцию $f(z)$ определим на Γ следующим образом. Для всех $i = 1, 2, \ldots$ положим: при нечетных j

$$f\big|_{\Gamma(z_i^{(j-1)}, z_i^{(j)})} = 0;$$

при четных j

$$f(z) = \begin{cases} |z - z_i^{(j-1)}|^{\beta}, & z \in \Gamma(\zeta_i^{(j)}, z_i^{(j-1)}); \\ |z - z_i^{(j)}|^{\beta}, & z \in \Gamma(z_i^{(j)}, \zeta_i^{(j)}). \end{cases}$$

Пусть также $f(z_0) = 0$. Нетрудно установить, что $f(z) \in CH^{\beta}(\Gamma)$, где значение постоянной $C > 0$ зависит только от коэффициента квазиконформности дуги Γ.

Оценим $R_{p_i}(f, \Gamma)$ снизу. Заметим, что

$$R_{p_i}(f, \Gamma) \geqslant R_{p_i}(f, \Gamma_i), \tag{16}$$

где через Γ_i обозначена дуга $\Gamma(z_{i+1}^{(0)}, z_i^{(0)})$.

В основе дальнейших рассуждений лежит метод получения оценок снизу скорости равномерной рациональной аппроксимации, предложенный А. А. Гончаром [8].

Из квазиконформности Γ следует существование такого числа $c_1 \in (0, 1/4)$, что $2c_1 \operatorname{diam}\Gamma(z, \zeta) \leqslant |z - \zeta|$ при всех $z, \zeta \in \Gamma$ и $U(z_i^{(j)}, c_1\delta_i) \cap \Gamma_i^{(m)} = \varnothing$ при всех $m = \overline{1, p_i}$, отличных от j и $j+1$, где $\delta_i = 2^{-k^{(i)}}$, $\Gamma_i^{(m)} = \Gamma(z_i^{(m)}, z_i^{(m-1)})$.

Пусть $\varepsilon \in (0, c_1\delta_i]$ произвольное. Через $\Gamma_i^{(j)}(\varepsilon)$ обозначим связную поддугу дуги $\Gamma_i^{(j)}$, содержащую точку $\zeta_i^{(j)}$ и лежащую вне множества $U(z_i^{(j)}, \varepsilon) \cup \cup U(z_i^{(j-1)}, \varepsilon)$. Существование такой дуги при всех $j = \overline{1, p_i}$ следует из построения точек $z_i^{(j)}$, $\zeta_i^{(j)}$ и выбора c_1. Пусть также $\Gamma_i^{-}(\varepsilon) = \bigcup_m \Gamma_i^{(2m-1)}(\varepsilon)$, $\Gamma_i^{+}(\varepsilon) = \bigcup_m \Gamma_i^{(2m)}(\varepsilon)$. Пусть $r_i(z)$ — рациональная функция порядка, не выше p_i, для которой

$$\max_{z \in \Gamma_i} |f(z) - r_i(z)| = R_{p_i}(f, \Gamma_i) = R_i.$$

Так как при всех нечетных j $f|_{\Gamma_i^{(j)}}=0$, имеем

$$\max_{z\in\Gamma_i^-(\varepsilon)} |r_i(z)| \leqslant R_i. \tag{17}$$

С другой стороны, на $\Gamma_i^+(\varepsilon)$ $|f(z)|\geqslant\varepsilon^\beta$ и, следовательно, при $z\in\Gamma_i^+(\varepsilon)$

$$R_i \geqslant f(z)-|r_i(z)| \geqslant \varepsilon^\beta - |r_i(z)|. \tag{18}$$

Переходя в обеих частях (18) к максимуму по $z\in\Gamma_i^+(\varepsilon)$, получим

$$R_i \geqslant \varepsilon^\beta - \min_{z\in\Gamma_i^+(\varepsilon)} |r_i(z)|. \tag{19}$$

Пользуясь (17) и известными оценками роста рациональных функций [9], заключаем, что

$$\min_{z\in\Gamma_i^+(\varepsilon)} |r_i(z)| \leqslant R_i \exp(p_i/\gamma_i(\varepsilon)),$$

где $\gamma_i(\varepsilon)=\gamma(\Gamma_i^+(\varepsilon),\ \Gamma_i^-(\varepsilon))$ — емкость конденсатора $(\Gamma_i^+(\varepsilon),\ \Gamma_i^-(\varepsilon))$. Подставляя последнее неравенство в (19), получим

$$R_i \geqslant \varepsilon^\beta / (\exp(p_i/\gamma_i(\varepsilon))+1). \tag{20}$$

Для оценки $\gamma_i(\varepsilon)$ заметим сначала, что емкость квазиинвариантна при квазиконформных отображениях ([10], с. 23).

В силу квазиконформности дуги Γ существует K-квазиконформное отображение плоскости на себя, переводящее Γ в отрезок вещественной оси. При этом множества $\Gamma_i^+(\varepsilon)$ и $\Gamma_i^-(\varepsilon)$ перейдут в системы чередующихся отрезков L_i^+ и L_i^-. Пусть точки $x_i^{(j)}$ являются серединами этих отрезков, F_j обозначает часть конденсатора $(L_i^+,\ L_i^-)$, попавшую в полосу $P_j=\{w: x_i^{(j)}\leqslant \leqslant \mathrm{Re}\, w \leqslant x_i^{(j-1)}\}$, ν_j — емкость конденсатора F_j, рассматриваемого в P_j. Известно ([11], гл. 2), что

$$\gamma(L_i^+,\ L_i^-) \geqslant \sum_j \nu_j = \frac{1}{2\pi}\sum_j m_j, \tag{21}$$

где m_j — модуль семейства кривых (см., напр., [7], с. 399), соединяющих в P_j пластины l_j^+ и l_j^- конденсатора F_j. Если минимальная из длин отрезков l_j^+ и l_j^- равна a, а расстояние между ними $2b$, то

$$m_j \geqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{a+b}{b}.$$

С другой стороны, если рассмотреть отрезки, половинами которых являются l_j^+ и l_j^-, то модуль m_j' семейства кривых, соединяющих их в C, легко оценивается сверху (достаточно в определении модуля взять метрику

$$\rho(w)=\begin{cases}1/|w-\tilde{w}|, & e^{-\pi}b\leqslant|w-\tilde{w}|\leqslant e^{\pi}(2a+b);\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\tilde{w}$ — точка вещественной оси, равноудаленная от l_j^+ и l_j^-):

$$m_j' \leqslant \frac{2}{\pi}\ln\frac{2e^{2\pi}(a+b)}{b}.$$

Таким образом, $m_j \geqslant m_j' - (2/\pi)\ln(2e^{2\pi}) > m_j' - 5$, и (21) принимает вид

$$\gamma(L_i^+,\ L_i^-) \geqslant \frac{1}{2\pi}\sum_j (m_j'-5).$$

Пользуясь квазиинвариантностью емкости конденсатора и модуля семейства кривых, получим

$$\gamma_i(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{K}\gamma(L_i^+,\ L_i^-) \geqslant \frac{1}{2\pi K}\sum_j\left(\frac{1}{K}m_j''-5\right) \geqslant \frac{1}{2\pi K^2}\sum_j m_j'' - \frac{5}{2\pi K}p_i, \tag{22}$$

где m_j'' — модуль семейства кривых, соединяющих в C $\Gamma_i^{(j)}(\varepsilon)$ с $\Gamma_i^{(j+1)}(\varepsilon)$, $j=1, 2, \ldots$ Сравнивая это семейство с семейством кривых, разделяющих в кольце $U(z_i^{(j)},\ (1/2)\delta_i)\setminus U(z_i^{(j)}, \varepsilon)$ круговые граничные компоненты, убеждаемся, что

$$m_j'' \geqslant \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\delta_i}{2\varepsilon}.$$

Подставляя эту оценку в (22), при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$\gamma_i(\varepsilon) \geqslant p_i\left(\frac{1}{8\pi^2K^2}\ln\frac{\delta_i}{2\varepsilon} - \frac{5}{2\pi K}\right).$$

Полагая теперь $c^* = \min\{c_1,\ (1/2)\exp(-40\pi K)\}$, получим, что при $\varepsilon \in (0,\ c^*\delta_i]$

$$\gamma_i(\varepsilon) \geqslant \frac{p_i}{16\pi^2K^2}\ln\frac{\delta_i}{2\varepsilon}.$$

Последнее неравенство совместно с (20) дает

$$R_i \geqslant \varepsilon^\beta \Big/ \left\{\exp\left[c_2(K)\Big/\ln\frac{\delta_i}{2\varepsilon}\right]+1\right\}.$$

В частности, при $\varepsilon = c^*\delta_i$ получаем $R_i \geqslant c_3(K)\,\delta_i^\beta = c_3(K)\,2^{-k^{(i)}\beta} \geqslant c(K)\,p_i^{-\beta/\alpha^{(i)}}$, т. е. с учетом (16) $R_{p_i}(f,\ \Gamma) \geqslant c(K)\,p_i^{-\beta/\alpha^{(i)}}$. Теорема 2 доказана.

В заключение автор выражает признательность В. И. Белому за полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский В. В. Аппроксимационная характеристика классов функций на континуумах комплексной плоскости // Матем. сб. — 1984. — Т. 125. — № 1. — С. 70—87.
2. Кац Б. А. Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой // ДАН СССР. — 1982. — Т. 267. — № 4. — С. 789—792.
3. Кац Б. А. Задача о скачке и интеграл по неспрямляемой кривой // Изв. вузов. Математика. — 1987. — № 5. — С. 49—57.
4. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // УМН. — 1959. — Т. 14. — № 2. — С. 3—86.
5. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М. — Л.: Наука, 1964. — 438 с.
6. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973. — 342 с.
7. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977. — 511 с.
8. Гончар А. А. Оценка роста рациональных функций и некоторые их приложения // Матем. сб. — 1967. — Т. 72. — № 3. — С. 489—503.
9. Гончар А. А. О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями // Матем. сб. — 1969. — Т. 78. — № 4. — С. 640—654.
10. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. — М.: Мир, 1969. — 133 с.
11. Полиа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. — М.: Физматгиз, 1962. — 336 с.

г. Донецк

Поступила
10.07.1989