

ратора с локально независимыми сдвигами. — Докл. АН БССР, 1980, 24, № 10, 884—887.

8. Федосов Б. В., Шубин М. А. Индекс случайных эллиптических операторов. I. — Матем. сб., 1978, 106, № 1, 108—140.
 9. Дедик П. Е., Шубин М. А. Случайные псевдодифференциальные операторы и стабилизация решений параболических уравнений со случайными коэффициентами. — Матем. сб., 1980, 113, № 1, 41—62.

Поступила в редакцию
18.10.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. I. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 6

УДК 517.52

П. Освальд

**О СРЕДНИХ МАРЦИНКЕВИЧА ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ
В $H_p(p \leq 1)$**

Пусть R^N — N -мерное евклидово пространство ($N \geq 1$). Через $S' \equiv S'(R^N)$ обозначим пространство обобщенных функций медленного роста*. Классы Харди $H_p \equiv H_p(R^N)$ при $p \leq 1$ введены в работе [1]. Одно из эквивалентных определений, данных в [1], гласит: распределение $f(x) \in S'(R^N)$ принадлежит $H_p(R^N)$, если существует гармоническая в $R_+^{N+1} = \{(x, t) : x \in R^N, t \in R^1, t > 0\}$ функция, для которой $f(x) = \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t)$ (сходимость в S') и

$$u^+(x) = \sup_{t > 0} |u(x, t)| \in L_p \equiv L_p(R^N).$$

При этом $H_p(R^N)$ с квазинормой $\|f\|_{H_p(R^N)} = \|u^+\|_{L_p(R^N)}$ является квазибанаховым пространством. В настоящее время для изучения свойств классов $H_p(R^N)$ и различных их обобщений имеется ряд мощных методов (см. работы [1—6] и указанную в них литературу). Особенно удачными, на наш взгляд, оказались атомарные представления в классах Харди при $p \leq 1$. В настоящей заметке эта техника применяется к исследованию суммируемости интегралов Фурье методами типа Марцинкевича.

Пусть $|x|_\infty = \max |x_k|$; через $|x|$ обозначим обычную евклидову норму для $x = (x_1, \dots, x_N) \in R^N$. Тогда функции

$$M_\varepsilon f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{R^N} \exp(-\varepsilon |y|_\infty) \hat{f}(y) e^{ixy} dy \quad (1)$$

и

$$M_\varepsilon^\delta f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{R^N} (1 - (\varepsilon |y|_\infty)^2)_+^\delta \hat{f}(y) e^{ixy} dy \quad (2)$$

назовем соответственно средними Марцинкевича — Абеля и средними Марцинкевича — Рисса порядка $\delta > 0$ (всюду $\varepsilon > 0, N \geq 2$). В силу того что для $f(x) \in H_p(R^N), p \leq 1$, преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ является непрерывной функцией, удовлетворяющей неравенству [1]

$$|\hat{f}(y)| \leq C |y|^{N(1/p-1)} \|f\|_{H_p(R^N)}, \quad y \in R^N; \quad (3)$$

средние (1), (2) определены, как обычные функции, и являются непрерывными и ограниченными на всем R^N и для любого $\varepsilon > 0$. Отме-

* Не ограничивая общности, приводим все рассуждения для вещественнозначного случая.

тим, что для двойных рядов Фурье функций из $L_p(T^2)$, $p > 1$, соответствующие средние (2) при $\delta=1$ введены Марцинкевичем [7]. В настоящее время известен ряд исследований, посвященных свойствам сходимости и приближения средних типа (1), (2) для кратных рядов (интегралов) Фурье в классах C и L_p , $p \geq 1$ (см., например, [7—11]). Что касается классов Харди при $p \leq 1$, то нам известна лишь работа [12], в которой приводятся оценки приближения средними Марцинкевича — Чезаро степенного ряда для аналитических функций в полидиске. В частности, из результатов [12] вытекает H_p -сходимость соответствующих средних (2) для функций из класса Харди в полидиске, когда $\delta > N(1/p-1)$ и $p > (N-1)/N$.

Приведем наши результаты, связанные со сходимостью средних (1), (2) почти всюду и по квазинорме в $H_p(R^2)$. Пусть

$$M_* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |M_\varepsilon f(x)|, \quad M_*^\delta f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |M_\varepsilon^\delta f(x)|, \quad x \in R^2,$$

суть соответствующие максимальные функции.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in H_p(R^2)$, где $1/2 \leq p \leq 1$. Тогда для почти всех $x \in R^2$ имеет место $M_* f(x) < \infty$. Более точно,

$$\text{mes} \{x \in R^2 : M_* f(x) > t\} \leq C t^{-1/2} (\|f\|_{H_{1/2}(R^2)})^{1/2}, \quad t > 0, \quad (4)$$

при $p=1/2$ (слабая $(H_{1/2}, L_{1/2})$ -оценка) и

$$\|M_* f\|_{L_p(R^2)} \leq C_p \|f\|_{H_p(R^2)} \quad (5)$$

при $1/2 < p \leq 1$ (сильная (H_p, L_p) -оценка).

Утверждения (4), (5) окончательны в том смысле, что при $p < 1/2$ слабая (H_p, L_p) -оценка уже неверна, а при $p=1/2$ неверна сильная $(H_{1/2}, L_{1/2})$ -оценка. Из теоремы 1 вытекают следствия.

Следствие 1. Если $f(x) \in H_p(R^2)$, $1/2 \leq p \leq 1$, то для почти всех $x \in R^2$ существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon f(x) = f_0(x) \in L_p(R^2). \quad (6)$$

Следствие 2. Если $f(x) \in H_p(R^2)$, $1/2 < p \leq 1$, то справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - M_\varepsilon f\|_{H_p(R^2)} = 0. \quad (7)$$

С другой стороны, при $0 < p \leq 1/2$ существует функция $f(x) \in H_p(R^2)$, для которой $M_\varepsilon f(x) \notin H_p(R^2)$ при всех $\varepsilon > 0$. Точнее,

$$\|M_\varepsilon f\|_{L_p(R^2)} = \infty, \quad \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Теорема 2. Пусть $f(x) \in H_p(R^2)$. Если $\delta > \delta_0(p) = 2(1/p-1)$ и $1/2 < p \leq 1$, то

$$\|M_*^\delta f\|_{L_p(R^2)} \leq C_{p,\delta} \|f\|_{H_p(R^2)}. \quad (9)$$

При $1/2 < p < 1$, $\delta = \delta_0(p)$ и при $p=1/2$, $\delta > 2$ справедливо неравенство

$$\text{mes} \{x \in R^2 : M_*^\delta f(x) > t\} \leq C_{p,\delta} t^{-p} (\|f\|_{H_p(R^2)})^p, \quad t > 0. \quad (10)$$

Справедливы также соответствующие следствия о сходимости средних (2) почти всюду и по квазинорме в $H_p(R^2)$. Наиболее интересным отрицательным фактом является отсутствие слабой (H_p, L_p) -оценки (10) при $p=1/2$ и $\delta=2$.

Необходимо сравнить приведенные утверждения с результатами недавней работы [13], касающимися средних Рисса — Бохнера

$$S_{\varepsilon}^{\delta} f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{R^N} (1 - (\varepsilon |y|)^2)_{+}^{\delta} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy, \quad \varepsilon > 0, \quad (11)$$

для $f(x) \in H_p(R^N)$, $0 < p \leq 1$. В [13] доказано, что соответствующая максимальная функция $S_{*}^{\delta} f(x)$ допускает слабую (H_p, L_p) -оценку при $\delta = \delta'_0(p) = N(1/p - 1) + \frac{(N-1)}{2}$ и сильную (H_p, L_p) -оценку при $\delta > \delta'_0(p)$ ($0 < p < 1$; последний результат отмечен и в [14]). Таким образом, при $N=2$ и $p > 1/2$ критический показатель $\delta_0(p)$ для средних Марцинкевича — Рисса меньше $\delta'_0(p)$ для средних Рисса — Бохнера в то время, как при $p \leq 1/2$ средние (2) по сравнению со средними (11) резко портятся. Последнее замечание справедливо и относительно средних Абея — Пуассона

$$S_{\varepsilon} f(x) = (2\pi)^{-N} \int_{R^N} \exp(-\varepsilon |y|) \widehat{f}(y) e^{ixy} dy, \quad \varepsilon > 0,$$

и средних (1), так как в силу результатов [1]

$$S_{*} f(x) = u^{+}(x) \text{ для } f(x) \in H_p(R^N) \text{ и любых } 0 < p \leq 1.$$

Вероятно, это связано с недостаточной гладкостью мультипликаторов Фурье, порождающих средние (1), (2), вдоль линий $|y_1| = |y_2|$, то есть с наличием угловых точек у квадрата.

Ввиду ограниченности объема мы остановимся лишь на существенных моментах доказательства теоремы 1 и ее следствий, подробные же доказательства теоремы 2 предполагаем опубликовать в другой статье.

В доказательствах мы используем атомарные представления в $H_p(R^N)$, которые первоначально введены в [15] для $N=1$ и развиты затем в работах [16, 3, 4] и других. Пусть $0 < p \leq 1$ и $s \geq [N(\frac{1}{p} - 1)]$ — натуральное число. Функция $a(x) \in L_{\infty}(R^N)$ называется (p, ∞, s) -атомом (с центром в $x_0 \in R^N$), если для некоторого шара

$$I = \{x \in R^N : |x - x_0| < r\}, \quad r > 0,$$

выполнены соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{supp } a(x) \subset I, \\ \|a\|_{L_{\infty}(R^N)} \leq r^{-N/p}, \\ \int_{R^N} a x^{\alpha} dx = 0 \text{ для всех мультииндексов } \alpha \text{ с } |\alpha| \leq s. \end{array} \right. \quad (12)$$

Имеет место

Предложение 1. (см. [4]). Пусть $0 < p \leq 1$, $s \geq [N(1/p - 1)]$.
(а) Для любой $f(x) \in H_p(R^N)$ существует атомарное представление

$$f(x) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j a_j(x) \text{ (сходимость в } H_p(R^N)), \quad (13)$$

где $a_j(x)$ суть (p, ∞, s) -атомы, а λ_j — вещественные числа, причем $\sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^p < \infty$. Более того, имеет место

$$\left(\sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^p \right)^{1/p} \leq C_{p,s} \|f\|_{H_p(R^N)}. \quad (14)$$

(б) Если $f(x) \in S'(R^N)$ представлена в виде (13), причем сходимость ряда требуется лишь в S' , и $a_j(x)$, λ_j удовлетворяют указанным свойствам, то $f(x) \in H_p(R^N)$ и

$$\|f\|_{H_p(R^N)} \leq C_p \left(\sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^p \right)^{1/p}.$$

Предложение 1 позволяет стандартным путем вывести теорему 1 из следующего утверждения.

Лемма 1. Для любого $(p, \infty, 2)$ -атома $a(x)$, $p \geq 1/2$, имеем

$$\text{mes} \{x \in R^2 : M_* a(x) > t\} \leq C t^{-1/2}, \quad t > 0, \quad p = 1/2, \quad (15)$$

и

$$\|M_* a\|_{L_p(R^2)} \leq C_p, \quad 1/2 < p \leq 1. \quad (16)$$

В самом деле, пусть сначала $1/2 < p \leq 1$, и предположим, что (16) уже доказано. Для $f(x) \in H_p(R^2)$ найдем согласно предложению 1(а) атомарное представление (13) с $s=2$. В силу очевидного неравенства (вытекающего непосредственно из (1), (3) и (13))

$$M_* f(x) \leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j| M_* a_j(x), \quad x \in R^2, \quad (17)$$

получим с помощью (16) и (14)

$$\|M_* f\|_{L_p(R^2)}^p \leq \sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^p \|M_* a_j\|_{L_p(R^2)}^p \leq C_p \sum_{j \geq 1} |\lambda_j|^p \leq C_p \|f\|_{H_p(R^2)}^p,$$

что доказывает (5).

Оценка (4) для случая $p=1/2$ извлекается аналогичным путем из предложения 1(а), (15) и (17), если учесть

Предложение 2 (см. [13]). Пусть $0 < p < 1$ и $f_j(x)$ — измеримые функции, удовлетворяющие неравенству

$$\text{mes} \{x \in R^N : |f_j(x)| > t\} \leq C t^{-p}, \quad t > 0, \quad j \geq 1.$$

Тогда

$$\text{mes} \left\{ x \in R^N : \left| \sum_{j \geq 1} c_j f_j(x) \right| > t \right\} \leq \frac{2-p}{1-p} C t^{-p} \sum_{j \geq 1} |c_j|^p, \quad t > 0,$$

если

$$\sum_{j \geq 1} |c_j|^p < \infty.$$

Итак, докажем лемму 1. Пусть $N=2$. Простое вычисление убеждает, что тогда ядра средних (1) имеют вид

$$K_\varepsilon(x) \equiv \int_{R^2} \exp(-\varepsilon|y|_\infty) e^{-ixy} dy = 8\varepsilon^2 (\varepsilon^2 + (x_1 + x_2)^2)^{-1} (\varepsilon^2 + (x_1 - x_2)^2)^{-1}. \quad (18)$$

Для упрощения выкладок всюду обозначим:

$$u_1 \equiv x_1 + x_2, \quad u_2 \equiv x_1 - x_2, \quad v_1 = y_1 + y_2, \quad v_2 = y_1 - y_2$$

$$\text{и } f(x_1, x_2) \equiv f(u_1, u_2).$$

Тогда, в частности,

$$M_\varepsilon a(x) \equiv \overline{M_\varepsilon a}(u) = -1/2 (2\pi)^{-2} \int_{R^2} \bar{a}(v) \overline{K_\varepsilon}(u-v) dv. \quad (19)$$

Займемся оценкой величины $|\overline{M_\varepsilon a}(u)|$. Без ограничения общности считаем $x_0=0$, то есть $I=\{x \in R^2: |x| < r\}$. Легко заметить, что $2^{-1/p} \overline{a}(u)$ является $(p, \infty, 2)$ -атомом относительно новых координат u с $\text{supp } \overline{a}(u) \subset I' = \{u \in R^2: |u| < r' = \sqrt{2} \cdot r\}$. Фиксируем произвольное $u \in R^2$, и пусть $P_2(v)$ — полином Тейлора степени 2 для $\overline{K}_\varepsilon(u-v)$ относительно точки $v_0=0$. Тогда (см. (12))

$$|\overline{M_\varepsilon a}(u)| = \frac{1}{8/\pi^2} \left| \int_{I'} \overline{a}(v) (\overline{K}_\varepsilon(u-v) - P_2(v)) dv \right| \ll$$

$$\ll C \|a\|_{L_\infty(R^2)} \int_{I'} |\overline{K}_\varepsilon(u-v) - P_2(v)| dv \ll Cr^{-2/p} r^5 \sup_{|u-v| \leq \sqrt{2} \cdot r} |D^3 \overline{K}_\varepsilon(v)|,$$

где

$$|D^3 \overline{K}_\varepsilon(v)| \equiv \sum_{|\alpha|=3} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial v^\alpha} \overline{K}_\varepsilon(v) \right| \ll C \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon+|v_1|)^2(\varepsilon+|v_2|)^2} \left(\frac{1}{(\varepsilon+|v_1|)^3} + \frac{1}{(\varepsilon+|v_2|)^3} \right),$$

в чем можно убедиться путем непосредственного дифференцирования функции (18). Таким образом, если обозначим $u_- = \min(|u_1|, |u_2|)$ и $u_+ = |u|_\infty$, то при $\varepsilon > r$ будем иметь

$$|\overline{M_\varepsilon a}(u)| \ll Cr^{5-2/p} \varepsilon^2 (\varepsilon + u_+)^{-2} (\varepsilon + u_-)^{-5}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > r} \overline{M_\varepsilon a}(u) &\ll Cr^{5-2/p} \left(\sup_{r < \varepsilon \leq u_-} (\varepsilon^2 u_+^{-2} u_-^{-5}) + \sup_{\varepsilon > \max(r, u_-)} \varepsilon^{-3} (\varepsilon + u_+)^{-2} \right) \ll \\ &\ll Cr^{5-2/p} \left\{ \begin{array}{l} u_+^{-2} u_-^{-3}, \quad u_- > r \\ (u_+ + r)^{-2} r^{-3}, \quad u_- \leq r \end{array} \right\} \ll Cr^{5-2/p} (r + u_+)^{-2} (r + u_-)^{-3}. \quad (20) \end{aligned}$$

Если $\varepsilon < r$, то различаем два случая. При $u_- \geq 3r$ получаем, как выше,

$$|\overline{M_\varepsilon a}(u)| \ll Cr^{5-2/p} \varepsilon^2 u_+^{-2} u_-^{-5} \ll Cr^{5-2/p} u_+^{-2} u_-^{-3},$$

а при $u_- < 3r$ рассуждаем так (см. (12), (18), (19)):

$$\begin{aligned} |\overline{M_\varepsilon a}(u)| &\ll C \|a\|_{L_\infty(R^2)} \int_{I'} |\overline{K}_\varepsilon(u-v)| dv \ll \\ &\ll Cr^{-2/p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon dt}{\varepsilon^2 + t^2} \int_{u_+ - \sqrt{2} \cdot r}^{u_+ + \sqrt{2} \cdot r} \frac{\varepsilon dt}{\varepsilon^2 + t^2} \ll Cr^{-2/p+2} (r + u_+)^{-2}, \quad \varepsilon < r. \end{aligned}$$

Из двух этих оценок вытекает

$$\sup_{\varepsilon < r} |\overline{M_\varepsilon a}(u)| \ll Cr^{5-2/p} (r + u_+)^{-2} (r + u_-)^{-3}, \quad (21)$$

то есть в силу (20), (21) установлено неравенство

$$\overline{M_\varepsilon a}(u) \ll Cr^{5-2/p} (r + u_+)^{-2} (r + u_-)^{-3}, \quad u \in R^2. \quad (22)$$

Из (22) путем непосредственного подсчета выводим справедливость соотношений (15) при $p=1/2$ и (16) при $1/2 < p \leq 1$. Детали опускаем. Лемма 1, а вместе с ней теорема 1 доказаны.

Следствие 1, касающееся сходимости почти всюду средних (1), получим стандартным путем из наличия слабой (или даже сильной)

(H_p, L_p) -оценки для $M_*f(x)$ при $1/2 \leq p \leq 1$, если учесть равномерную сходимость средних $M_\varepsilon f(x)$ к $f(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, когда $f(x)$ принадлежит классу $C_0^\infty(R^2)$ гладких финитных функций, и плотность множества $H_p(R^2) \cap C_0^\infty(R^2)$ в $H_p(R^2)$.

Положительное утверждение следствия 2 вытекает из неравенства (5) следующим образом. Пусть $f(x) \in H_p(R^2)$, $p > 1/2$; тогда согласно (5) имеем

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|M_\varepsilon f\|_{L_p(R^2)} \leq C_p \|f\|_{H_p(R^2)}.$$

Но это соотношение остается в силе также с заменой L_p -квазинормы H_p -квазинормой. В самом деле, используя оригинальное определение классов $H_p(R^N)$ с помощью свойств семейств сопряженных гармонических функций (или эквивалентным образом с помощью преобразований Рисса для $f(x)$; см. [1] или [17]) и перестановочность M_ε и преобразований Рисса R_j , получим:

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \|M_\varepsilon f\|_{H_p(R^2)} &\leq C_p \sup_{\varepsilon > 0} \{ \|M_\varepsilon f\|_{L_p(R^2)} + \|R_1 M_\varepsilon f\|_{L_p(R^2)} + \|R_2 M_\varepsilon f\|_{L_p(R^2)} \} \leq \\ &\leq C_p \{ \|f\|_{H_p(R^2)} + \|R_1 f\|_{H_p(R^2)} + \|R_2 f\|_{H_p(R^2)} \} \leq C_p \|f\|_{H_p(R^2)} \end{aligned}$$

для всех $f(x) \in C_0^\infty(R^2) \cap H_p(R^2)$, $1/2 < p \leq 1$. Для произвольных $f(x) \in H_p(R^2)$ путем предельного перехода устанавливается эта же оценка. Но отсюда непосредственно следует (7).

Для доказательства отрицательных утверждений положим

$$a_s(x) \equiv \bar{a}_s(u_1, u_2) = c_s \begin{cases} 0, & |u|_\infty \geq 1, \\ P_{s+1}(u_1), & |u|_\infty < 1, \end{cases} \quad (23)$$

где $P_{s+1}(t)$ — полином Лежандра порядка $s+1$ и $s \geq 0$. Ясно, что при подходящем выборе постоянной $c_s > 0$ функция $a_s(x)$ является (p, ∞, s) -атомом в R^2 с $x_0 = 0$, $r = 1$ и $p > \frac{2}{(s+3)}$. Согласно (18), (19) имеем

$$\overline{M_\varepsilon a_s}(u) = C_s \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon P_{s+1}(v_1) dv_1}{\varepsilon^2 + (u_1 - v_1)^2} \int_{-1}^1 \frac{2\varepsilon dv_2}{\varepsilon^2 + (u_2 - v_2)^2} \equiv C_s A(u_1) B(u_2)$$

с некоторой постоянной $C_s \neq 0$. Но

$$B(u_2) = \arctan \frac{u_2 + 1}{\varepsilon} - \arctan \frac{u_2 - 1}{\varepsilon} \asymp \varepsilon u_2^{-2}, \quad |u_2| \geq \max(\varepsilon, \sqrt{2})$$

(здесь \asymp означает порядковое равенство). Для порядковой оценки $A(u_1)$ применяем формулу Родрига

$$P_{s+1}(t) = ((-2)^{s+1} (s+1)!)^{-1} \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} (1-t^2)^{s+1}, \quad -1 \leq t \leq 1;$$

разложение

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (u_1 - t)^2} = \frac{\varepsilon}{(u_1 - t)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\varepsilon}{u_1 - t} \right)^{2k}, \quad -1 \leq t \leq 1,$$

$$|u_1| \geq 2 \max(\varepsilon, \sqrt{2}),$$

и интегрирование по частям:

$$A(u_1) = \frac{1}{2^{s+1}(s+1)!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{s+1} \frac{d^{s+1}}{dt^{s+1}} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (u_1 - t)^2} \right) dt \asymp \\ \asymp \int_{-1}^1 (1-t^2)^{s+1} \varepsilon (u_1 - t)^{-s-3} dt \asymp u_1^{-s-3}, \quad |u_1| \geq C_{\varepsilon, s}.$$

Итак, доказана

Лемма 2. Для функций $a_s(x)$, определенных равенством (23), имеет место порядковое соотношение (с постоянными, зависящими от s и ε):

$$\overline{M_\varepsilon a_s}(u) \asymp \varepsilon^2 u_1^{-s-3} u_2^{-2}, \quad |u_1|, |u_2| \geq C_{\varepsilon, s}, \quad \varepsilon > 0, \quad s \geq 0. \quad (24)$$

Заметим также, что из (24) непосредственно следует, что

$$\text{mes}\{x \in R^2 : |M_\varepsilon a_s(x)| > t\} \geq C_{\varepsilon, s} t^{-1/2}, \quad 0 < t \leq t_{\varepsilon, s}. \quad (25)$$

В силу предложения 1(б) функция $a_s(x)$, являясь (p, ∞, s) -атомом, принадлежит $H_p(R^2)$ для всех $p > \frac{2}{(s+3)}$. Таким образом, выбрав натуральное число $s \geq 2$ достаточно большим, получим с помощью (24), (25) все утверждения о неусиливаемости оценок теоремы 1 (леммы 1) и следствия 2 (см. (8)).

Замечание 1. Доказательство теоремы 2 проводится по этой же схеме. Основная техническая сложность состоит в точном вычислении асимптотики ядра $K_\varepsilon^\delta(x)$ средних (2) и его производных. Приведем без доказательства оценки, которые достаточны для получения теоремы 2. При $N=2$ ядро $\overline{K}_\varepsilon^\delta(u)$ можно писать в виде

$$\overline{K}_\varepsilon^\delta(u) = \overline{G}_\varepsilon^\delta(u) + \overline{H}_\varepsilon^\delta(u),$$

причем для $|u_1| \geq |u_2| \geq 0$ имеем

$$\begin{cases} |\overline{G}_\varepsilon^\delta(u)| \leq C_\delta \varepsilon^\delta (\varepsilon + |u_1|)^{-1} (\varepsilon + |u_1| - |u_2|)^{-1} (\varepsilon + |u_2|)^{-\delta}, \\ |D^3 \overline{G}_\varepsilon^\delta(u)| \leq C_\delta \varepsilon^{\delta-3} (\varepsilon + |u_1|)^{-1} (\varepsilon + |u_1| - |u_2|)^{-1} (\varepsilon + |u_2|)^{-\delta}, \\ \varepsilon, \delta > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\overline{H}_\varepsilon^\delta(u)| \leq C_\delta \varepsilon^2 (\varepsilon + |u_1|)^{-2} (\varepsilon + |u_2|)^{-2}, \\ |D^3 \overline{H}_\varepsilon^\delta(u)| \leq C_\delta \varepsilon^2 (\varepsilon + |u_1|)^{-2} (\varepsilon + |u_2|)^{-5}. \end{cases}$$

Замечание 2. Имеют место все соотношения, аналогичные (4)—(7) и (9), (10), для случая суммирования средними Марцинкевича—Абеля и Марцинкевича—Рисса рядов Фурье от функций $f(x) \in H_p(T^2)$, $0 < p \leq 1$. Для этого следует использовать формулу суммирования Пуассона [18] и соответствующие атомарные представления для $H_p(T^2)$, что позволит получить оценки для случая T^2 из утверждений, сформулированных выше для непериодического случая R^2 .

Обобщения для случая $N > 2$ нам представляются также реальными, однако при этом возникают определенные технические сложности в получении точных оценок для ядер и их производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fefferman C., Stein E. M. H^p spaces of several variables. — Acta math., 1972, 129, N 3—4, 137—193.

2. Calderon A. P., Torchinsky A. Parabolic maximal functions associated with a distribution. — Adv. Math., 1975, 16, 1—64; 1977, 11, N 24, 101—171.
3. Coifman R. R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. — Bull. Amer. Math. Soc., 1977, 83, N 4, 569—645.
4. Taibleson M. H., Weiss G. The molecular characterization of certain Hardy spaces. — Roy. Soc. de France, Asterisque, 1980, 77, 68—149.
5. Peetre J. H^p spaces. — In: Lecture notes. Lund, 1974.
6. Triebel H. Spaces of Besov—Hardy—Sobolev type. Teubner-Texte Math. Leipzig, 1978.
7. Marcinkiewicz J. Sur une methode remarquable de sommation des series doubles de Fourier. — Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1939, 8, N 2, 149—160.
8. Жижиашвили Л. В. О суммировании двойных рядов Фурье. — Сиб. матем. ж., 1967, 8, № 3, 548—564.
9. Taberski R. Abel summability of double Fourier series. — Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1970, 18, N 6, 307—314.
10. Тиман М. Ф., Пономаренко В. Г. О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1975, 9, 59—67.
11. Тригуб М. Р. Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича. — Докл. АН СССР, 1980, 251, № 1, 34—36.
12. Валашек Я. О приближении в многомерных пространствах Харди H^p , $0 < p \leq 1$. — Сообщ. АН ГрузССР, 1982, 105, № 1, 21—24.
13. Stein E. M., Taibleson M. H., Weiss G. Weak type estimates for maximal operators on certain H^p -classes. — Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, 1981, 1, 81—97.
14. Sjölin P. Convolution with oscillating kernels on H^p spaces. — J. London Math. Soc. Ser. 2, 1981, 23, N 3, 442—454.
15. Coifman R. R. A real characterization of H^p . — Stud. math., 1974, 51, N 3, 269—274.
16. Latter R. H. A characterization of H^p (R^n) in terms of atoms. — Stud. math., 1978, 62, N 1, 93—101.
17. Miyachi A. On some Fourier multipliers for H^p (R^n). — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A, 1980, 27, N 1, 157—179.
18. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М., 1974.

Поступила в редакцию
14.06.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1983, № 6

УДК 517.5

П. Л. Ульянов

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Введение. В связи с исследованиями по теории рядов возникает следующая общая задача. Пусть дано некоторое свойство A , характеризующее поведение последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$, и пусть на множестве F определена система функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$. Положим:

$$E = \left\{ t : t \in F, 0 = \sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m(t) \right\},$$

то есть E является множеством всех точек, в которых ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m(t), \quad t \in F,$$

сходится к нулю. Каковы свойства множества E и их взаимосвязь с $\{a_m\}$ и $\{f_m\}$?