А. Э. Гутерман, Д. К. Кудрявцев, О. В. Маркова, Длина прямой суммы неассоциативных алгебр, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2019, том 482, 73–86

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 482, 2019 г.

А. Э. Гутерман, Д. К. Кудрявцев, О. В. Маркова

ДЛИНА ПРЯМОЙ СУММЫ НЕАССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

§1. Основные понятия

Пусть $\mathcal{A}$ – конечномерная, не обязательно ассоциативная алгебра с единицей, $\mathcal{S} = \{a_1, \dots, a_k\}$ – ее конечное порождающее множество. Каждое произведение конечного числа элементов $\mathcal{S}$ назовем *словом* в алфавите $\mathcal{S}$. *Длиной* слова назовем число букв соответствующего произведения. Единицу 1 алгебры будем считать словом *нулевой длины* в алфавите $\mathcal{S}$. Заметим, что в общем случае неассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ различные расстановки скобок в слове задают различные слова.

Множество всех слов в алфавите $\mathcal{S}$ длины не более i обозначим через $\mathcal{S}^i$, $i \geqslant 0$.

Заметим, что по аналогии с ассоциативным случаем неравенство $m \leqslant n$ влечет включение $\mathcal{S}^m \subseteq \mathcal{S}^n$.

Через $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$ обозначим линейную оболочку множества $\mathcal{S}^i$ над полем $\mathbb{F}$. Будем писать $\mathcal{L}_i$ вместо $\mathcal{L}_i(\mathcal{S})$, если это не вызовет недоразумения. Отметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1 \rangle = \mathbb{F}$ для любого множества $\mathcal{S}$. Слово $v \in \mathcal{S}^t$ называется *приводимым* (или *сократимым*) над $\mathcal{S}$, если существует номер $i < t$ такой, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$, т.е. v представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины, в противном случае назовем его *неприводимым над* $\mathcal{S}$.

Обозначим $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ и заметим, что множество $\mathcal{S}$ является порождающим для $\mathcal{A}$ в том и только том случае, если $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$.

Определение 1.1. *Длиной порождающего множества* $\mathcal{S}$ конечномерной алгебры $\mathcal{A}$ называется $l(\mathcal{S}) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : \mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Определение 1.2. *Длина алгебры* $\mathcal{A}$ – это максимум длин всех ее порождающих множеств: $l(\mathcal{A}) = \max\{l(\mathcal{S}) : \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}\}$.

Ключевые слова: неассоциативная алгебра, длина алгебры, прямая сумма.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 17-01-00895, работа второго автора поддержана грантом фонда "БАЗИС"18-2-6-149-1.

Проблема вычисления длины ассоциативной алгебры восходит к работам [17, 18] для случая алгебры 3×3 матриц в задачах механики сплошной среды.

Вопрос оценки длины является не только глубокой и интересной открытой задачей, относящейся к чистой алгебре и остающейся открытой последние полвека, но и актуален для целого ряда прикладных вопросов, см, например, [1, 2] или [3, 9]. Обычно функция длины служит мерой сложности проверки тех или иных алгебраических условий. Все необходимые факты, определения и обозначения мы приведем ниже.

Задача вычисления длины полной матричной алгебры $M_n(\mathbb{F})$ как функции размера матриц была поставлена в работе [15] и является открытой до сих пор. Известные на сегодняшний день верхние оценки длины полной матричной алгебры являются нелинейными функциями от n. Первая такая оценка была получена в 1984 году в работе Паза [15].

Теорема 1.3 ([15, Теорема 1, замечание 1])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *обозначает произвольное поле. Тогда*

$$l(M_n(\mathbb{F})) \leqslant \left\lceil \frac{n^2+2}{3} \right\rceil,$$

где $\lceil\, . \,\rceil$ *обозначает наименьшую целую часть числа.*

Улучшение данной оценки было получено Папаченой в [14]. В матричном случае этот результат дает оценку порядка $O(n^{3/2})$.

Недавно, в случае матричной алгебры, результат был улучшен Шитовым в работе [16], где им была доказана верхняя граница $2n \log_2 n + 4n$, однако она тоже далека от гипотетической оценки $2n - 2$, предложенной Пазом в [15]. В ряде работ оценка Паза подтверждена для отдельных систем образующих, см. работу [6], где рассмотрена система образующих, содержащая циклическую матрицу, и ее библиографию.

В то же время, длина различных матричных подалгебр, равно как и других конечнопорожденных алгебр, продолжает активно изучаться и привлекать внимание исследователей, см. [7–10]. В частности, в работах [7, 12, 13] изучены различные алгебраические свойства длины, а именно, получены оценки на длину прямой суммы алгебр и фактор-алгебры, показано, что длина не является монотонной при переходе к подалгебрам, причем подобные примеры строятся уже для матричной алгебры, изучено поведение длины при присоединении к алгебре единицы.

В недавней работе [4] впервые введена и исследована длина неассоциативных алгебр. В работе [5] найдена точная верхняя граница длины произвольной неассоциативной алгебры и изучены некоторые ее свойства.

Основной целью настоящей работы является начало исследования алгебраических свойств длины неассоциативных алгебр, по аналогии с [7, 13]. В настоящей работе мы получаем нижние и верхние оценки длины прямой суммы неассоциативных алгебр и устанавливаем их точность. Следует отметить, что если нижние оценки длины прямой суммы в ассоциативном и неассоциативном случаях оказались одинаковыми, то верхняя оценка в неассоциативном случае значительно превосходит свой ассоциативный аналог.

Настоящая работа построена следующим образом. В §2 приводятся основные сведения о длине неассоциативных алгебр, в основном доказанные в работе [5], которые будут использоваться в дальнейшем. В §3 выводятся нижняя и верхняя оценки длины прямой суммы, получены некоторые вспомогательные результаты. §4 состоит из различных примеров, демонстрирующих достижимость полученных оценок.

§2. Вспомогательные результаты

Приведенные ниже результаты содержатся в работе [5]. Приведем ниже краткое доказательство соответствующих технических лемм для полноты изложения.

Лемма 2.1 ([5, лемма 2.11]). *Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра, $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_1$ – ее порождающие множества, для которых справедливо включение $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}_0) \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1)$. Тогда $l(\mathcal{S}_0) \geqslant l(\mathcal{S}_1)$.*

Доказательство. Докажем, что если $\mathcal{S}_0'$ и $\mathcal{S}_1'$ – произвольные конечные подмножества алгебры $\mathcal{A}$ (не обязательно порождающие), удовлетворяющие соотношению $\mathcal{L}_1(\mathcal{S}_0') \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1')$, то $\mathcal{L}_k(\mathcal{S}_0') \subseteq \mathcal{L}_k(\mathcal{S}_1')$ для всех натуральных k. Для доказательства воспользуемся индукцией по k.

База: для $k = 1$ утверждение выполнено по условию.

Шаг: по определению, для каждого подмножества $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ выполняется $\mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \langle \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \cdot \mathcal{L}_{k-i}(\mathcal{S}) \rangle$. Предположим, что для всех $k = 1, \ldots, n-1$ выполнено условие $\mathcal{L}_k(\mathcal{S}_0') \subseteq \mathcal{L}_k(\mathcal{S}_1')$. Тогда

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{S}_0') = \Big\langle \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_i(\mathcal{S}_0') \cdot \mathcal{L}_{k-i}(\mathcal{S}_0') \Big\rangle \subseteq \Big\langle \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{L}_i(\mathcal{S}_1') \cdot \mathcal{L}_{k-i}(\mathcal{S}_1') \Big\rangle = \mathcal{L}_n(\mathcal{S}_1').$$

Используя этот результат для $\mathcal{S}_0' = \mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1' = \mathcal{S}_1$, получим

$$\mathcal{L}_{l(\mathcal{S}_1)-1}(\mathcal{S}_0) \subset \mathcal{L}_{l(\mathcal{S}_1)-1}(\mathcal{S}_1) \neq \mathcal{A}.$$

Следовательно, $l(\mathcal{S}_0) \geqslant l(\mathcal{S}_1)$. □

Лемма 2.2 ([5, предложение 2.3])**.** *Рассмотрим конечное подмножество* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ *и натуральное число* $n \geqslant 1$*. Если*

$$\dim \mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{S}) = \cdots = \dim \mathcal{L}_{2n}(\mathcal{S}),$$

то для всех $t \in \mathbb{N}$ *выполняется равенство* $\dim \mathcal{L}_n(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{L}_{n+t}(\mathcal{S})$.

Доказательство. Для доказательства используем индукцию по параметру t. Базой индукции является случай $t \leqslant n$, в котором утверждение верно по условию. Предположим, что для всех значений $t \leqslant n+k$, $k \geqslant 0$ утверждение выполнено. Докажем, что оно выполняется для $t = n+k+1$.

Если s – слово длины $n+k+1$, то оно представимо в виде произведения двух слов строго меньшей и ненулевой длины: $s = (s_1)(s_2)$. Убедимся, что оба этих слова являются элементами $\mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Действительно, если длина слова не превосходит n, то оно является элементом $\mathcal{L}_n(\mathcal{S})$ по определению множества $\mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Если же длина слова больше n, но строго меньше $n+k+1$, то включение следует из предположения индукции.

В любом случае, $s_1, s_2 \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$. Тогда

$$s \in \mathcal{L}_n(\mathcal{S}) \cdot \mathcal{L}_n(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_{2n}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_n(\mathcal{S}).$$

Из последней цепочки равенств и включений следует, что $\mathcal{L}_{n+k+1}(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_n(\mathcal{S})$, поскольку линейная оболочка пространства $\mathcal{L}_{n+k+1}(\mathcal{S})$ порождена теми словами, длина которых не превосходит $n+k+1$. Это завершает индукцию. □

Приведем теперь основной результат работы [5], а именно верхнюю оценку длины произвольной неассоциативной алгебры.

Теорема 2.3 ([5, теорема 2.7])**.** *Пусть* $\mathcal{A}$ *является алгеброй над произвольным полем* $\mathbb{F}$*, имеющей размерность* $\dim \mathcal{A} = n$ *и такой, что* $\mathbb{F} \subsetneq \mathcal{A}$*. Тогда* $l(\mathcal{A}) \leqslant 2^{n-2}$.

§3. Оценки длины

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – конечномерные алгебры с единицами над полем $\mathbb{F}$, $\mathcal{S}$ – произвольная порождающая система алгебры $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Тогда $\mathcal{S}_1$ ($\mathcal{S}_2$) – проекция $\mathcal{S}$ на $\mathcal{A}_1$ ($\mathcal{A}_2$) – является порождающей системой $\mathcal{A}_1$ ($\mathcal{A}_2$) и $l(\mathcal{S}) \geqslant l(\mathcal{S}_1)$ ($l(\mathcal{S}) \geqslant l(\mathcal{S}_2)$).*

Доказательство. Проекция $\mathcal{L}_n(\mathcal{S})$ на $\mathcal{A}_1$ совпадает с $\mathcal{L}_n(\mathcal{S}_1)$ в силу линейности, поэтому, поскольку $\mathcal{L}_{l(\mathcal{S})}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$, мы имеем $\mathcal{L}_{l(\mathcal{S})}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{A}_1$. Для $\mathcal{A}_2$ утверждение доказывается аналогично. $\square$

Определение 3.2. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – алгебры над полем $\mathbb{F}$, $\mathcal{S}$ – произвольная порождающая система алгебры $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ и пусть $\mathcal{S} = \{(c_1, d_1), \dots, (c_k, d_k)\}$, где $c_i \in \mathcal{A}_1$, $d_i \in \mathcal{A}_2$.

(1) Для пары $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ назовем a_1 – *левой половиной*, a_2 – *правой половиной*.

(2) $\mathcal{S}_1 = \{c_1, \dots, c_k\}$ называется *левой половиной* $\mathcal{S}$. $\mathcal{S}_2 = \{d_1, \dots, d_k\}$ называется *правой половиной* $\mathcal{S}$.

(3) Для $a_1 = c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_r}$ (с определенным порядком умножения) $a_2 = d_{i_1} \cdot \ldots \cdot d_{i_r}$ (с тем же порядком умножения) называется *правым дополнением*. Аналогично, для $a_2 = d_{i_1} \cdot \ldots \cdot d_{i_r}$ (с определенным порядком умножения) $a_1 = c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_r}$ (с тем же порядком умножения) называется *левым дополнением*. Пара из элемента и подходящего дополнения $(a_1, a_2) \in \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ называется *пополнением* этого элемента.

(4) Для суммы слов из $\mathcal{S}_1$ (из $\mathcal{S}_2$) *левым дополнением* (*правым дополнением*) называется сумма дополнений слагаемых. *Пополнением* суммы слов называется сумма пополнений слагаемых.

Следующая лемма переносит на неассоциативный случай результат [7, теорема 4.1].

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – алгебры с единицами над полем $\mathbb{F}$ с размерностями $d_1, d_2 > 1$ и длинами l_1, l_2 соответственно, $\mathcal{S}$ – произвольная порождающая система алгебры $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Если w_1 и w_2 – слова в $\mathcal{S}$, такие что длина w_1 больше l_1, а длина w_2 больше l_2 (или наоборот), то $w_1 \cdot w_2$ не является неприводимым словом.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S} = \{(c_1, d_1), \dots, (c_k, d_k)\}$, где $c_i \in \mathcal{A}_1$, $d_i \in \mathcal{A}_2$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда $w_1 = (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_p}, d_{i_1} \cdot \ldots \cdot d_{i_p})$ и $w_2 = (c_{i_{p+1}} \cdot \ldots \cdot c_{i_{p+q}}, d_{i_{p+1}} \cdot \ldots \cdot d_{i_{p+q}})$, где p – длина w_1, q – длина w_2.

Отметим, что порядок умножения внутри самих слов может быть произвольным, но должен быть одинаковым в обеих половинках. Далее будем рассматривать случай $p > l_1, q > l_2$; случай $p > l_2, q > l_1$ рассматривается аналогично.

Обозначим левую и правую половины $\mathcal{S}$ через $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$. По лемме 3.1, $\mathcal{S}_1$ порождает $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{S}_2$ порождает $\mathcal{A}_2$, причем $l(\mathcal{S}_1) \leqslant l(\mathcal{A}_1) = l_1$ и $l(\mathcal{S}_2) \leqslant l(\mathcal{A}_2) = l_2$. Так как левая половина w_1, $c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_p}$, имеет длину больше l_1, она представляется каким-то образом как сумма Σ_1 слов из $\mathcal{S}_1$ длины не более l_1. Рассмотрим пополнение (Σ_1, Σ_2). Получим $w_1 - (\Sigma_1, \Sigma_2) = (0, b_2)$, где $b_2 \in \mathcal{A}_2$. Аналогично, правая половина w_2, $d_{i_{p+1}} \cdot \ldots \cdot d_{i_{p+q}}$, представляется как сумма Σ_2' слов из $\mathcal{S}_2$ длины не более l_2, и для пополнения этой суммы (Σ_1', Σ_2') верно $w_2 - (\Sigma_1', \Sigma_2') = (b_1, 0)$, где $b_1 \in \mathcal{A}_1$.

Таким образом,

$$(w_1 - (\Sigma_1, \Sigma_2)) \cdot (w_2 - (\Sigma_1', \Sigma_2')) = (0, b_2) \cdot (b_1, 0) = (0, 0),$$

т.е.

$$w_1 \cdot w_2 = w_1 \cdot (\Sigma_1', \Sigma_2') + (\Sigma_1, \Sigma_2) \cdot w_2 - (\Sigma_1, \Sigma_2) \cdot (\Sigma_1', \Sigma_2').$$

Каждое слагаемое в левой части является суммой слов длины строго меньше $p + q$, так как длина слагаемых входящих в суммы (Σ_1, Σ_2) и (Σ_1', Σ_2') строго меньше p и q соответственно. Таким образом, $w_1 \cdot w_2$ не является неприводимым. $\square$

Обозначение 3.4. Пусть v – неассоциативное слово длины больше 1. Тогда $X(v)$ обозначает первый множитель в последнем умножении, имеющемся в слове v, а $Y(v)$ – второй множитель. Если v – слово длины 1 или 0, то зафиксируем $X(v) = v$ и $Y(v) = 1_{\mathbb{F}}$. Для множества слов $V = \{v_1, \ldots, v_r\}$ под $X(V)$ и $Y(V)$ будем понимать наборы $\{X(v_1), \ldots, X(v_r)\}$ и $\{Y(v_1), \ldots, Y(v_r)\}$ соответственно. Через $R_0(v)$ обозначим $\{v\}$ и индуктивно определим $R_n(v)$ как объединение множеств $X(R_{n-1}(v)) \cup Y(R_{n-1}(v))$. Наконец, обозначим через $l_n(v)$ максимальную длину слова $w \in R_n(v)$. В частности, $l_0(v)$ – это число символов слова v.

Лемма 3.5. *Если для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно $l_n(v) > 1$, то $l_{n+1}(v) < l_n(v)$.*

Доказательство. Пусть $v_n \in R_n(v)$ – слово, на котором достигается длина $l_n(v)$, и $v_{n+1} \in R_{n+1}(v)$ – слово, на котором достигается длина $l_{n+1}(v)$. Так как $l_n(v) > 1$, длины $X(v_n)$ и $Y(v_n)$ не меньше 1. Так как

$X(v_n), Y(v_n) \in R_{n+1}(v)$, это означает что $l_{n+1}(v)$ также не меньше 1. Если $l_{v+1}(v) = 1$, утверждение доказано. В противном случае, существует слово $v'_n \in R_n(v)$, такое что $v_{n+1} = X(v'_n)$ или $v_{n+1} = Y(v'_n)$. Пусть, без ограничения общности, имеет место первый случай. Поскольку длина $X(v'_n)$ больше 1, то длина $Y(v'_n)$ не меньше 1, т.е. длина v'_n больше длины $X(v'_n)$, т.е. больше, чем $l(v_{n+1})$. С другой стороны, длина v'_n не превосходит $l_n(v)$. Значит, $l_{n+1}(v) < l_n(v)$. □

Лемма 3.6. *Для* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *верно неравенство* $2l_{n+1}(v) \geqslant l_n(v)$

Доказательство. Рассмотрим v_n – слово из $R_n(v)$, на котором достигается длина $l_n(v)$. Так как сумма длин $X(v_n)$ и $Y(v_n)$ равна $l_n(v)$, то хотя бы одна из этих длин не меньше $l_n(v)/2$, откуда $l_{n+1}(v) \geqslant l_n(v)/2$. □

Обозначение 3.7. Пусть $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{A}_j$ – неассоциативные алгебры с единицами над полем $\mathbb{F}$ размерностей $d_i, d_j > 1$ и длин l_i, l_j соответственно. Введем величину $U_{ij} = 2l_j + (d_i + d_j - \log_2(l_j) - 2)l_i - 1$.

Теперь докажем основную теорему данного параграфа.

Теорема 3.8. *Пусть* $\mathcal{A}_1$ *и* $\mathcal{A}_2$ *– неассоциативные алгебры с единицами над полем* $\mathbb{F}$ *размерностей* $d_1, d_2 > 1$ *и длин* $l_1, l_2 > 0$ *соответственно. Тогда*

$$\max(l_1, l_2) \leqslant l(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \leqslant \min(U_{12}, U_{21}).$$

Доказательство. Нижняя оценка следует из леммы 3.1.

Рассмотрим произвольную порождающую систему $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. Найдем в ней неприводимое слово w_0 максимальный длины. Отметим, что если таких слов несколько, то можно взять любое.

Если $l(w_0) \leqslant \max(2l_2, 2l_1)$, то, так как по теореме 2.3 для любой алгебры $\mathcal{A}$ верно $l(\mathcal{A}) \leqslant 2^{\dim \mathcal{A} - 2}$, имеем $\log_2(l_1) \leqslant d_1 - 2$ и $\log_2(l_2) \leqslant d_2 - 2$, оба аргумента минимума не меньше $2l_2 + 2l_1 - 1$, утверждение выполнено.

Пусть длина w_0 больше $\max(2l_2, 2l_1)$. Пусть, без ограничения общности, $l_2 \geqslant l_1$. Обозначим $j = \min\{m | m \geqslant 0, l_m(w_0) = 1\}$, $k = \max\{m | 0 \leqslant m \leqslant j, l_m(w_0) \geqslant 2l_2\}$. Так как слово w_0 является неприводимым, все слова в $R_n(w_0)$ для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ являются неприводимыми в силу [5, лемма 2.14].

Для $s \in \{1, \ldots, j\}$ обозначим через w_s слово $R_s(w_0)$, на котором достигается длина $l_s(w_0)$. По построению w_0 и предыдущему замечанию, все слова w_t, $t \in \{0, \ldots, j\}$ неприводимы, а по лемме 3.5 их длины различны и положительны. Таким образом, они попарно различны и, более того, линейно независимы в совокупности со словом $(1_{\mathcal{A}_1}, 1_{\mathcal{A}_2})$ длины 0. Отсюда $j+2 \leqslant \dim \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 = d_1 + d_2$.

Пусть $n \in \{0, \dots, k\}$. Покажем, что $l_n(w_0) - l_{n+1}(w_0) \leqslant l_1$. Пусть длина $X(w_n)$ равна x, длина $Y(w_n)$ равна y. Без ограничения общности считаем, что $x \geqslant y$. С одной стороны, $x \leqslant l_{n+1}(w_0)$, а с другой, так как $x \geqslant l_n(w_0)/2 \geqslant l_2$ по определению k и w_n является неприводимым словом, то, согласно лемме 3.3, обязано выполняться неравенство $y \leqslant l_1$. Значит, $l_n(w_0) = x + y \leqslant l_{n+1}(w_0) + l_1$.

Таким образом, $l(\mathcal{S}) = l(w_0) \leqslant l_k(w_0) + kl_1$. Оценим слагаемые по отдельности.

1. $l_k(w_0) \leqslant l_{k+1}(w_0) + l_1 \leqslant 2l_2 - 1 + l_1$ по выбору k.
2. По лемме 3.6, имеем:

$$2l_2 \leqslant l_k(w_0) \leqslant 2l_{k+1}(w_0) \leqslant \dots \leqslant 2^{j-k} l_j(w_0) = 2^{j-k}.$$

Таким образом, $\log_2(l_2) + 1 \leqslant j - k$, или $k \leqslant j - \log_2(l_2) - 1 \leqslant d_1 + d_2 - \log_2(l_2) - 3$.

Итак, мы получаем, что

$$l(\mathcal{S}) \leqslant 2l_2 - 1 + l_1 + (d_1 + d_2 - \log_2(l_2) - 3)l_1 = 2l_2 + (d_1 + d_2 - \log_2(l_2) - 2)l_1 - 1.$$

Наконец, заметим, что $\log_2(l_1) \leqslant \log_2(l_2) \leqslant d_2 - 2$ и $l_1 \leqslant l_2$, откуда $2l_2 + (d_1 + d_2 - \log_2(l_2) - 2)l_1 - 1 \leqslant 2l_1 + (d_1 + d_2 - \log_2(l_1) - 2)l_2 - 1$, и верна итоговая оценка:

$$l(\mathcal{S}) \leqslant \min(2l_2 + (d_1 + d_2 - \log_2(l_2) - 2)l_1 - 1, 2l_1 + (d_1 + d_2 - \log_2(l_1) - 2)l_2 - 1).$$

Так как эта оценка верна для любой системы, она верна и для алгебры $\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$. □

Следствие 3.9. *Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ – неассоциативные алгебры с единицами над полем $\mathbb{F}$ размерностей $d_1, d_2 > 1$ соответственно. Тогда $l(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \leqslant \min\{(d_1 + 2)2^{d_2 - 2}, (d_2 + 2)2^{d_1 - 2}\}$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $l_1 \leqslant l_2$. Тогда, по теореме 3.8, имеем:

$$l(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \leqslant U_{12} = 2l_2 + (d_1 + d_2 - \log_2(l_2) - 2)l_1 - 1 \leqslant (d_1 + d_2 - \log_2(l_2))l_2.$$

Функция $f(x) = (d_1 + d_2 - \log_2(x))x$ на промежутке $x \in [1, 2^{d_2 - 2}]$ имеет положительную производную $f'(x) = d_1 + d_2 - \frac{1}{\ln 2} - \log_2(x)$, так что она достигает своего максимума на значении $x = 2^{d_2 - 2}$. Отсюда,

$$l(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \leqslant (d_1 + 2)2^{d_2 - 2}.$$ □

Замечание 3.10. Приведенное следствие, в частности, показывает, что установленная выше верхняя оценка значительно лучше тривиальной оценки $l(\mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2) \leqslant 2^{d_1+d_2-2}$, возникающей при применении теоремы 2.3 к размерности прямой суммы алгебр, поскольку $(d_1+2)2^{d_2-2} \ll 2^{d_1+d_2-2}$ (отношение левой и правой части равно $\frac{d_1+2}{2^{d_1}}$), что не больше 1 с $d_1 = 2$ и быстро стремится к 0: при $d_1 = 12$ это отношение уже меньше 0.005).

Отметим, что доказанная теорема не покрывает тот случай, когда одним из слагаемых является $\mathbb{F}$. Разберем его ниже.

Предложение 3.11. *Длина* $\mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$ *как алгебры над* $\mathbb{F}$ *равна* 1.

Доказательство. Так как $\dim \mathbb{F} \oplus \mathbb{F} = 2$, то, по теореме 2.3, ее длина не больше 1. Система $\mathcal{S} = \{(1_\mathbb{F}, 0)\}$ является порождающей длины 1, таким образом длина алгебры равна 1. □

Предложение 3.12. *Пусть* $\mathcal{A}$ *- конечномерная алгебра с единицей размерности больше* 1. *Длина* $\mathcal{A} \oplus \mathbb{F}$ *не превосходит* $2l(\mathcal{A})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную порождающую систему $\mathcal{S}$ алгебры $\mathcal{A} \oplus \mathbb{F}$. Ее левая половина порождает алгебру $\mathcal{A}$. Таким образом, проекция $\mathcal{L}_{l(\mathcal{A})}(\mathcal{S})$ на первое слагаемое прямой суммы совпадает с $\mathcal{A}$, т.е. размерность $\dim \mathcal{L}_{l(\mathcal{A})}(\mathcal{S}) \geqslant \dim \mathcal{A}$. Если $\dim \mathcal{L}_{l(\mathcal{A})}(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{A} + 1$, то утверждение доказано. Если же $\dim \mathcal{L}_{l(\mathcal{A})}(\mathcal{S}) = \dim \mathcal{A}$, то, по лемме 2.2, повышение размерности должно случиться не позже, чем на длине слов $2l(\mathcal{A})$, что и требовалось доказать. □

§4. Примеры

Пример 4.3 демонстрирует достижимость оценки 3.8, а примеры 4.1 и 4.2 служат для его построения.

Пример 4.1. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_w$ над полем $\mathbb{F}$ с базисом $e_0 = 1_\mathbb{F}, e_1, \ldots, e_{n-1}$ и следующей таблицей умножения:

$$\begin{aligned}
&e_0 \cdot e_k = e_k \cdot e_0 = e_k, && k \in \{0, \ldots, n-1\},\\
&e_k \cdot e_k = e_{k+1}, && k \in \{1, \ldots, n-2\},\\
&e_1 \cdot e_k = e_k \cdot e_1 = e_1, && k \in \{2, \ldots, n-1\},\\
&e_{n-1} \cdot e_{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

а все прочие произведения равны 1. Тогда $l(\mathcal{A}_w) = 2^{n-2}$. Действительно, $l(\mathcal{A}_m) \leqslant 2^{n-2}$ по теореме 2.3, и длина порождающей системы $\{e_1\}$ равняется 2^{n-2}.

Пример 4.2. Рассмотрим алгебру $\mathcal{B}$ над полем $\mathbb{F}$ с базисом $u_0 = 1_{\mathbb{F}}, u_1$ и таблицей умножения

$$u_0^2 = u_1^2 = u_0, u_0 \cdot u_1 = u_1 \cdot u_0 = u_1.$$

Ее длина, очевидно, равна 1.

Пример 4.3. Рассмотрим $\mathcal{A}_w \oplus \mathcal{B}$ и порождающую систему $\{(e_1, u_1)\}$. По теореме 3.8, $l(\mathcal{A}_w \oplus \mathcal{B}) \leqslant 2 \cdot 2^{n-2} + (2+n-(n-2)-2) \cdot 1 - 1 = 2^{n-1}+1$.

Покажем, что в избранной порождающей системе неприводимые слова имеют следующий вид: $a_0 = (1,1)$, $a_1 = (e_1, u_1)$, $a_2 = a_1^2 = (e_2, 1), \ldots, a_{n-1} = a_{n-2}^2 = (e_{n-1}, 1)$, $a_n = a_{n-1}^2 = (0,1)$ и $a_{n+1} = a_n \cdot a_1 = (0, u_1)$. Действительно, так как умножение a_1 на любое из a_i, $i \in 2, \ldots, n-1$, снова даст a_1, а перемножение a_q и a_p, $p \neq q$, $p, q \in \{2, \ldots, n-1\}$, даст a_0, вплоть до длины 2^{n-1} (то есть длины a_n) других неприводимых слов кроме как квадратов a_i быть не может, а длина a_{n+1} всего лишь на единицу больше. Таким образом, $l(\{(e_1, u_1)\}) = 2^{n-1} + 1$, то есть $l(\mathcal{A}_w \oplus \mathcal{B}) = 2^{n-1} + 1$.

Заметим, что удвоение длины при добавлении основного поля в качестве прямого слагаемого является возможным, т.е. оценка в предложении 3.12 точна, см. пример 4.5 ниже. В примере 4.4 строится подходящая для примера 4.5 алгебра $\mathcal{A}$.

Пример 4.4. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_m$ над полем $\mathbb{F}$ с базисом $e_0 = 1_{\mathbb{F}}, e_1, \ldots, e_{n-1}$ и следующей таблицей умножения:

$$\begin{aligned} &e_0 \cdot e_k = e_k \cdot e_0 = e_k, && k \in \{0, \ldots, n-1\}, \\ &e_k \cdot e_k = e_{k+1}, && k \in \{1, \ldots, n-2\}, \\ &e_{n-1} \cdot e_{n-1} = 0, && \end{aligned}$$

и все прочие произведения равны 1. Тогда, аналогично примеру 4.1, $l(\mathcal{A}_s) = 2^{n-2}$.

Пример 4.5. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_m \oplus \mathbb{F}$. Тогда $\mathcal{S}_1 = \{(e_1, 1)\}$ является ее порождающей системой и $l(\mathcal{S}_1) = 2^{n-1}$. Действительно, все неприводимые слова от $\mathcal{S}_1$ имеют вид $(e_k, 1)$, $k = 1, \ldots, n-1$, и $(e_{n-1}, 1)^2 = (0, 1)$. Отметим, что $l((e_k, 1)) = 2^{k-1}$ и $l((e_{n-1}, 1)^2) = 2^{n-1}$ в силу определения умножения в алгебре $\mathcal{A}_1$. Объединяя это с верхней оценкой длины неассоциативной алгебры, установленной в теореме 2.3, получим $l(\mathcal{A}_m \oplus \mathbb{F}) = 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2l(\mathcal{A}_m)$.

Пример 4.7 показывает, что неравенство в предложении 3.12 может быть строгим; в примере 4.6 построено соответствующее первое слагаемое.

Пример 4.6. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_s$ над полем $\mathbb{F}$ с базисом $e_0 = 1_{\mathbb{F}}, e_1, \dots, e_{n-1}$ и следующей таблицей умножения:

$$\begin{aligned} &e_0 \cdot e_k = e_k \cdot e_0 = e_k, && k \in \{0, \dots, n-1\}, \\ &e_k \cdot e_k = e_{k+1}, && k \in \{1, \dots, n-2\}, \end{aligned}$$

и все прочие произведения равны 0. Тогда, аналогично примеру 4.1, $l(\mathcal{A}_s) = 2^{n-2}$.

Пример 4.7. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}_s \oplus \mathbb{F}$. Тогда

$$\mathcal{S}_2 = \{(e_1 + \dots + e_{n-1}, 1)\}$$

является порождающей системой и $l(\mathcal{S}_2) = 2^{n-2} + 1$. Действительно, все неприводимые слова от $\mathcal{S}_2$ имеют вид $(e_k + \dots + e_{n-1}, 1)$, $k = 1, \dots, n-1$ и $(e_{n-1}, 1) \cdot (e_1 + \dots + e_{n-1}, 1) = (0, 1)$. Отметим, что

$$l((e_k + \dots + e_{n-1}, 1)) = 2^{k-1} \quad \text{и} \quad l((e_{n-1}, 1) \cdot (e_1 + \dots + e_{n-1}, 1)) = 2^{n-2} + 1.$$

Чтобы показать, что это действительно все неприводимые слова, заметим что при $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$, $(e_i + \dots + e_{n-1}) \cdot (e_j + \dots + e_{n-1}) = (e_j + \dots + e_{n-1})^2$, то есть других слов длины не более 2^{n-2} нет вовсе.

Теперь покажем что никакая другая система не может иметь большую длину.

Отметим, что если порождающая система $\mathcal{S}$ состоит более чем из одного элемента, то, как и в доказательстве [11, лемма 5.3], получаем, что число шагов i, для которых $\dim \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) - \dim \mathcal{L}_{i-1}(\mathcal{S}) > 0$, не превосходит $n-2$. Тогда, по аналогии с [5, предложение 2.6], получаем, что ее длина не превосходит 2^{n-2}.

Рассмотрим теперь порождающую систему из одного элемента $a = (f_0 + f_1 e_1 + \dots + f_{n-1} e_{n-1}, g)$, где $f_0, \dots, f_{n-1}, g \in \mathbb{F}$. По лемме 2.1, можно считать, что $f_0 = 0$, поскольку прочие случаи сводятся к этому вычитанием из a величины $f_0(1,1)$.

Докажем, что произведение $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_h}$ при $h > 2^{k-1}$ и $i_1, \dots, i_h \in \{1, \dots, n-1\}$ равно 0 или e_j, $j \in \{k+1, \dots, n-1\}$ (последний случай возможен только при $k \leqslant n-2$). Воспользуемся индукцией.

При $k = 1$ утверждение очевидно из таблицы умножения.

Пусть для $k = 1, \ldots, k_0 - 1$ утверждение доказано. Рассмотрим $k = k_0$, $h > 2^{k_0-1}$ и произвольное $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_h}$. Найдем внутри последнее умножение и выберем тот из множителей, который имеет большее число подмножителей. Их количество не меньше $h/2$, то есть строго больше 2^{k_0-2}.

1. Если $k_0 \leqslant n-2$, то $k_0 - 1 \leqslant n-2$. Используем предположение индукции для выбранного множителя. Он либо равен 0, либо e_j, $j \in \{k_0, \ldots, n-2\}$, либо e_{n-1}. В первом и третьем случае, все произведение равно 0, во втором – либо 0, либо e_{j+1}.

2. Если $k_0 = n-1$, то выбранный множитель равен либо 0, либо e_{n-1}. В обоих случаях все произведение равно 0.

3. Если $k_0 > n-1$, то $k_0 - 1 > n-2$, то есть выбранный множитель равен 0. Значит, все произведение равно 0.

Рассмотрим случаи. Если $g = 0$, то система не является порождающей: единственное слово, имеющее не 0 в правой половине – это $(1,1)$. Левая половина всех остальных слов состоит из сумм мономов положительной степени с множителями из $e_1, \ldots, e_{n-1}$, которые, по доказанному утверждению, равны 0 или элементу из $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Таким образом, в разложении остальных слов по базису $e_0, \ldots, e_{n-1}$ отсутствует $e_0 = 1$, то есть элемент $(0,1)$ не может принадлежать $\mathcal{L}(\{a\})$.

Если $g \neq 0$, то, без ограничения общности, домножив a на g^{-1} и воспользовавшись леммой 2.1, можно считать, что $g = 1$. Рассмотрим $a_0 = (1,1), a_1 = a, a_2 = a^2, \ldots, a_{n-1} = a_{n-2}^2$ и $a_n = a_1 \cdot a_{n-1}$. Левая половина a_n есть сумма мономов степени $2^{n-2}+1$ с множителями из $e_1, \ldots, e_{n-1}$, каждый из которых, по доказанному утверждению, равен нулю. Таким образом, $a_n = (0,1)$. Рассмотрим разложение левых половин $a_0, \ldots, a_{n-1}$ по базису $e_0, \ldots, e_{n-1}$. По таблице умножения нетрудно заметить, что $a_j = f_j^{(j)} e_j + f_{j+1}^{(j)} e_{j+1} + \cdots + f_{n-1}^{(j)} e_{n-1}$, где $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ $f_j^{(j)} = f_1^{2^{j-1}} \neq 0$. Таким образом, $a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n$ являются линейно независимой системой из $n+1$ элементов, то есть $\mathcal{L}_{2^{n-2}+1}(\{a\}) = \mathcal{A}_s \oplus \mathbb{F}$ и $l(\{a\}) \leqslant l(\mathcal{S}_2)$.

Список литературы

1. Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, *Об унитарном подобии матричных семейств.* — Матем. заметки **74**, No. 6 (2003), 815–826.
2. Yu. A. Al'pin, Kh. D. Ikramov, *Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria.* — Linear Algebra Appl. **313** (2000), 155–161.

3. V. Futorny, R. A. Horn, V. V. Sergeichuk, *Specht's criterion for systems of linear mappings.* — Linear Algebra Appl. **519** (2017), 278–295.
4. А. Э. Гутерман, Д. К. Кудрявцев, *Длина алгебр кватернионов и октонионов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **453** (2016), 22–32.
5. A. E. Guterman, D. K. Kudryavtsev, *Upper bounds for the length of non-associative algebras.* — J. Algebra, accepted, `arXiv:1902.08389 [math.CO]`, February, 2019.
6. A. Guterman, T. Laffey, O. Markova, H. Šmigoc, *A resolution of Paz's conjecture in the presence of a nonderogatory matrix.* — Linear Algebra Appl. **543** (2018), 234–250.
7. A. E. Guterman, O. V. Markova, *Commutative matrix subalgebras and length function.* — Linear Algebra Appl. **430** (2009), 1790–1805.
8. А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Длина групповых алгебр групп небольшого размера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 76–87.
9. A. Guterman, O. Markova, V. Mehrmann, *Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices.* — Linear Algebra Appl. **568** (2019), 135–154.
10. Н. А. Колегов, О. В. Маркова, *Системы порождающих матричных алгебр инцидентности над конечными полями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **472** (2018), 120–144.
11. О. В. Маркова, *Верхняя оценка длины коммутативных алгебр.* — Матем. сб. **200**, No. 12 (2009), 41–62.
12. О. В. Маркова, *Функция длины и матричные алгебры.* — Фунд. прикл. мат. **17**, No. 6 (2012), 65–173.
13. О. В. Маркова, *О длине алгебры верхнетреугольных матриц.* — Успехи матем. наук **60**, No. 3 (2005), 177–178.
14. C. J. Pappacena, *An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra.* — J. Algebra **197** (1997), 535–545.
15. A. Paz, *An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables.* — Linear Multilinear Algebra **15** (1984), 161–170.
16. Ya. Shitov, *An improved bound for the length of matrix algebras.* — Algebra Number Theory **13** (2019), 1501–1507.
17. A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, *The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua.* — Arch. Ration. Mech. Anal. **2** (1959), 309–336.
18. A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, *Further results in the theory of matrix polynomials.* — Arch. Ration. Mech. Anal. **4** (1960), 214–230.

Guterman A. E., Kudryavtsev D. K., Markova O. V. Length of a direct sum of nonassociative algebras.

A lower and an upper bounds for the length of a direct sum of nonassociative algebras are obtained, and their sharpness is established. Note that while the lower bound for the length of a direct sum in the associative

and nonassociative cases turns out to be the same, the upper bound in the nonassociative case significantly exceeds its associative counterpart.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991, Россия;
Московский физико-технический институт,
Долгопрудный 141701, Россия
E-mail: guterman@list.ru

Поступило 8 октября 2019 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, 119991, Россия
E-mail: kdk97@rambler.ru

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Москва 119991, Россия;
Московский физико-технический институт,
Долгопрудный 141701, Россия
E-mail: ov_markova@mail.ru