Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, Двухпараметрическое семейство вещественных решений второго уравнения Пенлеве, *Докл. АН СССР*, 1986, том 290, номер 3, 590–594

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
23 января 2025 г., 16:24:45

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* (12), (14) *и* $\sigma_* \in \in RH_{1+\beta}(R)$, $\beta > \nu$. *Тогда существует по крайней мере одно решение* $u \in U_\nu$ *уравнения* $N(u, \epsilon) = 0$, *если соответствующая норма* ϵ *достаточно мала.*

Аналогичные утверждения справедливы в задаче со свободной границей для уравнений Навье–Стокса. В этом случае в полученных представлениях нужно положить $2\Pi = \rho(|v|^2 + \partial W_\Omega v^2) - W_\Omega f$, где ρ – плотность жидкости, и стереотипным образом свести задачу к задаче нахождения неподвижной точки некоторого оператора. Ранее [5] была доказана разрешимость подобной задачи при предположении, что $\sigma = \mathrm{const}$, $v_\Sigma \in H_{2+\nu}(S)$. Здесь удалось снизить требуемую гладкость внешних воздействий за счет того, что система Стокса проинтегрирована внутри области, а динамическое условие – вдоль свободной границы, и исключением функции χ регуляризован член $[\overline{t}\varphi(t) + \chi(t)]_s$.

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
26 IX 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидромеханика невесомости/Под ред. В.Г. Бабского, Н.Д. Копачевского, А.Д. Мышкис и др. М.: Наука, 1976. 504 с. 2. *Курант Р.* Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М.: ИЛ, 1953. 310 с. 3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с. 4. *Антановский Л.К.* – ДАН, 1981, т. 261, № 4, с. 829–832. 5. *Пухначев В.В.* – ПМТФ, 1972, № 3, с. 91–102.

УДК 517.9

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.А. КАПАЕВ, В.Ю. НОВОКШЕНОВ

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ВЕЩЕСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 13 IX 1985)

Метод изомонодромных деформаций, развитый в работах [1, 2], в применении к уравнениям Пенлеве может рассматриваться как нелинейный аналог метода Лапласа, т.е. он позволяет найти в явном виде связь параметров асимптотик решений уравнений Пенлеве в окрестностях различных особых точек. Так, для третьего уравнения Пенлеве в работах [3, 4] вычислены формулы связи асимптотик вещественного двухпараметрического решения при $x \to 0$ и $x \to \infty$.

В данной работе этим методом исследуется поведение при $x \to \pm\infty$ решений второго уравнения Пенлеве

$$(1) \qquad u_{xx} = xu + 2u^3,$$

рассматриваемого на вещественной оси. Уравнение (1) обладает регулярными вещественными решениями с асимптотиками (см. [5])

$$(2) \qquad u(x\,|\,a) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\, x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)[1 + o(1)], \qquad x \to +\infty,$$

$$(3) \qquad u(x \mid \alpha, \varphi) = \alpha(-x)^{-1/4} \cos\left\{ \frac{2}{3} (-x)^{3/2} - \frac{3}{4} \alpha^2 \ln(-x) + \varphi \right\} [1 + o(1)],$$

$$x \to -\infty.$$

С другой стороны, в классической работе П. Пенлеве [6] показано, что любое решение уравнения (1) является мероморфной функцией комплексного аргумента x, причем в окрестности любого полюса x оно разлагается в ряд Лорана

$$(4) \qquad u(x \mid x_n, d_n) = a_{-1}(x - x_n)^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_n)^k = a_{-1} \{ (x - x_n)^{-1} -$$

$$- {}^1/_6\, x_n (x - x_n) - {}^1/_4\, (x - x_n)^2 + d_n (x - x_n)^3 + \ldots \}, \qquad x \to x_n.$$

Все коэффициенты a_k однозначно определяются по координате полюса x_n, вычету в нем $a_{-1} = \pm 1$ и коэффициенту d_n при $(x - x_n)^3$.

В данной статье мы выделяем двухпараметрические классы решений (4) уравнения (1), имеющие счетное множество вещественных полюсов x_n, $n \in \mathbf{Z}$, и устанавливаем формулы связи параметров x_n, d_n при $x_n \to \pm\infty$ ("рассеяние полюсов"). Как частный случай выделяются формулы асимптотического распределения полюсов при $x_n \to +\infty$ для решения (3), регулярного при $x \to -\infty$, а также распределение полюсов при $x_n \to -\infty$ для решения (2) с амплитудой $|a| > 1$. Отметим, что при условии

$$(5) \qquad \varphi = -\frac{3}{2} \alpha^2 \ln 2 - \arg \Gamma\left(\frac{\alpha^2}{2i}\right) + \pi \operatorname{sign} a + \frac{\pi}{4},$$

найденном в работе [7], существует всюду гладкое решение $u(x)$, имеющее асимптотики (2), (3), причем

$$(6) \qquad \alpha^2 = -\frac{1}{\pi} \ln(1 - a^2), \qquad -1 < a < 1.$$

1. Рассмотрим систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами

$$(7) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \{(-4i\lambda^2 - ix - 2iu^2)\sigma_3 - 4u\lambda\sigma_2 - 2u_x \sigma_1\} \Psi, \qquad \lambda \in \mathbf{C},$$

где $\Psi(\lambda)$ – матричная 2×2 функция, σ_k – матрицы Паули, x, u, u_x – произвольные параметры. В работе [1] доказана следующая

Теорема 1. *Ограниченная вместе с производной функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда матрицы Стокса системы (7) не зависят от x.*

Матрицы Стокса здесь определяются стандартными соотношениями $\Psi_{k+1} = \Psi_k S_k$, где $\Psi_k(\lambda)$ – канонические решения, фиксируемые своей асимптотикой

$$(8) \qquad \Psi_k(\lambda) \to \exp \sigma_3 \left(-\frac{4i}{3} \lambda^3 - ix\lambda\right), \qquad \lambda \to \infty,$$

в секторах $-\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi k}{3} < \arg\lambda < \dfrac{\pi k}{3}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Все S_k параметризуются тремя комплексными параметрами p, q, r, где $p = (S_1)_{12}$, $q = (S_3)_{21}$, $r = (S_2)_{12}$. Имеет место соотношение $p + q - r + pqr = 0$, а в случае вещественных x, u, u_x к нему добавляются равенства $p = \bar{q}$, $r = \bar{r}$ (см. [2]).

2. Здесь мы не имеем возможности подробно описать процедуру вычисления асимптотик сингулярных решений $u(x \mid x_n, d_n)$ методом изомонодромных деформаций, т.е. путем вычисления матриц Стокса системы (7). Отметим лишь основные моменты.

Исходным является предположение о существовании у некоторого решения $u(x)$ уравнения (1), вещественность которого априори не предполагается, сколь угодно далеких полюсов, лежащих на вещественной оси (см. [8]). Подставляя в (7) лорановский ряд (4) при $a_{-1} = 1$ и переходя к функции $\Phi_k = (I - i\sigma_1)\Psi_k$, получаем для первой строки Φ_k скалярное уравнение

$$(9)\qquad P(\lambda, x)\frac{\partial}{\partial\lambda} P^{-1}(\lambda, x)\frac{\partial\Phi_k}{\partial\lambda} + Q(\lambda, x)\Phi_k = 0,$$

где

$$P(\lambda, x) = \lambda^2 + (x - x_n)^{-2} + {}^1\!/_6\, x_n + O(x - x_n),$$

$$Q(\lambda, x) = (4\lambda^2 + x)^2 + 40 d_n - {}^7\!/_9\, x_n^2 + 8\lambda^2 P^{-1}(\lambda, x)\,\{(x - x_n)^{-1} + O(x_n(x - x_n))\}$$

Существование решений уравнения (9) с граничными условиями (8) в указанных секторах обеспечивается ВКБ-оценками [2], справедливыми одновременно при $x \to x_n$ и $|\lambda| \to \infty$. Матрицы Стокса уравнения (9), совпадающие с соответствующими матрицами системы (7), не выражаются явным образом через x, x_n, d_n при конечных x, однако их асимптотика при $x_n \to \pm\infty$, $|x - x_n| = O[\exp(-|x_n|)]$ может быть эффективно вычислена с помощью ВКБ-решений уравнения (9). Предполагая дополнительно, что $|40 d_n x_n^{-2} - 7/9| = O(|x_n|^{-3/2})$, получаем при $x_n \to -\infty$

$$(10)\qquad p = 2^{-1/2} L(x_n, \nu)\,\Gamma(i\nu)\,\Gamma^{-1}(2i\nu)\exp(-\pi\nu/2)\,[1 + o(1)],$$

$$q = 2^{-1/2}\bar{L}(x_n, \nu)\,\Gamma(-i\nu)\,\Gamma^{-1}(-2i\nu)\exp(-\pi\nu/2)\,[1 + o(1)],$$

где

$$(11)\qquad \nu = {}^1\!/_8\,(-x_n)^{3/2}(40 d_n x_n^{-2} - 7/9)\,[1 + o(1)],$$

$$(12)\qquad L(x_n, \nu) = \exp\left\{\frac{2i}{3}(-x_n)^{3/2} + \frac{3i}{2}\nu\ln(-x_n) + 5i\nu\ln 2 - \frac{\pi i}{2}(1 + a_{-1})\right\}.$$

Условие изомонодромности, т.е. независимости p и q от x, означает одновременно независимость их от x_n, поскольку, рассматривая решение $u(x)$ уравнения (1) как мероморфную функцию на комплексной плоскости x, мы получаем возможность обойти полюс x_n, оставаясь в области применимости теоремы 1. В силу предположения о вещественности x_n, d_n и соотношения (11) заключаем, что параметр ν также является вещественным. Тогда из формул (10) немедленно вытекают соотношения

$$(13)\qquad p = \bar{q}, \qquad r = -2(|p|^2 - 1)^{-1}\operatorname{Re} p = \bar{r},$$

$$(14)\qquad \nu = \frac{1}{2\pi}\ln(|p|^2 - 1), \qquad |p| > 1.$$

Поскольку p и q не зависят от x_n, равенства (10), (12) становятся уравнениями на x_n. Они имеют счетное множество решений, возникающее ввиду многозначности аргумента в экспонентах (10), (12). Тем самым справедлива

Т е о р е м а 2. *Вещественные полюсы решений $u(x \mid x_n, d_n)$, заданных параметрами монодромии p, $q = \bar{p}$, $r = (p + q)(1 - pq)^{-1}$, имеют следующее асимптоти-*

ческое распределение при $x_n \to -\infty$

$$(15)\quad (-x_n)^{3/2} = 3\pi n - \frac{3}{2}\nu\ln(3\pi n) - \frac{9}{2}\ln 2 + \frac{3}{2}\arg\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\nu\right) + \frac{3}{2}\arg p +$$
$$+ \frac{3}{4}\pi(1 + a_{-1}) + O(n^{-1}\ln n), \qquad n \to +\infty, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Здесь полюсы с вычетами $a_{-1} = +1$, $a_{-1} = -1$ *чередуются друг с другом, а величины* d_n, ν *заданы соотношениями* (11), (14).

Аналогичные вычисления, проведенные при $x_n \to +\infty$, дают следующие выражения для параметров монодромии:

$$(16)\quad 1 + rp = 2^{-1/2} R(x_n, \mu)\,\Gamma(i\mu)\,\Gamma^{-1}(2i\mu)\exp(-\pi\mu/2)\,[1 + o(1)],$$
$$1 + rq = 2^{-1/2}\bar{R}(x_n, \mu)\,\Gamma(-i\mu)\,\Gamma^{-1}(-2i\mu)\exp(-\pi\mu/2)\,[1 + o(1)],$$

$$(17)\quad r = a_{-1}\exp(-\pi\mu), \qquad \mu = \frac{x_n^{3/2}}{4\sqrt{2}}(40 d_n x_n^{-2} + 2/9)\,[1 + o(1)],$$

$$(18)\quad R(x_n, \mu) = \exp\left(-\frac{i\cdot 2\sqrt{2}}{3}x_n^{3/2} + \frac{3i}{2}\mu\ln x_n + \frac{11i}{2}\mu\ln 2\right).$$

Подобно предыдущему случаю условия изомонодромности и вещественности $u(x)$ приводят к соотношениям

$$(19)\quad \mu = -\frac{1}{\pi}\ln|r|, \qquad r = \bar{r} \neq 0,$$
$$a_{-1} = \operatorname*{res}_{x_n} u(x) = \operatorname{sign} r.$$

Разрешая равенства (16), (18) относительно x_n, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Вещественные полюсы решений* $u(x \mid x_n, d_n)$, *заданных параметрами* p, $q = \bar{p}$, $r = (p + q)(1 - pq)^{-1}$, *имеют следующее асимптотическое распределение при* $x_n \to +\infty$:

$$(20)\quad x_n^{3/2} = \frac{3}{\sqrt{2}}\pi n + \frac{3}{2\sqrt{2}}\mu\ln\left(\frac{3\pi}{\sqrt{2}}n\right) + \frac{21}{4\sqrt{2}}\mu\ln 2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}\arg(1 + rp) -$$
$$- \frac{3}{2\sqrt{2}}\arg\Gamma(½ + i\mu) + O(n^{-1}\ln n), \qquad n \to +\infty, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

где μ *определяется формулой* (19). *Вычеты* a_{-1} *во всех полюсах одинаковы и определяются знаком* r, *а величины* d_n *заданы соотношением* (17).

Отметим, что результат теоремы 3 позволяет уточнить асимптотическую формулу Н.П. Еругина [8] о расстоянии δ_n между соседними полюсами при $x \to +\infty$:

$$\delta_n = x_{n+1} - x_n = \left(\frac{4\pi^2}{3n}\right)^{1/3} + O(n^{-4/3}\ln n), \qquad n \to \infty.$$

3. Выделим в заключение множество локально регулярных решений вида (2), (3) в терминах данных монодромии, а также приведем формулы связи асимптотических параметров этих решений при $x \to \pm\infty$.

а) Регулярное решение, имеющее асимптотики (2) и (3) на бесконечности, задается параметрами $p = ia$, $-1 < a < 1$, $r = 0$, где a совпадает с амплитудой в формуле (2). Формулы связи для асимптотик (2), (3) даются соотношениями (5), (6).

б) Регулярные убывающие при $x \to +\infty$ и сингулярные при $x \to -\infty$ решения: $p = ia$, $a \in \mathbf{R}$, $|a| > 1$, $r = 0$. В асимптотиках (2), (15) следует положить

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \ln(a^2 - 1), \quad \arg p = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a.$$

в) Регулярные убывающие при $x \to -\infty$ и сингулярные при $x \to +\infty$ решения: $|p| < 1$, $\operatorname{Re} p \neq 0$, $r \neq 0$. В асимптотиках (3), (20) следует положить

$$\varphi = -\frac{3}{2}\alpha^2 \ln 2 - \arg\Gamma\left(\frac{\alpha^2}{2i}\right) + \frac{\pi}{4} - \psi,$$

$$\mu = -\frac{1}{\pi} \ln\left[2\exp(\pi\alpha^2)\sqrt{1 - \exp(-\pi\alpha^2)}\ |\cos\psi|\right],$$

$$\arg p = \operatorname{arctg}\left\{(1 - \exp(-\pi\alpha^2))\sin 2\psi\,[1 + (1 - \exp(-\pi\alpha^2))\cos 2\psi]^{-1}\right\}.$$

г) Сингулярные при $x \to \pm\infty$ решения: $|p| > 1$, $\operatorname{Re} p \neq 0$, $r \neq 0$. В асимптотиках (15), (20), описывающих "рассеяние полюсов", следует положить

$$\mu = -\frac{1}{\pi} \ln\left[2\exp(-2\pi\nu)\sqrt{1 + \exp(2\pi\nu)}\ |\cos\theta|\right],$$

$$\arg(1 + rp) = \pi + \operatorname{arctg}\left\{(1 + \exp(2\pi\nu))\sin 2\theta\,[1 + (1 + \exp(2\pi\nu))\cos 2\theta]^{-1}\right\},$$

$$\theta = \arg p.$$

Отдел физики и математики
Башкирского филиала
Академии наук СССР, Уфа
Ленинградский институт авиационного
приборостроения

Поступило
25 IX 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Flaschka H., Newell A.C.* – Comm. Math. Phys., 1980, vol. 76, p. 65–116. 2. *Итс А.Р.* – Изв. АН СССР, сер. матем., 1985, т. 48, № 3. 3. *Новокшенов В.Ю.* – Функц. анализ, 1984, т. 18, № 3, с. 90–91. 4. *Новокшенов В.Ю.* – ДАН, 1985, т. 283, № 5. 5. *Абдуллаев А.С.* – ДАН, 1983, т. 273, № 5, с. 1033–1036. 6. *Painlevé P.* – Bull. Soc. Math. de France, 1900, vol. 28. 7. *Ablowitz M., Segur H.* – Phys. Rev. Lett., 1977, vol. 38, p. 1103–1106. 8. *Еругин Н.П.* – Дифференц. уравнения, 1967, т. 3, № 11, с. 1821–1863.