K. B. Bakiev, The upper estimation of the product of inhomogeneous linear forms for lattices with the small homogeneous minimum, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 106, 5–16

К.Б.Бакиев

# ОЦЕНКА СВЕРХУ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ФОРМ ДЛЯ РЕШЕТОК С МАЛЫМ ОДНОРОДНЫМ МИНИМУМОМ

## § I. Введение

Эта работа продолжает исследования [I, 3] по теоремам переноса, связанным с неоднородной гипотезой Минковского. Пусть $\Lambda$ — точечная решетка в $n$ — мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$; пусть ее определитель $\det\Lambda=1$. Рассмотрим неоднородный $\Pi(\Lambda)$ и однородный $L(\Lambda)$ минимумы решетки $\Lambda$; обозначаем: $L(\Lambda)=\sigma^n, \sigma(\Lambda)\geqslant 0$. В заметке [3] было доказано, что

$$\Pi(\Lambda)\leqslant 2^{-n/2}\cdot n\cdot \exp\left(-\frac{n\sigma}{10}\right). \tag{I}$$

Уже для $\sigma<\frac{10\log n}{n}$ оценка (I) хуже оценки, содержащейся в работе [2]. Цель нашей работы — получение оценки $\Pi(\Lambda)$ сверху, нетривиальной при меньших значениях $\sigma$.

ТЕОРЕМА. Существует такая абсолютная постоянная $n_0$, что при всех $n\geqslant n_0$ для любой решетки $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ определителя $\det\Lambda=1$, удовлетворяющей условию

$$\frac{1}{n\cdot\log n}\leqslant\sigma\leqslant\frac{10(\log n)^{\log\log n+1}}{n}, \tag{2}$$

имеет место неравенство

$$\Pi(\Lambda)\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-n\sigma(\log n)^{\log\log n+1}\right\}. \tag{3}$$

Эта теорема доказывается (см.ниже, § 3) комбинированием соображений работ [2, 3]. За библиографией работ по этой теме мы отсылаем к заметке [I]. Приношу глубокую благодарность Б.Ф.Скубенко за постановку задачи и внимание к работе.

## § 2. Леммы

При доказательстве теоремы нам потребуются следующие три леммы.

ЛЕММА I. Пусть $G$ — многогранник, определенный условиями

$$\left.\begin{aligned} &\left| m \sum_{i' \in J'_{m'}} x_{i'} - m' \sum_{i \in J_m} x_i \right| \leqslant mm', \\ &|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leqslant 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где пары натуральных чисел $(m, m')$ пробегают все разбиения $m + m' = n$ числа $n$, причем для данного разбиения $(m, m')$ множество $\{1, 2, \dots, n\}$ индексов разбивается всеми возможными способами на два непересекающихся подмножества: $J_m = \{i\}$ с числом элементов $m$ и $J'_{m'} = \{i'\}$ с числом элементов $m'$. Тогда его объем

$$V(G) = \frac{2^n}{n} . \tag{5}$$

Доказательство этой леммы см. [I]

ЛЕММА 2. Пусть $X = (x_1, \dots, x_r, -y_1, \dots, -y_m, z_1, \dots, z_s) \in G$, причем $x_1, \dots, x_r > 0$, $y_1, \dots, y_m > 0$, $r + m \geqslant 1$. Тогда

$$\frac{x_1 + \dots + x_r + y_1 + \dots + y_m}{r + m} \leqslant 1 - \frac{r + m}{2n} + \frac{1}{2n(r + m)} . \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = U, \; \sum_{i=1}^{m} y_i = V, \; \sum_{i=1}^{s} z_i = W, \quad U - V + W = \theta .$$

Тогда в силу (4)

$$|\theta| \leqslant 1,$$

$$|(n - r)U + rV - rW| \leqslant r(n - r),$$

$$|(n - m)V + mU + mW| \leqslant m(n - m).$$

Отсюда следует:

$$|nU - r\theta| \leqslant r(n - r), \quad |nV + m\theta| \leqslant m(n - m),$$

или

$$U \leqslant \frac{r(n - r + \theta)}{n}, \quad V \leqslant \frac{m(n - m - \theta)}{n} ,$$

$$U+V \leqslant \frac{(\tau+m)n-(\tau^2+m^2)+(\tau-m)\theta}{n} \leqslant \frac{(\tau+m)n-(\tau^2+m^2)+|\tau-m|}{n},$$

что приводит к оценке (6).

ЛЕММА 3. Пусть в условиях леммы 2 $X\in\Lambda$, причем $|z_i|<1$. Пусть $1\leqslant s_1\leqslant s$. Тогда

$$\sum_{i=s_1}^{s} z_i^2 \geqslant (s-s_1)\,\sigma^{2n/(s-s_1)} \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определение однородного минимума и неравенство между средними геометрическим и арифметическим, получаем:

$$\sigma^{2n} \leqslant x_1^2\cdots x_\tau^2 y_1^2\cdots y_m^2 z_1^2\cdots z_s^2 \leqslant \left(\frac{U+V}{\tau+m}\right)^{2(\tau+m)} z_1^2\cdots z_s^2 .$$

Теперь по лемме 2 и неравенству между средними

$$\sigma^{2n} \leqslant z_{s_1}^2\cdots z_s^2 \leqslant \left(\frac{z_{s_1}^2+\cdots+z_s^2}{s-s_1}\right)^{s-s_1},$$

откуда и следует неравенство (7).

## § 3. Доказательство теоремы

Рассмотрим любую решетку $\Lambda_1\subset\mathbb{R}_n$ с $\det\Lambda_1=1/n$ и произвольную точку $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}_n$. Обозначим через $\sigma_1^n$ однородный минимум решетки $\Lambda_1$. Мы докажем, что множество $\Lambda_1+\alpha$ содержит точку $z'=(z_1',\dots,z_n')$, для которой

$$|z_1'z_2'\cdots z_n'| \leqslant 2^{-n/2}\exp\left\{-n\sigma_1(\log n)^{\log\log n+2}-\log n\right\}.$$

Ясно, что из этого будет следовать оценка (I) для унимодулярной решетки $\Lambda=n^{1/n}\Lambda_1$ с однородным минимумом $\sigma^n=\sigma_1^n\cdot n$.

Для простоты считаем, что неоднородный минимум достигается. Тогда, не умаляя общности, можем считать, что множество $\Lambda_1+\alpha$ содержит точку $(a,a,\dots,a)$, $a>0$, так что для любой точки $z''=(z_1'',z_2'',\dots,z_n'')$ из $\Lambda_1+\alpha$ выполняется неравенство

$$a^n \leqslant |z_1''\cdot z_2''\cdots z_n''|. \tag{8}$$

Итак, для того чтобы доказать теорему, достаточно показать, что

$$a^n \leqslant 2^{-n/2}\exp\left\{-n\sigma_1(\log n)^{\rho+2}-\log n\right\}, \tag{9}$$

здесь и в дальнейшим для краткости записи положено $\rho = \log\log n$.

Доказывать теорему будем от противного. Предположим, что

$$a > 2^{-1/2} \exp\left\{-\sigma_1(\log n)^{\rho+2} - \frac{\log n}{n}\right\} \tag{10}$$

По теореме Минковского о выпуклом теле многогранник $G$ содержит отличную от нуля точку решетку $\Lambda_1$. Можно считать, что эта точка имеет вид $X=(x_1,\dots,x_\tau,-y_1,\dots,-y_m,z_1,\dots,z_s)$, где $\tau+m+s=n$. Не умаляя общности, считаем, что координаты точки $X$ удовлетворяют условиям

$$x_1,x_2,\dots,x_\tau,y_1,\dots,y_m > a,\quad a>|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant\dots\geqslant|z_s|.$$

Так как $\pm X+(a,a,\dots,a)\in\Lambda_1+\alpha$, то из (4) следует:

$$a^n\leqslant|(a+x_1)\cdots(a+x_\tau)(y_1-a)\cdots(y_m-a)(a+z_1)\cdots(a+z_s)|$$

$$a^n\leqslant|(x_1-a)\cdots(x_\tau-a)(a+y_1)\cdots(a+y_m)(a-z_1)\cdots(a-z_s)|.$$

Из этих неравенств, по лемме 2 (используя обозначения § 2),

$$a^{2n}\leqslant\left(\frac{U+V}{\tau+m}+a\right)^{\tau+m}\left(\frac{U+V}{\tau+m}-a\right)^{\tau+m}(a^2-z_1^2)\cdots(a^2-z_s^2) =$$

$$=\left\{\left(\frac{U+V}{\tau+m}\right)^2-a^2\right\}^{\tau+m}(a^2-z_1^2)\cdots(a^2-z_s^2)\leqslant\left\{T^2-a^2\right\}^t(a^2-z_1^2)\cdots(a^2-z_s^2),$$

где для краткости положено $T=\frac{U+V}{t}$, $t=\tau+m$. Отсюда выводим:

$$1\leqslant\left(\frac{T^2}{a^2}-1\right)^t\left(1-\frac{z_1^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{z_2^2}{a^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_s^2}{a^2}\right) \tag{11}$$

Из последнего неравенства и из того, что $|z_i|<a,\ i=1,\dots,s$, получаем

$$a\leqslant\frac{T}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

Из леммы 2 вытекает, что

$$T=\frac{U+V}{t}\leqslant e^{-\frac{t}{2n}+\frac{1}{2nt}}\leqslant e^{\frac{1-t}{2n}}.$$

Отсюда и из (12) получаем

$$a^n\leqslant 2^{-n/2}e^{\frac{1-t}{2}}.$$

Используя последнее неравенство и (10), получаем

$$t \leqslant 2n\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \log(en^2). \tag{13}$$

Из (13), учитывая условия теоремы $\left(\frac{1}{n^{1+1/m}} \leqslant \sigma_1 \leqslant \frac{10(\log n)^{\rho+1}}{n}\right)$, выводим:

$$t \leqslant 3n\sigma_1(\log n)^{\rho+2} < 30(\log n)^{2\rho+3}. \tag{14}$$

Из (14) и из того, что $s+t=n$, следует

$$n-30(\log n)^{2\rho+3} \leqslant s \leqslant n. \tag{15}$$

Далее из (11), используя неравенство (10) и учитывая, что $T \leqslant 1$, получаем:

$$1 \leqslant \left\{2\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2\log n}{n}\right) - 1\right\}^t \left(1-\frac{z_1^2}{a^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z_s^2}{a^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{2t\left(\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2\log n}{n}\right)-1\right) - \left(\left(\frac{z_1^2}{a^2}\right)+\cdots+\left(\frac{z_s}{a}\right)^2\right)\right\} \tag{16}$$

Оценим сверху выражение

$$\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2\log n}{n}\right) - 1 = \exp\{f(n)\} - 1,$$

где

$$f(n) = 2\sigma_1(\log n)^{\rho+2} + \frac{2\log n}{n}.$$

Известно, что

$$\exp\{f(n)\} - 1 = f(n)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{f(n)\}^{k-1}}{k!} \tag{17}$$

Существует такое число $n_0$, что при $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $f(n) < 1$. Поэтому для всех $n \geqslant n_0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\{f(n)\}^{k-1}}{k!} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!} < 2.$$

Отсюда и из (17) выводим:

$$\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2}+\frac{2\log n}{n}\right)-1<5\sigma_1(\log n)^{\rho+2}. \qquad (18)$$

Используя (16), (18) и (14), получаем:

$$1\leqslant\exp\left\{10+\sigma_1(\log n)^{\rho+2}-\left(\left(\frac{z_1}{a}\right)^2+\dots+\left(\frac{z_s}{a}\right)^2\right)\right\}<$$

$$<\exp\left\{30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4}-(\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_s)\right\}=\exp\left\{30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4}-B\right\}.$$

Итак, имеем:

$$1\leqslant\exp\left(30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4}-B\right) \qquad (19)$$

где для краткости положено $B=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_s$, $\xi_i=\left(\frac{z_i}{a}\right)^2$, $i=1,\dots,s$.

Из (19) вытекает, что

$$B\leqslant 30n\sigma_1^2(\log n)^{2\rho+4}. \qquad (20)$$

Так как для любого натурального $N$, $\pm NX+(a,a,\dots,a)\in\Lambda_1+\mathcal{L}$, то из (8) следует:

$$a^n\leqslant|(Nx_1+a)\cdots(Nx_r+a)(Ny_1-a)\cdots(Ny_m-a)(a+Nz_1)\cdots(a+Nz_s)|,$$

$$a^n\leqslant|(Nx_1-a)\cdots(Nx_r-a)(Ny_1+a)\cdots(Ny_m+a)(a-Nz_1)\cdots(a-Nz_s)|.$$

Из этих неравенств получаем

$$a^{2n}\leqslant(N^2T^2-a^2)^t\cdot|(a^2-N^2z_1^2)\cdots(a^2-N^2z_s^2)|,$$

или

$$1\leqslant\left(\frac{N^2T^2}{a^2}-1\right)^t\left|\left(1-\frac{N^2z_1^2}{a^2}\right)\cdots\left(1-\frac{N^2z_s^2}{a^2}\right)\right|$$

Используя (10) $T\leqslant 1$, выводим:

$$1\leqslant\left\{2N^2\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2}+\frac{2\log n}{n}\right)-1\right\}^t|(1-N^2\xi_1)\cdots(1-N^2\xi_s)|\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{t\log\left(2N^2\exp\left(2\sigma_1(\log n)^{\rho+2}+\frac{2\log n}{n}\right)\right)\right\}|(1-N^2\xi_1)\cdots(1-N^2\xi_s)| \qquad (21)$$

**Разбиение чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_s$ на классы.** Отрезок $(0,1]$ разобьем на интервалы:

$$\left(\frac{1}{2^2}, 1\right), \left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{2^2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{q^2}, \frac{1}{(q-1)^2}\right), \ldots .$$

Наши числа $1 > \xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_s$ разобьем на классы, объединяя числа $\xi_i$, содержащиеся в одном интервале, в один класс. Пусть

$$\left(\frac{1}{N_1^2}, \frac{1}{(N_1-1)^2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{N_k^2}, \frac{1}{(N_k-1)^2}\right), \ldots, \left(\frac{1}{N_\nu^2}, \frac{1}{(N_\nu-1)^2}\right), N_{k-1} < N_k,$$

все интервалы, которые содержат хотя бы одно $\xi_i$. Множество чисел $\xi_j$, содержащихся в интервале $\left(\frac{1}{N_i^2}, \frac{1}{(N_i-1)^2}\right)$, обозначим через $E_i$. Обозначим буквой $e_i$ сумму чисел $\xi_i$ из класса $E_i$. Мы имеем $B = \sum_{i=1}^{\nu} e_i$, где $B = \sum_{i=1}^{s} \xi_i$, $\nu$ – число классов. Положим

$$B_1^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} e_i, \quad B_2^{(k)} = \sum_{i=k+1}^{\nu} e_i ,$$

тогда $B = B_1^{(k)} + B_2^{(k)}$

Отметим основные свойства такого разбиения.

(I) Если $\xi, \xi' \in E_i$, то для любого натурального $N$ или $N^2\xi, N^2\xi' > 1$ или $N^2\xi, N^2\xi' < 1$.

(II) Все слагаемые в сумме $N_k^2 B_1^{(k)}$ больше единицы; все слагаемые в сумме $N_k^2 B_2^{(k)}$ меньше единицы;

(III) Все слагаемые в сумме $(N_k-1)^2 B_1^{(k-1)}$ больше единицы; все слагаемые в сумме $(N_k-1)^2 B_2^{(k-1)}$ меньше единицы.

Свойство (I) непосредственно следует из определения классов. Свойства (II) и (III) следуют из (I).

**Оценка снизу элементов $\xi_i$.** Пусть $\rho_1 = 8(\rho+3)\rho$,

$$\delta = \log\log n / \log n, \tag{22}$$
$$\left[(\log n)^{2\rho+4}\right] = \ell_0 \leq q \leq \ell = \left[s^{1-\delta}\right].$$

Тогда

$$\xi_q > \frac{\sum_{j=q}^{s} \xi_j}{q\rho_1}. \qquad (23)$$

Докажем неравенство (23). Пусть $\xi_q \in E_i$ . Оценим сначала число $N_i^2$ , отвечающее классу $E_i$ . По лемме 3

$$\xi_q(s-q) \geqslant \sum_{i=q}^{s} \xi_i \geqslant (s-q)\sigma_1^{2n/(s-q)} \qquad (24)$$

Оценим сверху $n/(s-q)$ . Используя (I5) и (22), получаем при достаточно большом $n$

$$s-q \geqslant n-30(\log n)^{2\rho+3}-s^{1-\delta} \geqslant n-30(\log n)^{2\rho+3}-n^{1-\delta} \geqslant n\left(1-\frac{2}{n^{\delta}}\right) \qquad (25)$$

Отсюда

$$\frac{n}{s-q} \leqslant 1+\frac{2}{n^{\delta}-2} \qquad (26)$$

Поэтому из (24) при достаточно большом $n$ следует

$$\xi_q > \sigma_1^2\,\sigma_1^{4/(n^{\delta}-2)} \geqslant \sigma_1^2/60.$$

Далее, из свойства (III): $(N_i-1)^2\xi_q < 1$ . Из последних неравенств вытекает, что

$$N_i^2 < \frac{120}{\sigma_1^2} \qquad (27)$$

Теперь покажем, что

$$B_2^{(i-1)} \geqslant \frac{n\sigma_i^2}{60}. \qquad (28)$$

Действительно, так как $B_2^{(i-1)} \geqslant \sum_{j=q}^{s} \xi_j$ , то из леммы 3:

$$B_2^{(i-1)} \geqslant \sum_{j=q}^{s} \xi_j \geqslant (s-q)\sigma_1^{2n/(s-q)}.$$

Из последнего неравенства, используя (25), (26), при достаточно большом $n$ , получим неравенство (28). В силу (2I), (I4), (27), и условий теоремы

$$1 \leqslant \exp\left(60(\log n)^{2\rho+4}\right)\cdot\left((N_i-1)^2\xi_1-1\right)\cdots\left((N_i-1)^2\xi_{l_{i-1}}-1\right)\left(1-(N_i-1)^2\xi_{l_{i-1}+1}\right)\cdots\left(1-(N_i-1)^2\xi_S\right)\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(60(\log n)^{2\rho+4}\right)\left((N_i-1)^2\ \frac{\xi_1+\dots+\xi_{l_{i-1}}}{l_{i-1}}\right)^{l_{i-1}}\exp\left(-(N_i-1)^2 B_2^{(i-1)}\right) <$$

$$< \exp\left\{60(\log n)^{2\rho+4}+l_{i-1}\log\left((N_i-1)^2\ \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}}+1\right)-(N_i-1)^2 B_2^{(i-1)}\right\} \qquad (29)$$

где $l_{i-1}$ – количество слагаемых в сумме $B_1^{(i-1)}$. Так как $l_{i-1} \geqslant l_0$, то из (29) вытекает:

$$(N_i-1)^2 B_2^{(i-1)} \leqslant 60(\log n)^{2\rho+4}+l_{i-1}\log\left((N_i-1)^2\ \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}}+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2l_{i-1}\log\left((N_i-1)^2\frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}}+1\right). \qquad (30)$$

Отсюда:

$$l_{i-1} \geqslant \frac{(N_i-1)^2 B_2^{(i-1)}}{2\log\left((N_i-1)^2\ \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}}+1\right)} \qquad (31)$$

Используя (20), (27), (28), (31), будем иметь

$$\log\left((N_i-1)^2\ \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}}+1\right)\leqslant\log\left\{(N_i-1)^2\frac{B_1^{(i-1)}}{(N_i-1)^2B_2^{(i-1)}}\,2\log\left((N_i-1)^2\ \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}}+1\right)+1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\log\left(3600(\log n)^{2\rho+4}\log n^2+1\right)\leqslant 2(\rho+3)\log\log n=2(\rho+3)\rho.$$

Итак,

$$\log\left((N_i-1)^2\ \frac{B_1^{(i-1)}}{l_{i-1}}+1\right)\leqslant 2(\rho+3)\rho. \qquad (32)$$

Теперь из (30) и (32) получаем, учитывая, что $l_{i-1}\leqslant q$,

$$(N_i-1)^2B_2^{(i-1)}\leqslant 2\ell_{i-1}\log\left((N_i-1)^2\frac{B_i^{(i-1)}}{\ell_{i-1}}+1\right)<4q(\rho+3)\rho,$$

или

$$(N_i-1)^2\leqslant\frac{4q(\rho+3)\rho}{B_2^{(i-1)}}. \tag{33}$$

Из того, что $\xi_q\in E_i$ и свойства (II) выводим: $N_i^2\xi_q>1$. Используя (33), получаем:

$$\xi_q>\frac{1}{N_i^2}=\frac{(N_i-1)^2}{N_i^2}\cdot\frac{1}{(N_i-1)^2}>\frac{B_2^{(i-1)}}{8q(\rho+3)\rho}\geqslant\frac{\sum_{j=q}^{s}\xi_j}{q\rho_1},$$

что и доказывает неравенство (23).

Пусть снова $\rho_1=8\rho(\rho+3)$, $\delta=\log\log n/\log n$, $\ell=[s^{1-\delta}]$. Докажем, что

$$B>\ell^{1+\frac{1}{2\rho_1}}\cdot\sigma_1^2\,\frac{1}{(\log n)^{\frac{\rho+2}{\rho_1}}} \tag{34}$$

Действительно, рассмотрим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

1) $\varphi(x)=\varphi([x])(1-\{x\})+\{x\}\varphi([x]+1)$, $x=[x]+\{x\}$,
причем $\varphi(q)=\sum_{i=q}^{s}\xi_i$ при целом $x=q$,

$$\left[(\log n)^{2\rho+4}\right]=\ell_0\leqslant q\leqslant\ell=[s^{1-\delta}],\ \delta=\frac{\log\log n}{\log n};\ \varphi'(x)=-\xi_{[x]}\text{ при } x\neq[x];$$

2) $\psi(x)=e^{1+1/2\rho_1}\cdot\sigma_1^2\cdot x^{-1/2\rho_1}$

Эти функции монотонно убывают и $\varphi(\ell)\geqslant\psi(\ell)$.

Докажем, что $\varphi(q)\geqslant\psi(q)$ для всех целых чисел $\ell_0\leqslant q<\ell$. Действительно, в противном случае $\varphi(q_0)<\psi(q_0)$ для некоторого $\ell_0\leqslant q_0\leqslant\ell$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}\psi(q_0+1)&\leqslant\varphi(q_0+1)\\ \psi(q_0)&\geqslant\varphi(q_0)\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Так как

$$\psi'(x)=-\frac{\ell^{1+\frac{1}{2\rho_1}}\cdot\sigma_1^2}{2\rho_1}\cdot x^{-\frac{1}{2\rho_1}-1},$$

то

$$\psi'(q_0) = -\frac{\psi(q_0)}{2\rho_1 q_0} .$$

Из (35) вытекает, что $|\Delta\varphi| \leqslant |\Delta\psi|$, где $\Delta\varphi = \varphi(q_0+1) - \varphi(q_0)$, $\Delta\psi = \psi(q_0+1) - \psi(q_0)$ . Отсюда

$$\xi_{q_0} \leqslant \frac{\psi(x_1)}{2\rho_1 x_1} \tag{36}$$

где $q_0 \leqslant x_1 \leqslant q_0 + 1$

Очевидно, что

$$|\psi(x_1) - \psi(q_0+1)| \leqslant |\psi(q_0) - \psi(q_0+1)| \leqslant |\psi'(x_1)| = \frac{\psi(x_1)}{2\rho_1 x_1} \leqslant \frac{\psi(x_1)}{2\rho_1 q_0} .$$

Отсюда

$$\psi(x_1) \leqslant \frac{2\rho_1 q_0 \psi(q_0+1)}{2\rho_1 q_0 - 1} .$$

Поэтому из (36) выводим:

$$\xi_{q_0} \leqslant \frac{\psi(q_0+1)}{2\rho_1 q_0 - 1} \leqslant \frac{\varphi(q_0)}{2\rho_1 q_0 - 1} .$$

С другой стороны, по неравенству (23)

$$\xi_{q_0} > \frac{\varphi(q_0)}{\rho_1 q_0} .$$

Из последних двух неравенств вытекает, что $\rho_1 q_0 < 1$ , что невозможно. Итак, мы доказали, что $\varphi(q) \geqslant \psi(q)$ для всех $q$ .

$$\left[(\log n)^{2\rho+4}\right] \leqslant q \leqslant \left[s^{1-\delta}\right] .$$

Поэтому верна оценка

$$B \geqslant \varphi(\ell_0) \geqslant \psi(\ell_0) \geqslant \ell^{1+1/2\rho_1} \sigma_1^2 \frac{1}{(\log n)^{\rho+2/\rho_1}}$$

и мы доказали (34).

При достаточно большом $n$ неравенство (34) противоречит неравенству (20). Это противоречие доказывает теорему.

Литература


1. Б а к и е в К.Б., П е н А.С., С к у б е н к о Б.Ф. К оценке сверху произведения линейных неоднородных форм. - Мат.заметки, 1978, т.23, № 6, с.789-797.
2. С к у б е н к о Б.Ф. К гипотезе Минковского при больших $n$. - Труды Мат.ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР, 1978, т.148, с.218-224.
3. С к у б е н к о Б.Ф., Б а к и е в К. Теорема переноса в неоднородной задаче Минковского. - Зап.научн.семинаров ЛОМИ, 1979, т.91, с.119-124.