Н. Ю. Капустин, А. С. Макин, О точных по порядку оценках антиаприорного типа для собственных и присоединенных функций эллиптического оператора произвольного порядка, *Докл. АН СССР*, 1985, том 283, номер 2, 278–280

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Н.Ю. КАПУСТИН, А.С. МАКИН

О ТОЧНЫХ ПО ПОРЯДКУ ОЦЕНКАХ АНТИАПРИОРНОГО ТИПА ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 25 V 1984)

В настоящей работе устанавливаются точные по порядку соотношения между L_2-нормами собственных и присоединенных функций эллиптического оператора произвольного порядка, справедливые при любом значении спектрального параметра λ. Доказательство существенно использует метод В.А. Ильина, изложенный в работе [1].

Рассмотрим линейный несамосопряженный оператор

$$(1)\qquad \mathcal{L}u = \sum_{|\alpha|=m,\ |\beta|=m} D^{\alpha}(A_{\alpha,\beta}(x)D^{\beta}u) + \sum_{|\gamma|\leqslant 2m-1} A_{\gamma}(x)D^{\gamma}u,$$

заданный в произвольной области G пространства R^N. Коэффициенты $A_{\alpha,\beta}(x)$ являются вещественнозначными, а коэффициенты $A_{\gamma}(x)$, вообще говоря, комплекснозначными функциями. Для простоты будем считать функции $A_{\alpha,\beta}(x)$, $A_{\gamma}(x)$ бесконечно дифференцируемыми в области G.

Пусть оператор (1) является равномерно эллиптическим на любом компакте K области G, т.е. $A_{\alpha,\beta}(x) = A_{\beta,\alpha}(x)$ и существует положительная постоянная $\rho(K)$ такая, что для любого вещественного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ и любой точки x, принадлежащей компакту K, выполнено неравенство

$$(2)\qquad (-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|=m,\ |\beta|=m} A_{\alpha,\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta} \geqslant \rho(K)|\xi|^{2m}.$$

Следуя В.А. Ильину, под *собственной функцией оператора* (1), *отвечающей комплексному собственному значению* λ, будем понимать любую не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{0}{u}(x)$ из класса $C^{(2m)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $\mathcal{L}\overset{0}{u} + \lambda\overset{0}{u} = 0$.

Аналогично, под *присоединенной функцией порядка* l, $l = 1, 2, \ldots$, *отвечающей тому же* λ *и собственной функции* $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{l}{u}(x)$ из класса $C^{(2m)}(G)$, являющуюся регулярным решением уравнения $\mathcal{L}\overset{l}{u} + \lambda\overset{l}{u} = \overset{l-1}{u}$.

Краевые условия, которым удовлетворяют собственные и присоединенные функции, совершенно произвольны.

Теорема 1. *Пусть фиксированы два произвольных компакта K и K' области G, первый из которых содержится строго внутри второго.*

Тогда существует постоянная C, зависящая лишь от компактов K и K', коэффициентов оператора (1), *константы $\rho(K')$ из неравенства* (2), *размерности пространства, порядка оператора* (1) *и номера $l + 1$ присоединенной функции, такая, что для любого комплексного λ и любого $l = 0, 1, \ldots$ справедлива оценка*

(3) $\quad \|\overset{l}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(1 + |\operatorname{Re}\lambda|^{(2m-1)/2m})\|\overset{l+1}{u}\|_{L_2(K')}.$

Обозначим через $\eta(x)$ произвольную фукнцию из класса $C^{(2m+1)}(R^N)$, равную единице в каждой точке шара $\Omega_R^{x_0}$ и нулю вне шара $\Omega_{R+\delta}^{x_0}$. Теорема 1 непосредственно вытекает из леммы Гейне–Бореля и следующего утверждения.

Лемма. *Пусть фиксированы произвольные положительные числа R, δ, ϵ и произвольное четное натуральное число k.*

Тогда для любой точки x_0 произвольного компакта K области G, расстояние от которого до границы области G превосходит число $R + \delta + 2\epsilon$, существуют постоянные C_k^l и $\hat{C}_k^l$, зависящие лишь от R, δ, ϵ, k, K, от номера присоединенной функции $l + 1$, от коэффициентов оператора (1), *от константы $\rho(\overline{K \cup \Omega_{R+\delta+\epsilon}^{x_0}})$ из неравенства* (2) *и от размерности пространства, такие, что для любого комплексного λ и любого $l = 0, 1, \dots$ справедливо неравенство*

$$\int_{\Omega_{R+\delta}^{x_0}} \eta^k |\overset{l}{u}|^2 dx \leqslant C_k^l (1 + |\operatorname{Re}\lambda|^{(2m-1)/m}) \int_{\Omega_{R+\delta}^{x_0}} \eta^{k-2} |\overset{l+1}{u}|^2 dx +$$

$$+ \hat{C}_k^l (1 + |\operatorname{Re}\lambda|^{(2m-2)/m}) \int_{\Omega_{R+\delta+\epsilon}^{x_0}} |\overset{l+1}{u}|^2 dx.$$

Для эллиптического оператора второго порядка при ограничении

(4) $\quad |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant M\sqrt{|\lambda|}$

на область изменения спектрального параметра теорема 1 доказана В.А. Ильиным в работе [1]. Для обыкновенного дифференциального оператора

$$Lu = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u$$

при условии $|\operatorname{Im}\mu| \leqslant C$, где

$$\mu = \begin{cases} [(-1)^{n/2} \cdot (-\lambda)]^{1/n}, & \text{если } n \text{ четно}, \\ [(-i) \cdot \lambda]^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0, \\ [i\lambda]^{1/n}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \operatorname{Im}\lambda < 0, \end{cases}$$

оценка

$$\|\overset{l}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', l)(|\mu|^{n-1} + 1)\|\overset{l+1}{u}\|_{L_2(K')}, \qquad l = 0, 1, \dots,$$

аналогичная оценке (3), установлена в работе В.А. Ильина [2]. Заметим также, что А.С. Макин в работе [3] для произвольного сильно эллиптического оператора порядка $2m$ получил оценку

(5) $\quad \|\overset{l}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', l)(|\operatorname{Re}\lambda| + \ln(|\lambda| + 2))\|\overset{l+1}{u}\|_{L_2(K')}, \qquad l = 0, 1, \dots,$

справедливую при любом комплексном λ. Легко видеть, что если главная часть оператора самосопряженная, то оценка (3) представляет собой непосредственное усиление оценки (5).

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Пусть фиксированы два произвольных компакта K и K' области G, первый из которых содержится строго внутри второго.*

Тогда существует постоянная $\tilde{C}$, зависящая лишь от компактов K и K', коэффициентов оператора (1), *константы $\rho(K')$ из неравенства* (2), *размерности про-*

странства, порядка оператора (1), *номера l присоединенной функции и порядка дифференцирования $|h|$, такая, что для любого комплексного λ, любого $l = 0, 1, \ldots$ и любого h ($|h| \geqslant 1$) справедлива оценка*

$$(6) \qquad \|D^h \overset{l}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant \tilde{C}(|\operatorname{Re}\lambda|^{|h|/2m} + 1)\|\overset{l}{u}\|_{L_2(K')}.$$

Оценка (6) несколько лучше оценок для частных производных присоединенных функций, полученных в работе [3].

Авторы выражают глубокую благодарность своему учителю проф. В.А. Ильину за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Всесоюзный заочный машиностроительный институт
Москва

Поступило
11 VI 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 1, с. 30–37. 2. *Ильин В.А.* – Там же, 1980, т. 16, № 5, с. 771–794. 3. *Макин А.С.* – ДАН, 1983, т. 269, № 2, с. 281–284.

УДК 517.444 МАТЕМАТИКА

В.М. КОКИЛАШВИЛИ, М. КРБЕЦ (ЧССР)

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РИССОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ДРОБНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

(Представлено академиком С.М. Никольским 28 V 1984)

В настоящей работе дано полное описание тех весовых пространств Орлича, в которых ограничен риссов потенциал и оператор, порожденный максимальной функцией дробного порядка. Установлена теорема вложения для весовых пространств Соболева–Орлича.

Впервые неравенство для норм дробных интегралов риссовых потенциалов в одномерном случае установлено Харди и Литтлвудом [1]. Им также принадлежит весовое неравенство в случае, когда вес имеет степенной вид. Для n-мерных пространств С.Л. Соболевым [2] обобщено вышеупомянутое неравенство Харди и Литтлвуда в невесовом случае, а в случае степенных весов в R^n соответствующий результат получен Стейном и Вейсом [3]. Дальнейшие обобщения можно найти в работах В.П. Ильина [4], П.И. Лизоркина [5], Т. Уолша [6], см. также [7]. Теоремы вложения в невесовых пространствах Орлича см. у Трудинчера, Калугиной, Климова и др.

Макенхаупт и Уиден [8] дали полное описание тех весовых пространств Лебега, в которых ограничены операторы типа потенциала и связанные с ними максимальные функции дробного порядка. Керман и Торчинский [9] изучили аналогичную задачу для классических максимальных функций Харди и Литтлвуда в весовых пространствах Орлича.

Рассмотрим интегральные операторы:

$$(1) \qquad T_\gamma f(x) = \int_{R^n} f(t)|x-t|^{\gamma-n}dt;$$