Г. М. Кобельков, В. М. Староверов, О предельном поведении решений уравнений слабосжимаемой обобщенной ньютоновской жидкости с двумя малыми параметрами,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 4, 29–33

Замечание 4. Поскольку система тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка сама по себе конечно базируема, то в соединении со следствием 2 мы получаем, что объединенная система, состоящая из тождеств, отвечающих диаграммам Юнга, содержащим прямоугольник $k\times l$, и тождеств Капелли $(k+1)$-го порядка, является конечно базируемой.

Замечание 5. Доказательство шпехтовости многообразия V_4, представленное С. П. Мищенко (см. [2, § 6, предложение 6.1]), изложено схематично и не содержит явного доказательства конечной базируемости тождеств, отвечающих диаграммам Юнга, содержащим прямоугольник 3×2, по модулю тождеств Капелли порядка 4. Следствие 2 закрывает этот пробел, уточняя, таким образом, упомянутое доказательство.

В заключение автор выражает сердечную признательность С. П. Мищенко за многочисленные советы и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стовба В. В. О конечной базируемости некоторых многообразий алгебр Ли и ассоциативных алгебр//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1982. № 2. 54—58.
2. Мищенко С. П. Рост многообразий алгебр Ли//Успехи матем. наук. 1990. **45**, вып. 6 (276). 25—45.
3. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли М., 1985.
4. Ленг С. Алгебра. М., 1968.

Поступила в редакцию
22.05.95

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 517.95.956

Г. М. Кобельков, В. М. Староверов

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ОБОБЩЕННОЙ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С ДВУМЯ МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Пусть $(\mathbf{u}, p)$ — решение стационарной задачи Стокса

$$-\Delta\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f},\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0,\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega}=0, \tag{1}$$

где $(p,\ 1)\equiv\int\limits_\Omega p\,dx=0$, а $(\mathbf{u}_\varepsilon,\ p_\varepsilon)$ — решение задачи

$$-\Delta\mathbf{u}_\varepsilon+\nabla p_\varepsilon=\mathbf{f},\ \varepsilon p_\varepsilon+\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon=0,\ \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\Omega}=0. \tag{2}$$

Задача вида (2) называется ε-регуляризацией задачи (1). В [1, 2] доказано, что $\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}\|_1+\|p_\varepsilon-p\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Более того, нетрудно показать, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}\|_1+\|p_\varepsilon-p\|\leqslant c\varepsilon. \tag{3}$$

В [3] в задаче (1) вместо оператора Лапласа рассматривался квазилинейный эллиптический оператор $\operatorname{div}(\chi(|\nabla\mathbf{u}|)\nabla\mathbf{u})$, $\chi(t)\equiv 1+k(t)$, причем допускался случай $\chi(t)\to\infty$ при $t\to 0$. Наряду с этой задачей рассматривалось уравнение со срезкой $\chi_\delta(t)=1+k_\delta(t)\equiv 1+\min\{k(\delta),\ k(t)\}$ вместо χ. Было показано, что $\|\mathbf{u}_\delta-\mathbf{u}\|_1+\|p_\delta-p\|\to 0$ при $\delta\to 0$.

В настоящей работе исследуется более общий случай. А именно исследуется краевая задача Стокса с нелинейным оператором вместо оператора Лапласа и ее ε-регуляризация со срезкой. Доказано, что $\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}\|_1\to 0$ при $\delta, \varepsilon\to 0$.

Итак, рассмотрим систему нелинейных уравнений, описывающих движение обобщенной несжимаемой ньютоновской жидкости [4] в ограниченной области $\Omega\in R^3$ с кусочно-липшицевой границей $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned}&\operatorname{div}(\chi(|\nabla\mathbf{u}|)\nabla\mathbf{u})+\nabla p=\mathbf{f},\\&\operatorname{div}\mathbf{u}=0,\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0};\end{aligned}\tag{4}$$

здесь $\chi(t)=1+k(t)$, $k(t)\geqslant 0$.

Введем пространство $\mathbf{H}$, являющееся замыканием в норме $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega)=(\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))^3$ пространства вещественнозначных бесконечно дифференцируемых соленоидальных вектор-функций с носителем в Ω. Обобщенным решением задачи (4) будем называть функцию $\mathbf{u}\in\mathbf{H}$, такую, что для любой функции $\mathbf{v}\in\mathbf{H}$ справедливо соотношение

$$(\chi(|\nabla\mathbf{u}|)\nabla\mathbf{u},\ \nabla\mathbf{v})=(\mathbf{f},\ \mathbf{v}).$$

Будем предполагать, что на функцию $k(t)$ наложены следующие ограничения:

а) $s(t)=k(t)t$ является возрастающей функцией при $t>0$;

б) $s(t)\to 0$ при $t\to 0$; (*)

в) $k(t)$ является убывающей функцией при $t>0$.

Отметим, что функция $k(t)$ может стремиться к бесконечности при $t\to 0$, что делает задачу существенно нелинейной. Взяв в качестве функции $k(t)$ ее срезку $k_\delta(t)=\min\{k(\delta), k(t)\}$, получим регуляризованную задачу:

$$\begin{aligned}&-\operatorname{div}((1+k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta|))\nabla\mathbf{u}_\delta)+\nabla p_\delta=\mathbf{f},\\&\operatorname{div}\mathbf{u}_\delta=0,\ \mathbf{u}_\delta|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{5}$$

Теоремы существования и единственности обобщенного решения задач (4) и (5), а также численные методы их решения можно найти в [3].

Наряду с задачей (5) рассмотрим задачу, описывающую обобщенную сжимаемую ньютоновскую жидкость:

$$\begin{aligned}&-\operatorname{div}((1+k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|))\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon)+\nabla p_\delta^\varepsilon=\mathbf{f},\\&\operatorname{div}\mathbf{u}_\delta^\varepsilon+\varepsilon p_\delta^\varepsilon=0,\ \mathbf{u}_\delta^\varepsilon|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{6}$$

Теоремы существования и единственности обобщенного решения данной задачи могут быть легко получены с помощью методики, описанной в [5]. Аналогично (1) определим обобщенное решение задачи (6) как функцию $\mathbf{u}_\delta^\varepsilon\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1$, такую, что для любой функции $\mathbf{v}\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1$ справедливо соотношение

$$(\chi_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|)\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon,\ \nabla\mathbf{v})+\frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{div}\mathbf{u}_\delta^\varepsilon,\ \operatorname{div}\mathbf{v})=(\mathbf{f},\ \mathbf{v}).$$

Отметим, что систему уравнений (6) можно записать несколько иначе:

$$\begin{aligned}&-\operatorname{div}((1+k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|))\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_\delta^\varepsilon=\mathbf{f},\\&\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}.\end{aligned}\tag{7}$$

Везде в дальнейшем, как правило, мы будем иметь дело только с обобщенными решениями задач (4)—(7).

Нам понадобятся две следующие леммы, доказательства которых можно найти в [3].

Лемма 1. *Пусть T — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\,,)$ и $s(t)=k(t)t$ — возрастающая положительная функция при $t>0$. Тогда справедливо следующее неравенство:*

$$(k(|a|)a-k(|b|)b,\ a-b)\geqslant 0 \text{ для любых } a,\ b\in T,$$

причем равенство достигается только при $a=b$.

Лемма 2. *Для любых $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|k_\varepsilon(|\nabla\mathbf{u}_1|)\nabla\mathbf{u}_1-k_\varepsilon(|\nabla\mathbf{u}_2|)\nabla\mathbf{u}_2\|\leqslant k(\varepsilon)\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_1.$$

В работе также будет использовано следующее неравенство, которое иногда называют теоремой о дивергенции, или неравенством Бабушки—Брецци (см., например, [6, 7] и цитированную там литературу):

$$\|p\|\leqslant C_0 \sup_{\mathbf{w}\in \overset{\circ}{W}{}_2^1} \frac{(p,\ \operatorname{div}\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1}. \tag{8}$$

Зафиксируем некоторое $\delta>0$ и докажем сходимость обобщенного решения задачи (6) к решению задачи (5). Имеет место

Утверждение 1. *Пусть $\delta>0$ фиксировано. Тогда $\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}_\delta\|_1\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, где $\mathbf{u}_\delta^\varepsilon$ — обобщенное решение задачи* (6), *а $\mathbf{u}_\delta$ — обобщенное решение задачи* (5).

Доказательство. Умножая скалярно (7) на $\mathbf{u}_\delta^\varepsilon$, легко получить оценку нормы $\mathbf{u}_\delta^\varepsilon$:

$$\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon\|_1\leqslant \|\mathbf{f}\|_{-1}. \tag{9}$$

Для оценки $\|p_\delta^\varepsilon\|$ умножим скалярно первое уравнение в (6) на произвольную, отличную от нуля вектор-функцию $\mathbf{w}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1$ и разделим полученное соотношение на $\|\mathbf{w}\|_1$. Имеем

$$\frac{(\nabla p_\delta^\varepsilon,\ \mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1}=-\frac{(\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon,\ \nabla\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1}-\frac{(k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|)\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon,\ \nabla\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1}+(\mathbf{f},\ \mathbf{w}),$$

откуда непосредственно следует неравенство

$$\frac{|(\nabla p_\delta^\varepsilon,\ \mathbf{w})|}{\|\mathbf{w}\|_1}\leqslant(1+k(\varepsilon))\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon\|_1+\|\mathbf{f}\|_{-1}. \tag{10}$$

Так как правая часть неравенства (10) не зависит от $\mathbf{w}$, то в качестве $\mathbf{w}$ можно взять такую функцию, что $|(\nabla p_\delta^\varepsilon, \mathbf{w})|\geqslant C_1\|p_\delta^\varepsilon\|\,\|\mathbf{w}\|_1$ (такая функция существует согласно (8)). Теперь из (10) и (9) непосредственно вытекает оценка

$$\|p_\delta^\varepsilon\|\leqslant C_2\|\mathbf{f}\|_{-1}; \tag{11}$$

здесь C_2 зависит от ε.

Введем обозначения для разностей решений систем уравнений (5) и (6): $\mathbf{v}_\delta^\varepsilon=\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}_\delta$ и $r_\delta^\varepsilon=p_\delta^\varepsilon-p_\delta$. Вычитая друг из друга соответствующие уравнения систем (5) и (6), получим следующее тождество:

$$\operatorname{div}((1+k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta|))\nabla\mathbf{u}_\delta)-\operatorname{div}((1+k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|))\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon)+\nabla r_\delta^\varepsilon=\mathbf{0},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_\delta^\varepsilon+\varepsilon p_\delta^\varepsilon=0,\ \mathbf{u}_\delta^\varepsilon|_{\partial\Omega}=\mathbf{0},\ \mathbf{v}_\delta^\varepsilon|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}, \tag{12}$$

Теперь оценим $\|r_\delta^\varepsilon\|$ способом, аналогичным используемому при оценке $\|p_\delta^\varepsilon\|$. Умножим скалярно первое уравнение в (12) на произвольную функцию $\mathbf{w}\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1$ и поделим на $\|\mathbf{w}\|_1$, после чего получим соотношение

$$\frac{(r_\delta^\varepsilon,\ \operatorname{div}\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1}=-\frac{(\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\nabla\mathbf{u}_\delta,\ \nabla\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1}-$$
$$-\frac{(k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|)\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta|)\nabla\mathbf{u}_\delta,\ \nabla\mathbf{w})}{\|\mathbf{w}\|_1},$$

откуда, используя оценку из леммы 2, сразу находим

$$\frac{|(r_\delta^\varepsilon,\ \mathbf{w})|}{\|\mathbf{w}\|_1}\leqslant C_3\|\mathbf{v}_\delta^\varepsilon\|_1;$$

здесь C_3, вообще говоря, зависит от ε.

Далее, повторяя рассуждения, примененные для доказательства оценки (8), получим

$$\|r_\delta^\varepsilon\|\leqslant C_4\|\mathbf{v}_\delta^\varepsilon\|_1, \tag{13}$$

где C_4 зависит от ε.

Наконец, умножим скалярно первое уравнение в (12) на $\mathbf{v}_\delta^\varepsilon$, а второе уравнение — на r_δ^ε. Складывая результаты, имеем

$$(k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon|)\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-k_\delta(|\nabla\mathbf{u}_\delta|)\nabla\mathbf{u}_\delta,\ \nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\nabla\mathbf{u}_\delta)+$$
$$+(\nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\nabla\mathbf{u}_\delta,\ \nabla\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\nabla\mathbf{u}_\delta)=\varepsilon(p_\delta^\varepsilon,\ r_\delta^\varepsilon),$$

откуда ввиду леммы 1 следует оценка

$$\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}_\delta\|_1\leqslant\varepsilon\|p_\delta^\varepsilon\|\,\|r_\delta^\varepsilon\|.$$

Используя соотношения (11) и (13) из последнего неравенства, имеем

$$\|\mathbf{v}_\delta^\varepsilon\|_1\leqslant C_5\varepsilon\|\mathbf{f}\|_{-1}.$$

Последнее неравенство завершает доказательство утверждения 1.

Следующим шагом будет доказательство сходимости решения задачи (6) (или, что одно и то же, (7)) при $\delta\to0$ и фиксированном $\varepsilon>0$ к решению задачи (4). Имеет место

Утверждение 2. *Пусть* $\varepsilon>0$ *фиксировано. Тогда* $\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_1\to0$ *при* $\delta\to0$, *причем скорость сходимости не зависит от* ε; *здесь* $\mathbf{u}_\delta^\varepsilon$ — *решение задачи* (6).

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon>0$. Выберем некоторые $\delta_1\geqslant0$ и $\delta_2\geqslant0$. Для определенности будем предполагать, что $\delta_1<\delta_2$ (из чего согласно условиям (*) следует, что $k(\delta_1)>k(\delta_2)$). Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения:

$$k_1(x)=k_{\delta_1}(x),\ \ k_2(x)=k_{\delta_2}(x),\ \ k_{1,2}(x)=k_{\delta_1}(x)-k_{\delta_2}(x);$$
$$\mathbf{u}_1(x)=\mathbf{u}_{\delta_1}^\varepsilon,\ \ \mathbf{u}_2(x)=\mathbf{u}_{\delta_2}^\varepsilon;$$
$$\mathbf{v}(x)=\mathbf{u}_{\delta_1}^\varepsilon-\mathbf{u}_{\delta_2}^\varepsilon,\ \ r(x)=p_{\delta_1}^\varepsilon-p_{\delta_2}^\varepsilon.$$

Вычитая первое уравнение в (7) для $\delta=\delta_1$ из того же уравнения для $\delta=\delta_2$, получим соотношение

$$-\varepsilon(\operatorname{div}((1+k_1(|\nabla\mathbf{u}_1|))\nabla\mathbf{u}_1)-\operatorname{div}((1+k_2(|\nabla\mathbf{u}_2|))\nabla\mathbf{u}_2))-\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}=0,$$

или, что то же самое,

$$-\varepsilon(\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}_1)-\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}_2))-\varepsilon(\operatorname{div}(k_1(|\nabla \mathbf{u}_1|)\nabla \mathbf{u}_1)-$$
$$-\operatorname{div}(k_1(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2))-\varepsilon(\operatorname{div}(k_1(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2)-$$
$$-\operatorname{div}(k_2(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2))-\nabla \operatorname{div}\mathbf{v}=\mathbf{0}.$$

Умножим последнее равенство скалярно на $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$:

$$\varepsilon(\nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2,\ \nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2)+\varepsilon(k_1(|\nabla \mathbf{u}_1|)\nabla \mathbf{u}_1-$$
$$-k_1(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2,\ \nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2)+\varepsilon(k_1(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2-$$
$$-k_2(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2,\ \nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2)+(\operatorname{div}\mathbf{v},\ \operatorname{div}\mathbf{v})=0;$$

отсюда следует оценка

$$(\nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2,\ \nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2)+(k_1(|\nabla \mathbf{u}_1|)\nabla \mathbf{u}_1-$$
$$-k_2(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2,\ \nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2)\leqslant|((k_1(|\nabla \mathbf{u}_2|)-$$
$$-k_2(|\nabla \mathbf{u}_2|))\nabla \mathbf{u}_2,\ \nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2)|.$$

Согласно лемме 1 из последнего соотношения вытекает неравенство

$$\|\mathbf{v}\|_1^2\leqslant|(k_{1,2}(|\nabla \mathbf{u}_2|)\nabla \mathbf{u}_2,\ \nabla \mathbf{u}_1-\nabla \mathbf{u}_2)|. \tag{14}$$

Осталось заметить, что из (*) следует равенство $k_{1,2}(|x|)x\leqslant$ $\leqslant k_{1,2}(|\delta_2|)\delta_2=s(\delta_2)$. Таким образом, из (14) имеем

$$\|\mathbf{v}\|_1\leqslant\mu(\Omega)\,s(\delta_2).$$

Из свойств (*) и последнего неравенства получаем требуемое утверждение.

Отметим, что при $\varepsilon=0$ данная теорема доказана в [3].

Итак, нами доказано, что:

1) $\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}_0^\varepsilon\|_1\to 0$ при $\delta\to 0$ и фиксированном $\varepsilon\geqslant 0$ равномерно по ε;

2) $\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}_\delta^0\|_1\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ и фиксированном $\delta>0$. Отсюда по известной теореме математического анализа вытекает, что имеется сходимость одновременно по двум параметрам (в том числе и по ε при $\delta=0$), т. е. верна

Теорема. *Пусть* $\mathbf{u}_\delta^\varepsilon$ — *обобщенное решение задачи* (6), *а* $\mathbf{u}$ — *обобщенное решение задачи* (4). *Тогда* $\|\mathbf{u}_\delta^\varepsilon-\mathbf{u}\|_1\to 0$ *при* $\delta\to 0$ *и* $\varepsilon\to 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94—01—01762) и Международного научного фонда (M25000).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
3. Староверов В. М. Об итерационных методах решения нелинейной задачи Стокса. Препринт ВЦ СО РАН. № 1014. Новосибирск, 1994.
4. Литвинов В. Г. Движение нелинейной вязкой жидкости. М., 1982.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
6. Kobelkov G. M., Valedinskiy V. D. On the inequality $\|p\|\leqslant C\|\nabla p\|_{-1}$ and its finite dimensional image//Sov. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 1986. **1**, N 3. 189—201.
7. Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. М., 1989.

Поступила в редакцию
29.05.95