Математические заметки

том 62 выпуск 3 сентябрь 1997

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ С ФИКСИРОВАННЫМ СРЕДНИМ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЗАДАННЫЕ ТОЧКИ

А. Д. Валиев, А. С. Демидов

1. В настоящей заметке дается алгебраическое описание указанных в заголовке полиномов. Рассматриваемый вопрос возникает, например, в обратной задаче о равновесии плазмы в токамаке. В работе [1] показано, что по данным магнитных измерений в нескольких точках на кожухе токамака можно оценить компоненты полоидального магнитного поля на свободной границе плазмы, отделенной от кожуха вакуумной зоной. В оценках фигурируют положительные числа M_g^* и M_g, которые определяются следующим образом: включение $m \in\ ]M_g^*, M_g[$ эквивалентно тому, что линии уровня $\{\zeta \in V_S \subset \mathbb{C} : U_g(\zeta) = m\}$ функции

$$U_g(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\ln r + \frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\operatorname{Re}\biggl(\frac{g_k}{k}\Bigl(r^k - \frac{1}{r^k}\Bigr)e^{ik\varphi}\biggr), \qquad re^{i\varphi} = \zeta \in V_S,$$

гомеоморфны окружности; здесь V_S – некоторая окрестность окружности $S = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$, а гармоническая в V_S функция U_g, построенная по положительной аналитической функции

$$g(\varphi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\biggl(\sum_{k\geqslant 1} g_k e^{ik\varphi}\biggr), \qquad g_k \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

такова, что $U_g|_S = 0$ и $(\partial U/\partial r)|_S = g$. При этом, функция g удовлетворяет условию $g(\varphi_j) = d_j$, где числа $d_j > 0$ – это данные магнитной диагностики в n точках, соответствующих углам φ_j, $j = 1, \dots, n$.

Ниже дается алгебраический критерий таких полиномиальных функций g, степень которых меньше n.

2. Итак, пусть на окружности S заданы n различных точек $\zeta_j = e^{i\varphi_j}$. Обозначим через X эрмитову матрицу Y^*Y, где $n\times n$-матрица $Y = (y_{kj})$ имеет своими элементами коэффициенты базисных полиномов Лагранжа

$$L_j(\zeta) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{\zeta - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k} = \sum_{k=1}^{n} y_{kj}\zeta^{k-1}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00733.

Обозначим через G_n множество всех неотрицательных полиномов

$$g\colon \mathbb{C} \ni \zeta \mapsto g(\zeta) = g_0 + \operatorname{Re}\biggl(\sum_{k=1}^{n-1} g_k \zeta^k\biggr), \qquad g_k \in \mathbb{C}, \quad g_0 \geqslant 0,$$

степень которых меньше n.

Теорема. *Пусть заданы число $\sigma_0 > 0$ и вектор $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $d_j \geqslant 0$. Тогда три следующих утверждения эквивалентны:*

1) *существует тригонометрический полином $g \in G_n$ такой, что*

$$g(\zeta_j) = d_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

и

$$g_0 = \sigma_0; \tag{3}$$

2) $\min_{\boldsymbol{\psi}} \sigma(\boldsymbol{\psi}) \leqslant \sigma_0 \leqslant \max_{\boldsymbol{\psi}} \sigma(\boldsymbol{\psi})$, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$, *где* $\sigma(\boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\rho}, X\boldsymbol{\rho})$ – *скалярное произведение* $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\psi}) = (\sqrt{d_1}e^{i\psi_1}, \dots, \sqrt{d_n}e^{i\psi_n})$ *и* $X\boldsymbol{\rho}$;

3) *если $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ – собственные значения матрицы X и $P = (p_{kj})$ – унитарная матрица такая, что*

$$P^{-1}XP = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то существует вектор $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ такой, что

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j \overline{\alpha}_j = \sigma_0 \tag{4}$$

и

$$|\rho_j|^2 = d_j, \qquad j = 1, \dots, n, \tag{5}$$

где $\rho_j = \sum_k p_{kj}\alpha_k$ – j-я компонента вектора $\boldsymbol{\rho} = P\boldsymbol{\alpha}$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Условия $g \in G_n$ и*

$$g(\zeta) = \biggl|\sum_{j=1}^{n} \rho_j L_j(\zeta)\biggr|^2$$

равносильны. При этом $\rho_j = \sqrt{g(\zeta_j)}e^{i\psi_j}$, $\psi_j \in \mathbb{T}$.

Доказательство. По теореме Рисса (см., например, [2, отд. 6, §5, задача 40]) $g(\zeta)=|h(\zeta)|^2$, где

$$h(\zeta)=z_0+z_1\zeta+\dots+z_{n-1}\zeta^{n-1},\qquad z_k\in\mathbb{C},\quad \zeta\in S.$$

Положим $\rho_j=h(\zeta_j)$. Тогда $h^*(\zeta)=h(\zeta)-\sum_{j=1}^n\rho_jL_j\equiv0$. Действительно, $\deg h^*<n$, а $h^*(\zeta_j)=0$ при $j=1,\dots,n$.

С другой стороны, очевидно, что $|h(\zeta)|^2\in G_n$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Выполнено* $g_0=\sigma(\boldsymbol{\psi})$, *где* $\sigma(\boldsymbol{\psi})=(\boldsymbol{\rho},X\boldsymbol{\rho})$.

Доказательство. По упомянутой теореме Рисса

$$\left|\sum_{j=1}^n\rho_jL_j\right|^2=|z_0+z_1\zeta+\dots+z_{n-1}\zeta^{n-1}|^2.$$

С другой стороны, в силу (1) имеем

$$\sum_{j=1}^n\rho_jL_j=\sum_{j=1}^n\rho_j\sum_{k=1}^ny_{kj}\zeta^{k-1}=\sum_{k=1}^n\biggl(\sum_{j=1}^ny_{kj}\rho_j\biggr)\zeta^{k-1},$$

т.е. $z_{k-1}=\sum_{j=1}^ny_{kj}\rho_j$ или $\mathbf{z}=Y\boldsymbol{\rho}$, где $\mathbf{z}=(z_0,\dots,z_{n-1})$. Так как

$$g_0+\operatorname{Re}\biggl(\sum_{k=1}^{n-1}g_kz^k\biggr)=|z_0+z_1\zeta+\dots+z_{n-1}\zeta^{n-1}|^2,$$

то $g_0=z_0\overline{z}_0+\dots+z_{n-1}\overline{z}_{n-1}$, т.е. $g_0=(\mathbf{z},\mathbf{z})=(Y\boldsymbol{\rho},Y\boldsymbol{\rho})=(\boldsymbol{\rho},Y^*Y\boldsymbol{\rho})=(\boldsymbol{\rho},X\boldsymbol{\rho})$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Проверим, что 1) $\Longrightarrow$ 2). В силу леммы 1 существует вектор $\boldsymbol{\psi}=(\psi_1,\dots,\psi_n)\in\mathbb{T}^n$ такой, что

$$g(\zeta)=\left|\sum_{j=1}^n\sqrt{d_j}e^{i\psi_j}L_j(\zeta)\right|^2,$$

а из леммы 2 и условия (3) следует, что $\sigma(\boldsymbol{\psi})=\sigma_0$.

Проверим, что 2) $\Longrightarrow$ 1). Из непрерывности $\sigma(\boldsymbol{\psi})$ следует существование $\boldsymbol{\psi}^*=(\psi_1^*,\dots,\psi_n^*)\in\mathbb{T}^n$ вектора такого, что $\sigma(\boldsymbol{\psi}^*)=\bigl(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\psi}^*),X\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\psi}^*)\bigr)=\sigma_0$. Поэтому полином

$$g(\zeta)=\left|\sum_{j=1}^n\sqrt{d_j}e^{i\psi_j^*}L_j(\zeta)\right|^2$$

удовлетворяет (3) в силу леммы 2. Условие (2), очевидно, тоже выполнено.

Проверим, что 1) $\Longrightarrow$ 3). Положим $\boldsymbol{\alpha}=P^{-1}\boldsymbol{\rho}$, где вектор $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\dots,\rho_n)$ определен в лемме 1. Из (2) и леммы 1 следует (5). Учитывая (3) и лемму 2, получаем (4), ибо

$$g_0=(\boldsymbol{\rho},X\boldsymbol{\rho})=(P\boldsymbol{\alpha},XP\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},P^{-1}XP\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\Lambda\boldsymbol{\alpha}).\tag{6}$$

Проверим, что 3) $\Longrightarrow$ 1). Положим

$$g(\zeta)=\left|\sum_{j=1}^n\rho_jL_j\right|^2.$$

Имеем $g\in G_n$. Из (5) следует (2), из (4), (6) и леммы 2 получаем (3).

Теорема доказана.

Замечание. Сделав замену $d_j^* = d_j + \delta$, $\sigma_0^* = \sigma_0 + \delta$, где $\delta > 0$, получим описание положительных (см. п. 1) тригонометрических полиномов g степени меньшей n, для которых выполнены следующие условия:

$$g \geqslant \delta \ \text{ на } S, \qquad \int_S g(\zeta)\, d\zeta = \sigma_0^* > \delta, \qquad g(\zeta_j) = d_j^* \geqslant \delta.$$

Авторы благодарны С. В. Конягину и особенно В. М. Тихомирову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Demidov A. S., Petrova V. V., Silantiev V. M. // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1996. V. 323. P. 353–358. **2**. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21.05.97