А. Л. Вольберг, Полнота рациональных дробей в весовых L^p-пространствах на окружности, *Функц. анализ и его прил.*, 1981, том 15, выпуск 2, 69–70

Функциональный анализ и его приложения,
т. 15, вып. 2, 1981, 69—70.

УДК 517.5

ПОЛНОТА РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ В ВЕСОВЫХ L^p-ПРОСТРАНСТВАХ НА ОКРУЖНОСТИ

А. Л. Вольберг

Пусть μ — конечная борелевская мера на единичной окружности $\mathbf{T} = \{\zeta \in \mathbf{C}: |\zeta| = 1\}$ и множество $\Lambda \subset \mathbf{C} \setminus \mathbf{T}$. При каких Λ множество $R(\Lambda)$ рациональных дробей вида $\sum\limits_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda (z - \lambda)^{-1}$ плотно в пространстве $L^p(\mu)$? Классические теоремы теории функций приводят лишь к частичному результату, а именно, позволяют разобрать случай меры μ, «не слишком вырождающейся» относительно меры Лебега m.

Теорема (см. [1]). *Пусть* $\int\limits_{\mathbf{T}} \log (d\mu/dm)\, dm > -\infty$. *Тогда* $\operatorname{clos} R(\Lambda) = L^p(\mu) \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda\in\Lambda,\ |\lambda|>1} (|\lambda| - 1) = \infty, \quad \sum\limits_{\lambda\in\Lambda,\ |\lambda|<1} (1 - |\lambda|) = \infty.$

Ясно, однако, что для быстро вырождающихся мер μ ответы должны быть совсем другими.

Полное описание множества $\operatorname{clos} R(\Lambda)$ в случае, рассматриваемом в теореме, приводится в работах [2], [3], условие $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} ||\lambda| - 1| = \infty$ достаточно для полноты, если $\int \log(d\mu/dm) = -\infty$.

1. В этой работе рассматривается следующий модельный случай: мера $\mu = h\,dm$, $h \in L^1(m)$ быстро и «правильно» вырождается в одной точке ζ, $\zeta \in \mathbf{T}$ (пусть $\zeta = 1$), а множество Λ лежит в некотором угле Штольца

$$S_\varepsilon = \left\{\zeta \in \mathbf{C}:\ |\arg(\zeta - 1)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ |\zeta| > 1\right\}, \qquad \varepsilon > 0.$$

Оказывается, что в этом случае на вопрос о полноте множества $R(\Lambda)$ в пространстве $L^p(\mu)$ возможны ответы лишь следующих двух типов (в зависимости от поведения меры $\mu = h\,dm$ вблизи точки $\zeta = 1$): А. $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} (|\lambda| - 1)^{1/2} = \infty$. Б. $\operatorname{Card} \Lambda = \infty$.

Мы всегда будем предполагать выполненным условие

$$\int\limits_{-\delta}^{0} \log h(e^{i\theta})\, dm(\theta) = -\infty, \qquad \delta > 0. \tag{1}$$

На малость функции h справа от точки $\theta = 0$ заранее ограничений не накладывается. В зависимости от поведения функции h справа от точки $\theta = 0$ имеет место либо ответ А, либо ответ Б в задачах о плотности.

Определение. Условимся называть функцию h *правильной*, если

$$h(e^{i\theta}) = \exp\left(-\exp \int\limits_0^{\log\frac{1}{|\theta|}} (1 - \alpha(x))\, dx\right), \qquad -\pi < \theta < 0,$$

$$h(e^{i\theta}) = \exp\left(-\exp \int\limits_0^{\log\frac{1}{\theta}} \left(\frac{1}{2} - \beta(x)\right) dx\right), \qquad 0 < \theta < \pi,$$

причем функции α, β положительны и имеют пределы на бесконечности.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и выполнено условие* (1), *и пусть функция* h *правильна.*

1. *Если* $\int\limits_0^\delta \frac{\log h(e^{i\theta})}{\sqrt{\theta}} dm(\theta) > -\infty$, *то* $\operatorname{clos} R(\Lambda) = L^p(h\,dm) \Leftrightarrow \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} (|\lambda| - 1)^{1/2} = \infty$.

2. *Если* $\int\limits_0^\delta \frac{\log h(e^{i\theta})}{\sqrt{\theta}}\, dm(\theta) = -\infty$, *то* $\operatorname{clos} R(\Lambda) = L^p(h\,dm) \Leftrightarrow \operatorname{Card} \Lambda = \infty$.

Замечание 1. Условие штольцевости множества Λ существенно в этой теореме. Если мера μ такова, что для любой последовательности точек $\Lambda = \{\lambda_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$, имеет место $\operatorname{clos}_{L^2(\mu)} R(\Lambda) = L^2(\mu)$, то $\exists \varepsilon > 0$, $\lambda \geqslant 0$: $\mu|_{[e^{-i\varepsilon},\, e^{i\varepsilon}]} = \lambda\delta_{\{0\}}$.

Замечание 2. В теореме 1 мы не можем совсем отказаться от каких бы то ни было условий правильности убывания функции h. А именно, для каждой последовательности Бляшке $\{\lambda_n\}$, $\lim \lambda_n = 1$, найдется функция h такая, что а) $\forall \varepsilon > 0$ $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \log h(e^{i\theta})\, dm(\theta) = -\infty$: б) $R(\Lambda)$ неплотно в $L^2(h\, dm)$.

2. В этом пункте мы не предполагаем штольцевости множества Λ.

Определение. Функция h называется *слабо правильной справа*, если она имеет при $\theta \in [0, \delta]$ мажоранту ν такую, что 1) $\nu \uparrow [0, \delta]$; 2) $\nu \in C^2[0, \delta]$; 3) $\nu(0) = \nu'(0) = \nu''(0) = 0$.

Аналогично определяется слабая правильность слева. Функция называется слабо правильной, если она слабо правильна справа и слева.

Теорема 2. *Пусть функция h слабо правильна,* $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \log \frac{1}{\nu(\theta)}\, dm(\theta) = \infty$, *и пусть* $\operatorname{clos} R(\Lambda) \neq L^2(h\, dm)$. *Тогда найдется открытое связное множество $\mathscr{D}$ такое, что*

1) $\mathbf{D} \cup \mathbf{D}_- \subset \mathscr{D} \subset \mathbf{C}$, $\mathbf{D} = \{\zeta \in \mathbf{C}\colon |\zeta| < 1\}$, $\mathbf{D}_- = \mathbf{C} \setminus (\operatorname{clos} \mathbf{D})$;

2) $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \log \frac{1}{\nu(C\theta)}\, d\omega_{\mathscr{D}}(\theta, b) < +\infty$, *где C — абсолютная постоянная, b — точка области $\mathscr{D}$, $\omega_{\mathscr{D}}$ — гармоническая мера области $\mathscr{D}$;*

3) $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} G_{\mathscr{D}}(\lambda, b) < +\infty$, *где $G_{\mathscr{D}}$ — функция Грина области $\mathscr{D}$.*

Замечание 3. В теореме 2 можно считать функцию h слабо правильной справа (слева). Тогда всюду интеграл $\int\limits_{-\delta}^{\delta}$ надо заменить на интеграл $\int\limits_{0}^{\delta} \Big(\int\limits_{-\delta}^{0}\Big)$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на следующей лемме, которая, нам кажется, имеет самостоятельный интерес (см. [4], [5]).

Лемма. *Пусть F — ограниченная аналитическая в $\mathbf{D}$ функция. Функция $\theta \mapsto F(e^{i\theta})$ липшицева в окрестности точки $\theta = 0$, $F(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda$. Предположим также, что* $|\operatorname{Im} F(e^{i\theta})| \leqslant \nu(e^{i\theta})$, *где*

1) $\nu^{1/2}$ *липшицева,* $\nu \downarrow [-\delta, 0]$, $\nu \uparrow [0, \delta]$;

2) $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \log \frac{1}{\nu(e^{i\theta})}\, d\theta = +\infty$.

Тогда найдется открытое связное множество $\mathscr{D}$ такое, что

1) $\mathbf{D} \cup \mathbf{D}_- \subset \mathscr{D} \subset \mathbf{C}$;

2) $\int\limits_{-\delta}^{\delta} \log \frac{1}{\nu(e^{i\theta})}\, d\omega_{\mathscr{D}}(e^{i\theta}, b) < +\infty$, $b \in \mathscr{D}$;

3) $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda} G_{\mathscr{D}}(\lambda, b) < +\infty$.

Автор приносит глубокую благодарность Н. К. Никольскому за постановку задачи, внимание к работе и ценные советы и С. В. Хрущеву за ценные замечания, позволившие упростить некоторые доказательства.

Ленинградский электротехнический институт

Поступило в редакцию 11 февраля 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М., Гостехиздат, 1947. 2. Тумаркин Г. Ц., Изв. АН СССР, серия матем. **30** (1966), 721—766. 3. Тумаркин Г. Ц., ДАН СССР **98**, № 6 (1954), 909—912. 4. Koosis P., Acta Math. **142** (1979), 275—304. 5. Вольберг А. Л., Записки научн. сем. ЛОМИ **92** (1979), 60—84.