УДК 519.854.6

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ [1]

АЛЕКСЕЕВ А. О., АЛЕКСЕЕВ О. Г., КИСЕЛЕВ В. Д., МИРОВИЦКИЙ Г. П.

(Тула)

Рассмотрим задачу дискретного программирования

$$C(X)=\max\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j)\leqslant b_i,\qquad i=1,2,\ldots,m,\quad x_j=1,2,\ldots,A_j,\quad j=1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

где $c_j(x_j)>0$, $a_{ij}(x_j)>0$.

Представим задачу (1), (2) в виде линейной задачи с дополнительными ограничениями

$$C(X)=\max\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{A_j}c_{kj}x_{kj},\qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{A_j}a_{ikj}x_{kj}\leqslant b_i,\quad i=1,2,\ldots,m, \tag{3а}$$

$$\sum_{k=1}^{A_j}x_{kj}=1,\qquad j=1,2,\ldots\ n, \tag{3б}$$

$$x_{kj}=\{0,\ 1\},\qquad k=1,2,\ldots,A_j,\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{3в}$$

Для оценки верхних границ при решении задачи (3) методом ветвей и границ условие целочисленности (3в) ослабляется и заменяется условием

$$0\leqslant x_{kj}\leqslant 1. \tag{4}$$

Упростить оценку верхней границы и сузить область поиска оптимального решения позволяет приближенное решение двойственной задачи, например, градиентным методом. Для получения первого допустимого целочисленного решения используется метод, основанный на идее пошагового конструирования решений.

Оценка верхней границы решения производится с помощью выражения

$$H_{S_l}(x_{kl})=C_{S_l}(x_{kl})+Z_{S_l}(x_{kl}),$$

где

$$C_{S_l}(x_{kl})=\sum_{j=1,k\in S_l}^{l}c_{kj}x_{kj}$$

является значением целевой функции l-частичного решения, $S_l=\{(k_j):j=1,2,\ldots,l,\ 1\leqslant k_j\leqslant A_j\}$ – множество индексов переменных основной задачи, вошедших в l-частичное решение. Величина $Z_{S_l}(k_{kl})$ определяется тремя способами.

Способ 1 – решением двойственной задачи для каждой вершины. Для данного способа

$$Z_{S_l}(x_{kl})=\min\left(\sum_{i=1}^{m}b_i{}^l y_i+\sum_{i=m+l+1}^{m+n}y_i\right)$$

[1] Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ, 1988, № 5262-В88, 23 с.

при

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ikj}y_i+y_{m+j}\geqslant c_{kj}, \qquad k=1,2,\ldots,A_j, \quad j=l+1,l+2,\ldots,n,$$

$$b_i{}^l=b_i-\sum_{\substack{j=1\\k\in S_l}} a_{ikj}, \qquad y_i\geqslant 0, \quad i=1,2,\ldots,m, \quad m+l+1,\ldots,m+n.$$

Способ 2 – решением двойственной задачи на уровне. При этом

$$Z_{S_l}(x_{kl})=\sum_{i=1}^{m} b_i{}^l y_i'+\sum_{i=m+l+1}^{m+n} y_i', \tag{5}$$

где $Y'=(y_1',\ldots,y_{m+n}')$ – решение двойственной задачи

$$Z_{S_l}=\min\left(\sum_{i=1}^{m}\tilde{b}_i{}^l y_i'+\sum_{i=m+l}^{m+n} y_i'\right)$$

при

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ikj}y_i'+y_{m+j}'\geqslant c_{kj}, \qquad k=1,2,\ldots,A_j, \qquad j=l,l+1,\ldots,n,$$

$$\tilde{b}_i{}^l=b_i-\sum_{\substack{j=1\\k\in S_{l-1}}} a_{ikj}-\min_k a_{ikl},$$

где $\min\limits_k a_{ikj}$ – минимальные значения i-го ограничения среди переменных l-го уровня.

Способ 3 – однократным решением двойственной задачи. Величина $Z_{S_l}(x_{kl})$ определяется по формуле (5), но $Y'=(y_1',\ldots,y_{m+n}')$ – решение двойственной по отношению к (3а, б), (4) задачи.

Предложенные способы оценивались по времени и числу просмотренных вершин путем решения тестовых задач различной размерности.

Из результатов эксперимента следует, что наиболее эффективным способом определения границ является использование результатов однократного решения двойственной задачи. Среднее время решения с использованием данного способа для задач малой размерности в 1.5÷4 раза относительно второго и в 2÷15 раз относительно первого способов меньше, а для задач большой размерности в 3÷8 и в 5÷20 раз меньше. С ростом числа переменных и ограничений задачи это преимущество возрастает.

Поступила в редакцию 28.VII.1987