B. I. Berezin, N. Yu. Petukhova, Using of asymptotic representations for constructing numerical algorithms of singularly perturbed boundary value problems solving, *Fundam. Prikl. Mat.*, 1996, Volume 2, Issue 4, 1187–1194

https://www.mathnet.ru/eng/fpm181

Использование асимптотических разложений для построения численных алгоритмов решения сингулярно возмущенных краевых задач*

Б. И. БЕРЕЗИН, Н. Ю. ПЕТУХОВА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: berezin@cs.msu.su

УДК 519.62

Ключевые слова: сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения, малый параметр, краевые задачи, численные методы, асимптотические разложения.

Аннотация

Для сингулярно возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка предложен метод решения, основанный на приближении коэффициентов асимптотического представления решения дифференциальной задачи. Рассмотрены случаи линейных задач с точкой поворота и без точек поворота, задач с разрывной правой частью, задач для квазилинейных уравнений.

Abstract

B. I. Berezin, N. Yu. Petuhova, Using of asymptotic representations for constructing numerical algorithms of singularly perturbed boundary value problems solving, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **2**(1996), 1187–1194.

For singular perturbed boundary problems for ordinary differential equations numerical solving method is suggested. This method is based on numerical approximation of coefficients of asymptotic representation differential equations solution. These problems are solved in cases linear equation with rotation point and without it, with noncontinuous function in right side of equation and for quasilinear ordinary differential equations.

Сингулярно возмущенные краевые задачи относятся к классу жестких краевых задач, т. е. таких задач, решения которых на одном или нескольких достаточно узких участках изменяются быстро, а на остальных участках рассматриваемого отрезка — достаточно медленно. Основной проблемой численного решения сингулярно возмущенных краевых задач является построение

*Исследования, результаты которых содержатся в данной статье, стали возможными благодаря поддержке Международного научного фонда и правительства России

Фундаментальная и прикладная математика 1996, **2**, № 4, 1187–1194.

равномерных относительно малого параметра численных алгоритмов. Как известно, стандартные численные алгоритмы, разработанные для невозмущенных задач, плохо применимы для решения сингулярно возмущенных краевых задач и поэтому для их решения требуются специальные численные алгоритмы.

1. Основным методом численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений является построение разностных схем. Для сингулярно возмущенных краевых задач требуется либо построение специальных разностных схем на равномерной сетке, параметры которых зависят от малого параметра, либо использование стандартных разностных схем с существенно неравномерными специально выбранными сетками.

Одной из первых работ, относящихся к построению эффективных численных алгоритмов для сингулярно возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, была работа А. М. Ильина [1]. В работе была доказана неравномерность относительно малого параметра сходимости стандартной разностной схемы 2-го порядка точности и построена специальная разностная аппроксимация на равномерной сетке, обеспечивающая равномерную относительно малого параметра сходимость по шагу сетки h.

Другой способ численного решения сингулярно возмущенных краевых задач, связанный с построением неравномерных сеток специального вида, учитывающих поведение решения задачи в пограничном слое, при стандартной аппроксимации дифференциальных операторов предложен Н. С. Бахваловым [2]. Многие авторы применяли и развивали эти методы (см. [3], [4], [5] и др.). Отметим, что при использовании обоих этих подходов используется априорная информация о характерных особенностях поведения решений исследуемых краевых задач при изменении возмущающего параметра.

2. Нередко априорную информацию о характерных особенностях решения можно получить с помощью асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных краевых задач.

Разработке теории построения асимптотических разложений сингулярно возмущенных краевых задач посвящено значительное число работ (см. [6], [7], [8] и др.). Построение асимптотических разложений для классов задач, а часто даже и для конкретной задачи, является отдельной проблемой, и для многих классов задач возможность построения указанных разложений обоснована; представляется естественным использование имеющихся асимптотических разложений для получения численных решений. Однако, как правило, асимптотические представления не используются для непосредственных численных расчетов; подобным способом пользуются обычно лишь в тех случаях, когда нет сколь-нибудь надежных разностных методов получения численного решения (например, при решении задач с быстро осциллирующими коэффициентами или большим числом точек разрыва [9]).

Для «хороших» задач такой подход практически не применяется даже несмотря на то, что построение разностных схем на равномерных сетках с порядком выше второго весьма затруднителен; кроме того, использование разностных схем накладывает на правую часть уравнения ограничительные требования, которые нередко оказываются более жесткими, чем те, которые используются при построении асимптотических представлений решения.

В настоящей работе описан алгоритм построения численного решения различных краевых задач для сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка. Этот метод основан на непосредственном использовании асимптотических разложений для получения численного решения.

3. Для краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной

$$\varepsilon y'' = p(x)y' + q(x)y + f(x), \quad x \in [-1,1],\ \varepsilon > 0, \tag{1}$$

и краевыми условиями

$$\begin{gathered} \gamma_1 y(-1) - \gamma_2 y'(-1) = A, \quad \gamma_3 y(1) + \gamma_4 y'(1) = B, \\ |\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0, |\gamma_3| + |\gamma_4| \neq 0, \end{gathered} \tag{2}$$

будем строить численное решение задачи (1), (2) в случае, когда уравнение (1) имеет точку поворота $x = 0$, т. е. $p(0) = 0$. Для построения численного решения будем использовать асимптотические приближения вида

$$y_{\varepsilon,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k \left[u_k(x) + v_k((x+1)/\varepsilon) + w_k((1-x)/\varepsilon)\right], \tag{3}$$

где $u_k(x)$ — гладкие функции, определенные на всем промежутке $[-1,1]$, $v_k(\xi)$ и $w_k(\eta)$ — экспоненциальные функции погранслойного типа. Как известно [10], представление (3) определяется свойствами решения вырожденного уравнения на отрезке $[-1,1]$

$$p(x)y' + q(x)y + f(x) = 0$$

при следующих условиях на коэффициенты. Пусть N_0 — максимальное неотрицательное целое число, такое что выполнено неравенство

$$N_0 p'(0) + q(0) > 0. \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\text{если } p(-1) > 0, \ \text{ то } \gamma_1 p(-1) + \gamma_2 q(-1) \neq 0; \\ &\text{если } p(1) < 0, \quad\ \text{ то } \gamma_3 q(1) - \gamma_4 p(1) \neq 0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$p(x), q(x), f(x) \in C^{2k+2}[-1,1]. \tag{6}$$

В этом случае задача (1), (2) имеет решение

$$y = y_{\varepsilon,k}(x) + O(\varepsilon^{k+1}).$$

При этом если $p(x) > 0$ при $x \neq 0$, то пограничный слой имеет место только при $x = 1$; если $p(x) < 0$ при $x \neq 0$, то пограничный слой имеет место только при $x = -1$; если $p(x)x > 0$ при $x \neq 0$, то пограничный слой имеет место на обоих концах отрезка; наконец, если $p(x)x < 0$ при $x \neq 0$, то погранслойные слагаемые в представлении (3) тождественно равны нулю. При этом число n членов разложения (3) определяется соотношением $n \leqslant N_0$.

Для нахождения членов $u_k(x)$ регулярной части асимптотического разложения получаются задачи Коши для уравнений первого порядка. Погранслойные члены $v_k((x+1)/\varepsilon)$ и $w_k((1-x)/\varepsilon)$ асимптотического представления (3) удовлетворяют краевым задачам на полубесконечной прямой для дифференциальных уравнений второго порядка специального вида. Правые части вышеуказанных задач для членов асимптотического разложения выражаются через ранее найденные члены асимптотики и данные исходной задачи (1), (2).

Для каждой из вышеуказанных задач в [13] предложены численные методы нахождения приближений $u_k^h(x)$, $v_k^h(\xi)$, $w_k^h(\eta)$ решений этих задач с заданной точностью.

Приближение функции $y_{\varepsilon,k}(x)$ обозначим через $y^h(x,\varepsilon)$. Оно выражается по формуле

$$y^h(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k^h(x) + \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \left[v_k^h(\xi) + w_k^h(\eta) \right].$$

Верна следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть исходные данные задачи* (1), (2) *удовлетворяют условиям* (4), (5), (6). *Пусть, кроме того, функция* $p(x)$ *отлична от нуля во всех точках отрезка за исключением точки* $x = 0$, *в которой* $p(0) = 0$. *Пусть, наконец,* $q(x) \geqslant q_0 > 0$. *При условиях* (4), (5), (6) *для любого положительного* δ *можно построить решение*

$$y^h(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k^h(x) + \sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon^k \left[v_k^h(\xi) + w_k^h(\tau) \right],$$

где $u_k^h(x)$, $v_k^h(\xi)$, $w_k^h(\eta)$ *— численные решения задач Коши, определяющих функции, являющиеся коэффициентами асимптотического разложения решения задачи* (1), (2) *—* $u_k(x)$, $v_k(\xi)$, $w_k(\eta)$. *При этом число* N *определяется неравенством*

$$\varepsilon^{N+1} \leqslant \delta < \varepsilon^N.$$

В этом случае при $\forall \delta > 0$ *для целого* N, *удовлетворяющего условию* $\varepsilon^{N+1} \leqslant \delta < \varepsilon^N$, *численное решение, найденное с помощью предложенного численного метода, удовлетворяет неравенству*

$$|y^h(x,\varepsilon) - y(x,\varepsilon)| < \delta, \quad \forall x \in [-1,1].$$

Для нахождения функций $u_k^h(x)$, являющихся приближениями коэффициентов $u_k(x)$ регулярной части асимптотического представления предложен метод, опирающийся на дополнительную информацию о поведении ограниченного решения уравнения (4) в окрестности точки поворота. Метод нахождения численных приближений погранслойных функций не отличается от построения погранслойных функций для задач без точек поворота [11].

Аналогичный метод решения применим для решения краевых задач без точек поворота [11] для случая, когда правая часть уравнения терпит разрыв по переменной x в конечном числе точек (соответствующие асимптотические разложения построены в [12]).

4. Метод построения численного решения последовательным вычислением коэффициентов асимптотического представления решения применим и для краевых задач для квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varepsilon y'' = \varphi(x, y)y' + \psi(x, y), \quad x \in [0, 1],\ \varepsilon > 0, \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$\gamma_1 y(0) - \gamma_2 y'(0) = A, \quad \gamma_3 y(1) + \gamma_4 y'(1) = B. \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть правая часть уравнения* (7) *и краевые условия* (8) *удовлетворяют соотношениям*

$$\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C^\infty,$$

$$\varphi(x, y) \geqslant \varphi_0 > 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, y)(A - u_0(0)) \geqslant 0, \quad y \in [A, u_0(0)],$$

где $u_0(x)$ — *решение задачи*

$$\varphi(x, u_0)u_0'(x) + \psi(x, u_0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ u_0(1) = B_0.$$

Пусть $u_k^h(x)$ — *численные решения задач*

$$\varphi(x, u_0)u_k'(x) + (\varphi_y'(x, u_0)u_0'(x) + \psi_y'(x, u_0)u_k'(x) = G_k(x) \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u_k(1) = B_k \quad \textit{при} \quad k \geqslant 1,$$

где

$$G_1(x) = -u_0''(x),$$

$$G_k(x) = -u_{k-1}''x) - \sum_{i=1}^{k-1} \varphi_i(x)u_{k-1}'(x) - \\ - \sum_{i=2}^{k} S_k^i \frac{d^i \varphi(x, u_0(x)}{dy^i} \frac{u_0'(x)}{i!} - \sum_{i=2}^{k} \frac{d^i \psi(x, u_0(x))}{dy^i} \frac{1}{i!}, \quad k \geqslant 2,$$

где S_k^i *вычисляются по рекуррентным формулам через известные функции* $u_i^h(x)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Пусть $v_k^h(t)$ *— численные решения задач*

$$v_k''(t) + \varphi(0, p_0 + v_0(t))v_k'(t) + \varphi_y(0, p_0 + v_0(t))v_k(t) = -g_k(t), \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

$$v_k(0) = -u_k(0), \quad v_k(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \quad k \geqslant 1,$$

где $g_i(t)$ *выражаются как линейная комбинация функций* $v_{k-j}(t)$, $j > 0$, *их первых производных и коэффициентов уравнения* $\varphi(x, y)$ *и* $\psi(x, y)$.

Тогда функция

$$y_\varepsilon^h(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k u_k^h(x) + \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k v_k^h(x/\varepsilon)$$

со значением N, *определяемым из условия*

$$\varepsilon^{N+1} \leqslant \delta < \varepsilon^N,$$

удовлетворяет неравенству

$$\max |y_\varepsilon(x, \varepsilon) - y_\varepsilon^h(x, \varepsilon)| \leqslant \delta \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Замечание 1. Все условия применимости предложенного численного метода решения краевой задачи в случае третьей краевой задачи при $\gamma_2 \neq 0$, сформулированные в теореме 2, являются условиями существования асимптотического представления решения дифференциальной задачи $y_\varepsilon(x, \varepsilon)$. Численный метод, позволяющий приближенно вычислить функцию $y_\varepsilon^h(x, \varepsilon)$, не требует при своей реализации никаких дополнительных условий. Отметим также, что в случае первой краевой задачи для применимости численного метода необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, p_0 + v_0(t))v_0'(t) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant t < \infty.$$

Замечание 2. Число арифметических действий, которое необходимо затратить для вычисления функций $y_\varepsilon^h(x, \varepsilon)$ с заданной погрешностью δ, при небольшом числе членов асимптотического представления получается меньше, чем при построении численного решения традиционными сеточными методами.

Замечание 3. Еще одно преимущество рассмотренного численного метода связано с тем, что вычисляемые для построения численного решения функции асимптотического ряда не зависят от ε. Это позволяет использовать функции, вычисленные при построении численного решения с одним значением ε, для построения приближенного решения с другим значением ε_1.

После того, как построена функция $y^h(x, \varepsilon_0)$ — численное решение задачи со значением параметра ε_0, для получения численного решения с той же точностью δ при любом $\varepsilon_i < \varepsilon_0$ требуется $O(N_i M)$ арифметических действий, где M — число точек сетки, а N_i — минимальное целое число, такое что имеет место неравенство

$$\varepsilon_i^{N_i+1} \leqslant \delta.$$

При этом число N_i не больше N_0, а следовательно, нет необходимости для достижения той же погрешности вычислять дополнительные члены асимптотического разложения.

Литература

[1] А. М. Ильин. Разностная схема для для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. — 1969. — Т. 6, № 2. — С. 237—248.

[2] Н. С. Бахвалов. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журнал вычисл. математ. и математ. физики. — 1969. — Т. 9, № 4. — С. 841–859.

[3] И. П. Боглаев. Приближенное решение одной краевой задачи с малым параметром при старшей производной. Препринт ИФТТ АН СССР. – Черноголовка, 1983.

[4] Э. Дулан, Дж. Миллер, У. Шилдерс. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. — М.: Мир, 1983.

[5] В. Д. Лисейкин. О численном решении сингулярно возмущенного уравнения с точкой поворота // Журнал вычисл. математ. и математ. физики. — 1984. — Т. 24, № 12. — С. 1812–1821.

[6] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. — 1957. — Т. 12, № 5. — С. 3–122.

[7] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.

[8] А. М. Ильин. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.

[9] Н. С. Бахвалов. Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстроосциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. — 1975. — Т. 221, № 1. — С. 3–4.

[10] А. О. Абдувалиев, Н. Х. Розов, В. Г. Сушко. Асимптотические представления решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач // ДАН СССР. — 1989. — Т. 304, № 4. — С. 777–780.

[11] Н. Ю. Петухова. Об одном численном методе решения сингулярно возмущенной краевой задачи. Препринт № 61 ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. — М., 1991.

[12] V. G. Sushko, N. Kh. Rosov. Aplications of the method of barriers. I. Some boundary value problems // Georgian Mathematical Journal. — 1995. — V. 2, № 1. — P. 5–10; II. Some singulary pertrubed problems // Georgian Mathematical Journal. — 1995. — V. 2, № 3. — P. 323–334.

[13] Н. Ю. Петухова. Численные методы расчета асимптотических разложений решений некоторых сингулярно возмущенных задач. Дис... канд. физ.-мат. наук. — М., 1994.

Статья поступила в редакцию в августе 1995 г.