



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. V. Pyatkina, Equilibrium of a three-layer plate with crack , *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2022, Volume 25, Number 1, 105–120

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.108

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

January 14, 2025, 10:43:06



УДК 539.3:517.97

**РАВНОВЕСИЕ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ**

© 2022 Е. В. Пяткина

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
просп. Акад. Лаврентьева, 15, г. Новосибирск 630090, Россия*

E-mail: dusya\_pyatkina@mail.ru

Поступила в редакцию 22.07.2021 г.; после доработки 23.09.2021 г.;  
принята к публикации 21.10.2021 г.

Рассмотрена задача равновесия трёхслойной пластины, жёстко закреплённой на внешней границе и содержащей сквозную вертикальную трещину. Трёхслойная пластина состоит из двух несущих слоёв, которые моделируются пластинами Кирхгофа — Лява, и слоя мягкого заполнителя между ними. На берегах трещины в несущих слоях заданы условия непроникания. Рассмотрен предельный переход, когда толщина мягкого слоя стремится к нулю, а его приведённая жёсткость к бесконечности. Для исходной и предельной задач показана однозначная разрешимость, приведены вариационная и дифференциальная постановки.

**Ключевые слова:** пластина Кирхгофа — Лява, трёхслойная пластина, трещина с условием непроникания.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.108

**ВВЕДЕНИЕ**

В работе исследована разрешимость задачи равновесия трёхслойной пластины, содержащей вертикальную сквозную трещину. Использована модель трёхслойной упругой пластины, состоящей из двух несущих слоёв и мягкого слоя между ними, предложенная в [1]. Пластина состоит из двух несущих слоёв, которые трактуются как анизотропные упругие пластины, подчиняющиеся гипотезе Кирхгофа — Лява, и слоя пониженной жёсткости между ними, который называется заполнителем. Несущие слои и слой заполнителя однородны по толщине. Поперечным деформированием мягкого слоя пренебрегаем. На берегах трещины в несущих слоях задаются условия непроникания. Для этой задачи показана однозначная разрешимость, приведены вариационная и дифференциальная постановки и доказана их эквивалентность. Рассмотрен предельный переход, когда толщина слоя заполнителя стремится к нулю и его приведённая жёсткость одновременно стремится к бесконечности. Предельная задача является задачей равновесия двухслойной пластины Кирхгофа — Лява, содержащей сквозную вертикальную трещину, на берегах которой выполняются условия непроникания. В этом случае также показана однозначная разрешимость задачи равновесия; из вариационной постановки выведена дифференциальная.

В работах [2–5] предложены разные варианты теории малых прогибов слоистых оболочек, состоящих из двух несущих слоёв и слоя заполнителя между ними. В [2] несущие слои являются мембранами, в [3, 4] — пластинами Кирхгофа — Лява, в [5] построен вариант теории упругих многослойных анизотропных оболочек, где использована обобщённая гипотеза ломаной линии. В [6] предложена модель трёхслойной пластины с лёгким упругим заполнителем, которая сводит расчёт таких пластин к расчёту тонких однородных оболочек с некоторыми обобщёнными приведёнными характеристиками. Этот метод даёт достаточно надёжные результаты для

трёхслойных оболочек с жёсткими заполнителями и трёхслойных оболочек с очень тонкими несущими слоями. В [7] выведены уравнения равновесия упругой многослойной пластины из уравнений общей трёхмерной теории упругости путём введения асимптотических разложений по малому параметру, в [8] получено соответствующее вариационное уравнение. Этот метод позволяет найти распределения всех шести компонент тензора напряжений. В работе [9] предложены три условия, которым должна удовлетворять внутренне непротиворечивая теория многослойной оболочки. Вывод дифференциальных уравнений и граничных условий задачи равновесия двух упругих пластин, где на контактной поверхности заданы упругоподатливые связи сдвига и поперечные связи, приведён в [10].

Разрешимость задач равновесия упругих тел и пластин, содержащих трещину, аналитически рассматривалась, в частности, в [11–16]. Особенностью указанных работ является использование условия непроникания в виде неравенства на берегах трещин. В работе [17] аналитически и численно исследуется равновесие двухслойного упругого тела, содержащего сквозную трещину.

Плоская задача о равновесии двух упругих полупространств, скреплённых с упругим изотропным слоем между ними, рассмотрена в [18], где авторы сводят исходную задачу к задаче контакта двух полупространств. Всего найдено семь возможных типов граничных условий, выбор которых зависит от упругих свойств тонкого слоя. В [19] показана однозначная разрешимость задачи равновесия двумерного упругого тела с дефектом, найдено выражение для производной функционала энергии по длине в вершине дефекта. В [20, 21] рассмотрены задачи равновесия двухслойных тел, где в одном из слоёв содержится дефект, а также исследованы некоторые предельные случаи. Задача склейки двух упругих пластин вдоль части их внешних боковых границ тонким упругим слоем рассмотрена в [22, 23]. В этих работах строго обосновано сведение исходной задачи к задаче равновесия двух упругих пластин и показано, что условия на отрезке контакта двух пластин зависят от упругих свойств клеящего слоя.

## 1. РАВНОВЕСИЕ ТРЁХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ

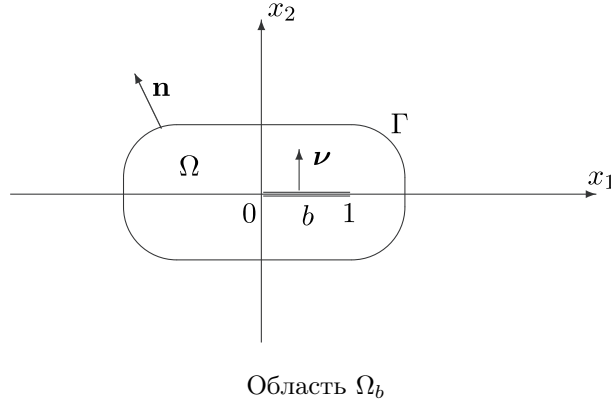
Рассмотрим пластину, состоящую из трёх скреплённых между собой упругих слоёв и содержащую прямолинейную вертикальную трещину. Крайние слои называются несущими, каждый из них имеет толщину  $h/2$ . Мягкий слой толщины  $2\delta$  между несущими слоями назовём заполнителем. Предполагается, что слой заполнителя изотропный и однородный по толщине.

Пусть слоистая пластина имеет форму прямого цилиндра высотой  $h + 2\delta$  с основанием  $\Omega$  в плоскости  $Ox_1x_2$ , т. е.  $\Omega$  — область, занимаемая срединной плоскостью каждого из слоёв. Внешнюю границу этой области обозначим через  $\Gamma$ . Оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  направлены так, что прямолинейный интервал, моделирующий разрез, является единичным отрезком на оси абсцисс  $b = (0, 1) \times \{0\}$  и полностью содержится в  $\Omega$ . Через  $\bar{b} = [0, 1] \times \{0\}$  обозначено замыкание  $b$ . Единичный вектор  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  нормали к  $b$  в плоскости  $Ox_1x_2$  направлен в сторону положительных значений  $x_2$  (см. рисунок). Положим  $\Omega_b = \Omega \setminus \bar{b}$ . Направим ось  $Oz$  по нормали к слоям.

Напряжённо-деформированное состояние несущего слоя полностью определено, если известны горизонтальные  $v^I = (v_1^I, v_2^I)$  и нормальные  $w$  перемещения точек, принадлежащих срединной поверхности  $I$ -го слоя. Здесь и далее в работе индекс  $I$  принимает значения 1 и 2, величины с индексом  $I = 1$  относятся к нижнему несущему слою, а с  $I = 2$  — к верхнему. Перемещения произвольных точек в нижнем и верхнем несущих слоях определяются соответственно по формулам

$$v^{z1}(x, z) = v^1(x) - (z + h/4 + \delta)\nabla w(x), \quad w^{z1} = w(x), \quad x \in \Omega_b, \quad z \in (-h/2 - \delta, -\delta), \quad (1)$$

$$v^{z2}(x, z) = v^2(x) - (z - h/4 - \delta)\nabla w(x), \quad w^{z2} = w(x), \quad x \in \Omega_b, \quad z \in (\delta, h/2 + \delta), \quad (2)$$



здесь  $x = (x_1, x_2)$ .

Компоненты тензора деформаций определяются через перемещения  $v^I$  по формуле  $\varepsilon_{ij}(v^I) = (v_{i,j}^I + v_{j,i}^I)/2$ ,  $i, j = 1, 2$ . Компоненты тензоров напряжений  $\sigma^I(v^I) = \{\sigma_{ij}^I(v^I)\}$  и деформаций  $\varepsilon(v^I) = \{\varepsilon_{ij}(v^I)\}$  связаны линейным законом Гука  $\sigma^I(v^I) = A^I \varepsilon(v^I)$ . В работе рассматривается случай анизотропных пластин, тензор  $A^I = \{a_{ijkl}^I\}$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ ,  $a_{ijkl}^I \in L_\infty(\Omega)$ , является симметричным и положительно определённым тензором модулей упругости. Через  $E_I$  и  $\kappa_I$  обозначены модуль Юнга и коэффициент Пуассона  $I$ -й пластины соответственно.

Используется следующее допущение для мягкого слоя: для всех компонент вектора перемещений выполняется линейный закон распределения по толщине

$$v^{z*}(x, z) = v^*(x) + z\xi(x), \quad w^{z*}(x) = w^*(x) + z\xi_3(x), \quad x \in \Omega_b, \quad z \in (-\delta, \delta), \quad (3)$$

где

$$v^* = \frac{1}{2}(v^2 + v^1), \quad \xi = \frac{1}{2\delta} \left( v^2 - v^1 + \frac{h}{2} \nabla w \right), \quad w^* = w, \quad (4)$$

а функция  $\xi_3 = 0$ , так как в рассматриваемой задаче вертикальные прогибы внешних слоёв одинаковы. Для упрощения формул примем, что заданные внешние силы  $f^I = (f_1^I, f_2^I) \in L_2(\Omega)^2$ ,  $F^I \in L_2(\Omega)$ ,  $I = 1, 2$ , приложены только к несущим слоям.

Сначала приведём вариационную постановку задачи равновесия. Для этого введём пространства

$$H_\Gamma^1(\Omega_b)^2 = \{u = (u_1, u_2) \in H^1(\Omega_b)^2 \mid u = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

$$H_\Gamma^2(\Omega_b) = \left\{ w \in H^2(\Omega_b) \mid w = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma \right\}$$

и множество допустимых перемещений

$$K = \left\{ (\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) \in H_\Gamma^1(\Omega_b)^2 \times H_\Gamma^1(\Omega_b)^2 \times H_\Gamma^2(\Omega_b) \mid [\bar{v}_2^I] \geq \frac{h}{4} \mid |\bar{w}_2| \text{ на } b \right\}. \quad (5)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок функции  $[\cdot] = \cdot^+ - \cdot^-$  на  $b$ , а знаки  $\pm$  соответствуют значениям функции на берегах  $b^\pm$ . Неравенства в определении  $K$  являются условиями непроникания на  $b$  в несущих слоях. Пусть  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L_2(\Omega_b)$ . Определим функционал потенциальной энергии по формуле

$$\Pi(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) = \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{4} (\sigma^I(\bar{v}^I), \varepsilon(\bar{v}^I)) + \frac{1}{2} B_I(\bar{w}, \bar{w}) - \frac{h}{2} (f^I, \bar{v}^I) - (F^I, \bar{w}) \right\} + \frac{1}{2} \mu(\bar{g}, \bar{g}), \quad (6)$$

где  $\bar{g} = \bar{v}^2 - \bar{v}^1 + c\nabla\bar{w}$ , коэффициент  $c = h/2 + 2\delta$  равен расстоянию между срединными плоскостями несущих слоёв. Последнее слагаемое в (6) является потенциальной энергией деформации мягкого слоя, для которого введена гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений по всей толщине мягкого слоя [1, 3]. Погрешность этого допущения тем меньше, чем тоньше слой и ниже его упругие характеристики по сравнению с упругими характеристиками несущих слоёв. Для определения приведённой жёсткости  $\mu > 0$  используется условие [1]

$$\frac{1}{\mu} = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dz}{G(z)}, \quad (7)$$

где  $G(z)$  — модуль сдвига в мягком слое.

В формуле (6) свёртка тензоров  $\sigma_{ij}^I(\bar{v}^I)\varepsilon_{ij}(\bar{v}^I)$  обозначена через  $\sigma^I(\bar{v}^I)\varepsilon(\bar{v}^I)$ ; по повторяющимся индексам здесь и далее проводится суммирование. Билинейные формы  $B_I$  задаются следующим образом:

$$B_I(w, \bar{w}) = - \int_{\Omega_b} m_{ij}^I(w) \bar{w}_{,ij},$$

где элементы  $m_{ij}^I(w)$ ,  $i, j = 1, 2$ , тензора моментов определяются по формуле

$$m_{ij}^I(w) = -\frac{2}{3} \left(\frac{h}{4}\right)^3 \sigma_{ij}^I(\nabla w).$$

Произведением двух векторов  $f^I \bar{v}^I$  является сумма  $f_i^I \bar{v}_i^I$ .

Множество  $K$  является выпуклым и замкнутым и, следовательно, слабо замкнутым. Функционал  $\Pi(v^1, v^2, w)$  слабо полунепрерывен снизу и коэрцитивен на  $K$ . Тогда [14, с. 30–32] решение задачи минимизации  $\Pi(v^1, v^2, w)$  на  $K$  существует и удовлетворяет вариационному неравенству

$$(v^1, v^2, w) \in K, \quad (8)$$

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^I), \varepsilon(\bar{v}^I - v^I)) + B_I(w, \bar{w} - w) - \frac{h}{2} (f^I, \bar{v}^I - v^I) - (F^I, \bar{w} - w) \right\} + \mu(g, \bar{g} - g) \geq 0$$

для любых  $(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) \in K$ . (9)

Поскольку  $\Pi$  — строго выпуклый функционал, то решение задачи (8), (9) единственно.

В этом случае имеем следующую краевую задачу относительно перемещений  $(v^1, v^2, w)$ :

$$-\frac{h}{2} \operatorname{div} \sigma^1(v^1) = \frac{h}{2} f^1 + \mu g, \quad \sigma^1(v^1) = A^1 \varepsilon(v^1) \text{ в } \Omega_b, \quad (10)$$

$$-\frac{h}{2} \operatorname{div} \sigma^2(v^2) = \frac{h}{2} f^2 - \mu g, \quad \sigma^2(v^2) = A^2 \varepsilon(v^2) \text{ в } \Omega_b, \quad (11)$$

$$-m_{ij,ij}^1(w) - m_{ij,ij}^2(w) - F^1 - F^2 = -\mu c \operatorname{div} g \text{ в } \Omega_b, \quad (12)$$

$$v^I = 0, \quad w = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (13)$$

$$[v_2^I] \geq \frac{h}{4} |[w, 2]| \text{ на } b, \quad (14)$$

$$[\sigma_{22}^I(v^I)] = 0, \quad \sigma_{12}^I(v^I) = 0, \quad [m^1(w) + m^2(w)] = 0 \text{ на } b, \quad (15)$$

$$t^{1\pm}(w) + t^{2\pm}(w) - \mu c g_2^\pm = 0 \text{ на } b, \quad (16)$$

$$|m^{1+}(w) + m^{2+}(w)| \leq -\frac{h^2}{8}(\sigma_{22}^1(v^1) + \sigma_{22}^2(v^2)) \text{ на } b, \quad (17)$$

$$\frac{h}{2}(\sigma_{22}^1(v^1)[v_2^1] + \sigma_{22}^2(v^2)[v_2^2]) + (m^{1+}(w) + m^{2+}(w))[w,2] = 0 \text{ на } b. \quad (18)$$

Дивергенцией тензора напряжений  $\sigma^I$  является вектор  $\sigma_{ij,j}^I$ . Компоненты касательного вектора к некоторой кривой определяются через компоненты нормального вектора этой кривой по формуле  $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ . Изгибающий момент и перерезывающая сила на кривой с нормалью  $\nu$  и касательным вектором  $\tau$  задаются формулами [14]

$$m^I(w) = -m_{ij}^I(w)\nu_j\nu_i, \quad t^I(w) = -m_{ij,k}^I(w)\tau_k\tau_j\nu_i - m_{ij,j}^I(w)\nu_i.$$

В условии (16) два первых слагаемых представляют собой перерезывающую силу в несущих слоях, в последнее слагаемое входят касательные напряжения, которые действуют в мягком связующем слое. Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Предположим, что  $(v^1, v^2, w) \in K$  и  $\operatorname{div} \sigma^I(v^I) \in L_2(\Omega_b)^2$ ,  $m_{ij,ij}^I \in L_2(\Omega_b)$ . Тогда вариационная (8), (9) и дифференциальная (10)–(18) формулировки задачи равновесия эквивалентны.*

**Доказательство.** Покажем эквивалентность формулировок (8), (9) и (10)–(18) и выясним, в каком смысле выполняются соотношения дифференциальной постановки (10)–(18). Для этого воспользуемся результатами, изложенными в [12, 14]. Продолжим отрезок  $b$  до замкнутой кривой  $\Sigma$  класса  $C^{1,1}$ , принадлежащей  $\Omega$ . Единичный вектор нормали  $\nu$  определён на  $\Sigma$  таким образом, что на  $b$  эта нормаль совпадает с ранее выбранной. Введём пространства  $H^{N-1/2}(\Sigma)$ , где  $N = 1, 2$ , с нормой

$$\|\varphi\|_{H^{N-1/2}(\Sigma)}^2 = \|\varphi\|_{H^{N-1}(\Sigma)}^2 + \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \frac{|D^{N-1}\varphi(x) - D^{N-1}\varphi(y)|^2}{|x - y|^2}.$$

Имеют место включения  $v^{I\pm} \in H^{1/2}(\Sigma)^2$ ,  $w^\pm \in H^{3/2}(\Sigma)$ ,  $\nabla w^\pm \in H^{1/2}(\Sigma)^2$ . Также рассмотрим пространства  $H_{00}^{N-1/2}(b)$ , определённые следующим образом:

$$H_{00}^{N-1/2}(b) = \{\varphi \in H_0^{N-1/2}(b) \mid \rho^{-1/2}D^{N-1}\varphi \in L_2(b)\}$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{N-1/2}(b)}^2 = \|\varphi\|_{H^{N-1}(b)}^2 + \|\rho^{-1/2}D^{N-1}\varphi\|_{L_2(b)}^2,$$

где  $\rho$  — расстояние от  $x \in b$  до  $\bar{b} \setminus b$ . Будем использовать следующее свойство пространств  $H_{00}^{N-1/2}(b)$ . Пусть функция  $\varphi$  определена на  $b$ . Обозначим через  $\bar{\varphi}$  продолжение её нулём на  $\Sigma \setminus \bar{b}$ . При этом  $\bar{\varphi} \in H^{N/2}(\Sigma)$  тогда и только тогда, когда  $\varphi \in H_{00}^{N/2}(b)$ . Это значит, что  $[v^I] \in H_{00}^{1/2}(b)^2$ ,  $[w] \in H_{00}^{3/2}(b)$ ,  $[\nabla w] \in H_{00}^{1/2}(b)^2$ .

Обозначим через  $H^{-N+1/2}(\Sigma)$  и  $H_{00}^{-N+1/2}(\Sigma \setminus \bar{b})$  пространства, сопряжённые к  $H^{N-1/2}(\Sigma)$  и  $H_{00}^{N-1/2}(\Sigma \setminus \bar{b})$  соответственно. Пусть дальше угловые скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N-1/2, \Sigma}$  обозначают двойственность между пространствами  $H^{N-1/2}(\Sigma)$  и  $H^{-N+1/2}(\Sigma)$ , а скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{N-1/2, \Sigma \setminus \bar{b}}^{00}$  — двойственность между  $H_{00}^{N-1/2}(\Sigma \setminus \bar{b})$  и  $H_{00}^{-N+1/2}(\Sigma \setminus \bar{b})$ .

Сначала выведем соотношения краевой задачи из вариационного неравенства. Чтобы получить уравнения равновесия, выберем в качестве тестовых функций  $\bar{v}^I = v^I \pm \phi$ ,  $\phi \in C_0^\infty(\Omega_b)^2$ ,  $\bar{w} = w$ . Тогда (10), (11) выполняются в смысле

$$\frac{h}{2}(\sigma^I(v^I), \varepsilon(\phi)) - \frac{h}{2}(f^I, \phi) - ((-1)^I \mu g, \phi) = 0 \text{ для всех } \phi \in C_0^\infty(\Omega_b)^2. \quad (19)$$

Далее, пусть  $\bar{v}^I = v^I$ ,  $\bar{w} = w \pm \psi$ , где  $\psi \in C_0^\infty(\Omega_b)$ . Отсюда

$$\sum_{I=1}^2 \{B_I(w, \psi) - (F^I, \psi)\} + \mu c(g, \nabla \psi) = 0 \text{ для всех } \psi \in C_0^\infty(\Omega_b). \quad (20)$$

То есть (12) также выполняется в смысле обобщённых функций.

Применив формулу Грина к неравенству (9), с учётом (19), (20) получим

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^2 \left\{ -\frac{h}{2} [\langle \sigma_\nu^I(v^I), \bar{v}_\nu^I - v_\nu^I \rangle_{1/2, \Sigma}] - \frac{h}{2} [\langle \sigma_\tau^I(v^I), \bar{v}_\tau^I - v_\tau^I \rangle_{1/2, \Sigma}] - \left[ \left\langle m^I(w), \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] \right. \\ \left. + [\langle t^I(w), \bar{w} - w \rangle_{3/2, \Sigma}] \right\} - \mu [\langle g\nu, \bar{w} - w \rangle_{3/2, \Sigma}] \geq 0. \quad (21) \end{aligned}$$

Здесь произведением тензора напряжений и вектора нормали является вектор  $\sigma^I \nu = (\sigma_{1j}^I \nu_j, \sigma_{2j}^I \nu_j)$ . Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\sigma_\nu^I = \sigma_{ij}^I \nu_j \nu_i, \quad \sigma_\tau^I = \sigma^I \nu - \sigma_\nu^I \nu, \quad \sigma_\tau^I = (\sigma_{\tau 1}^I, \sigma_{\tau 2}^I),$$

а также

$$v_\nu^{I\pm} = v^{I\pm} \cdot \nu, \quad v_\tau^{I\pm} = v^{I\pm} - v_\nu^{I\pm} \cdot \nu \text{ на } \Sigma.$$

Перейдём к выводу граничных условий на  $b$ . Выберем тестовые функции  $\bar{v}^I = v^I \pm \varphi$ ,  $\bar{w} = w$ , где  $\varphi \in H_0^1(\Omega)^2$ . Тогда

$$\sum_{I=1}^2 \{ \langle [\sigma_\nu^I(v^I)], \varphi_\nu \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [\sigma_\tau^I(v^I)], \varphi_\tau \rangle_{1/2, \Sigma} \} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\langle [\sigma_\nu^1(v^1) + \sigma_\nu^2(v^2)], \phi \rangle_{1/2, \Sigma} = \langle [\sigma_{\tau i}^1(v^1) + \sigma_{\tau i}^2(v^2)], \phi_i \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad i = 1, 2, \text{ для всех } \phi, \phi_i \in H^{1/2}(\Sigma).$$

Подставив в (21)  $\bar{v}^1 = v^1 \pm \varphi$ ,  $\bar{v}^2 = v^2$ ,  $\bar{w} = w$ , где  $\varphi \in H_0^1(\Omega)^2$ , получим

$$\langle [\sigma_\nu^1(v^1)], \varphi_\nu \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [\sigma_\tau^1(v^1)], \varphi_\tau \rangle_{1/2, \Sigma} = 0.$$

Это означает, что

$$\langle [\sigma_\nu^1(v^1)], \varphi_\nu \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \langle [\sigma_\tau^1(v^1)], \varphi_\tau \rangle_{1/2, \Sigma} = 0 \text{ для всех } \varphi_\nu \in H^{1/2}(\Sigma), \quad \varphi_\tau \in H^{1/2}(\Sigma)^2. \quad (22)$$

Выбрав  $\bar{v}^1 = v^1 \pm \varphi$ ,  $\bar{v}^2 = v^2$ ,  $\bar{w} = w$ , где  $[\varphi_\nu] = 0$ ,  $\varphi \in H_\Gamma^1(\Omega_b)^2$ , найдём, что

$$\langle \sigma_\tau^1(v^1), [\varphi_\tau] \rangle_{1/2, \gamma}^{00} = 0, \quad (23)$$

где  $\varphi_\tau = (\varphi_1, 0)$ ,  $\sigma_{\tau 2}^1(v^1) = (\sigma_{12}^1(v^1), 0)$  на  $b$ . Определим функционалы  $\sigma_\tau^I(v^I) \in H_{00}^{-1/2}(b)$  по формуле  $\langle \sigma_\tau^I(v^I), \varphi \rangle_{1/2, b}^{00} = \langle \sigma_\tau^I(v^I), \bar{\varphi} \rangle_{1/2, \Sigma}$  для всех  $\bar{\varphi} = \varphi$  на  $b$ ,  $\bar{\varphi} = 0$  на  $\Sigma \setminus \bar{b}$ ,  $\bar{\varphi} \in H^{1/2}(\Sigma)^2$ .

Первые два равенства (15) выполняются в смысле (22), (23).

Далее, пусть  $\bar{v}^I = v^I$ ,  $\bar{w} = w \pm \psi$ , где  $\psi \in H_0^2(\Omega)$ . Отсюда получим равенство

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ - \left\langle [m^I(w)], \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [t^I(w)], \psi \rangle_{3/2, \Sigma} \right\} - \mu c[g_2, \psi]_{3/2, \gamma} = 0. \quad (24)$$

В силу независимости  $\psi$  и  $\frac{\partial\psi}{\partial\nu}$  на контуре  $\Sigma$  получим условия

$$\langle [m^1(w) + m^2(w)], \varphi \rangle_{1/2, \Sigma} = 0 \text{ для всех } \varphi \in H^{1/2}(\Sigma), \quad (25)$$

$$\langle [t^1(w) + t^2(w)], \psi \rangle_{3/2, \Sigma} - \mu c \langle [v_2^2 - v_2^1 + cw_{,2}], \psi \rangle_{3/2, b}^{00} = 0 \text{ для всех } \varphi \in H^{3/2}(\Sigma). \quad (26)$$

После подстановки в (21) функций  $\bar{v}^I = v^I$ ,  $\bar{w} = w \pm \psi$ , где  $[\psi]_{,2} = 0$ ,  $[\psi] \neq 0$  на  $b$ ,  $\psi \in H_{\Gamma}^2(\Omega_b)$ , найдём

$$\langle t^{1+}(w) + t^{2+}(w) - \mu c (v_2^{2+} - v_2^{1+} + cw_{,2}^+), [\psi] \rangle_{3/2, b}^{00} = 0 \text{ для всех } [\psi] \in H_{00}^{3/2}(b), \quad (27)$$

где  $t^{I+} \in H_{00}^{-3/2}(b)$ , если

$$\langle t^{1+}(w), \phi \rangle_{3/2, b}^{00} = \langle t^{1+}(w), \phi \rangle_{3/2, \Sigma} \text{ для всех } \bar{\phi} = \phi \text{ на } b, \quad \bar{\phi} = 0 \text{ на } \Sigma \setminus \bar{b}, \quad \bar{\phi} \in H^{3/2}(\Sigma).$$

Условия (16) выполняются в смысле (26), (27).

Таким образом, от неравенства (21) осталось несколько слагаемых:

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ -\frac{h}{2} \langle \sigma_{22}^I(v^I), [\bar{v}_2^I - v_2^I] \rangle_{1/2, b}^{00} - \langle m^{I+}(w), [\bar{w}_{,2} - w_{,2}] \rangle_{1/2, b}^{00} \right\} \geq 0. \quad (28)$$

Из (28) следует, что при любом  $\varphi \geq 0$ ,  $\varphi \in H_{00}^{1/2}(b)$  имеем

$$\left\langle -\frac{h^2}{8} (\sigma_{22}^1(v^1) + \sigma_{22}^2(v^2)) - |m^{1+}(w) + m^{2+}(w)|, \varphi \right\rangle_{1/2, b}^{00} \geq 0.$$

Подставляя в (21) в качестве тестовых функций  $(0, 0, 0)$  и  $2(v^1, v^2, w)$ , получим условие (18):

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} \langle \sigma_{22}^I(v^I), [v_2^I] \rangle_{1/2, b}^{00} + \langle m^{I+}(w), [w_{,2}] \rangle_{1/2, b}^{00} \right\} = 0.$$

Таким образом, получили все уравнения равновесия и граничные условия краевой задачи (10)–(18), совместимые с принятыми предположениями.

Обратно, выведем неравенство (9) из (10)–(18). Возьмём уравнение (12), умножим на  $(\bar{w} - w)$ , где  $\bar{w} \in K$ , и проинтегрируем по области  $\Omega_b$ . Получим

$$-\sum_{I=1}^2 (m_{ij,ij}^I(w) + F^I, \bar{w} - w) - \mu c (\operatorname{div} g, \bar{w} - w) = 0.$$

Воспользуемся формулой Грина [14], условиями закрепления на внешней границе (13), а также (10), (11) и получим

$$\begin{aligned} & \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^I), \varepsilon(\bar{v}^I - v^I)) + B_I(w, \bar{w} - w) - \frac{h}{2} (f^I, \bar{v}^I - v^I) - (F^I, \bar{w} - w) \right\} \\ & \quad + \mu (g, \bar{g} - g) + \mu c [\langle g\nu, \bar{w} - w \rangle_{3/2, \Sigma}] \\ & \quad + \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} [\langle \sigma_\nu^I(v^I), \bar{v}_\nu^I - v_\nu^I \rangle_{1/2, \Sigma}] + \frac{h}{2} [\langle \sigma_\tau^I(v^I), \bar{v}_\tau^I - v_\tau^I \rangle_{1/2, \Sigma}] \right\} \end{aligned}$$



$$+ \left[ \left\langle m^I(w), \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] - [\langle t^I(w), \bar{w} - w \rangle_{3/2, \Sigma}] \} = 0. \quad (29)$$

Используя условие (16) и последнее равенство (15), получим

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \left[ \left\langle m^I(w), \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] - [\langle t^I(w), \bar{w} - w \rangle_{3/2, \Sigma}] \right\} + \mu [\langle g\nu, \bar{w} - w \rangle_{3/2, \Sigma}] = \sum_{I=1}^2 \left\langle m^{I+}(w), \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right\rangle_{1/2, b}^{00}.$$

Для того чтобы вывести равенство

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} [\langle \sigma_\nu^I(v^I), \bar{v}_\nu^I - v_\nu^I \rangle_{1/2, \Sigma}] + \frac{h}{2} [\langle \sigma_\tau^I(v^I), \bar{v}_\tau^I - v_\tau^I \rangle_{1/2, \Sigma}] \right\} = \sum_{I=1}^2 \frac{h}{2} \langle \sigma_\nu^I(v^I), [\bar{v}_\nu^I - v_\nu^I] \rangle_{1/2, b}^{00},$$

были использованы два первых условия (15). Наконец, с помощью условий (14), (17) и (18) оценим сумму

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \left\langle m^{I+}(w), \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right\rangle_{1/2, b}^{00} + \langle \sigma_\nu^I(v^I), [\bar{v}_\nu^I - v_\nu^I] \rangle_{1/2, b}^{00} \right\} \leq 0.$$

Это неравенство и равенство (29) вместе дают искомое неравенство (9).  $\square$

**Замечание 1.** В мягком слое на отрезке  $b$  выполнено условие непроникания, если выполнено условие непроникания в несущих слоях.

Действительно, найдём, чему равен скачок горизонтальных перемещений по нормали на отрезке  $b$  по всей толщине мягкого слоя. Принимая во внимание (3) и (4), получим

$$[v^{z0}\nu] = \frac{1}{2} \left[ v_2^2 + v_2^1 + \frac{z}{\delta} \left( v_2^2 - v_2^1 + \frac{h}{2} w_{,2} \right) \right], \quad z \in (-\delta, \delta).$$

Из формул (1) и (2) найдём выражения для горизонтальных перемещений вдоль оси  $x_2$  точек нижнего и верхнего несущих слоёв на поверхностях  $z = -\delta$  и  $z = \delta$  соответственно. Тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$[v^{z0}\nu] = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{\delta} \right) [v_2^{z2}(x, \delta)] + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{\delta} \right) [v_2^{z1}(x, -\delta)], \quad z \in (-\delta, \delta).$$

Здесь в правой части выражения, стоящие в квадратных скобках, неотрицательны в силу условия непроникания (14). Следовательно,  $[v^{z0}\nu] \geq 0$  при всех  $z \in (-\delta, \delta)$ .

## 2. РАВНОВЕСИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ ТРЕЩИНУ

В этом разделе рассматривается случай предельного перехода в задаче (8), (9), когда полутолщина мягкого слоя  $\delta$  стремится к нулю, а приведённая жёсткость мягкого слоя стремится к бесконечности. Далее в работе будем считать, что  $G$  — положительная постоянная, т. е. из (7) следует  $\mu = G/(2\delta)$ . Подставим это выражение в вариационное неравенство (8), (9), его решение  $v^I = v^{\delta I}$ ,  $w = w^\delta$  зависит от параметра  $\delta$ . Подставляя в (9) последовательно в качестве тестовых функций  $(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) = (0, 0, 0)$  и  $(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) = 2(v^{\delta 1}, v^{\delta 2}, w^\delta)$ , получим равенство

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^{\delta I}), \varepsilon(v^{\delta I})) + B_I(w^\delta, w^\delta) - \frac{h}{2} (f^I, v^{\delta I}) - (F^I, w^\delta) \right\} + \frac{G}{2\delta} (g^\delta, g^\delta) = 0. \quad (30)$$

Из (30) следуют равномерные по  $\delta > 0$  оценки

$$\|v^{\delta I}\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega_b)^2} \leq C, \quad \|w^{\delta}\|_{H_{\Gamma}^2(\Omega_b)} \leq C, \quad G \left\| v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2} \nabla w^{\delta} \right\|_{L_2(\Omega_b)^2} \leq 2C\delta^{1/2},$$

где  $C$  — положительная постоянная. Из двух первых неравенств следует, что  $v^{\delta I} \rightarrow v^{0I}$  слабо в  $H_{\Gamma}^1(\Omega_b)^2$ ,  $w^{\delta} \rightarrow w^0$  слабо в  $H_{\Gamma}^2(\Omega_b)$  при  $\delta \rightarrow 0$ , где  $(v^{01}, v^{02}, w^0) \in K$  — некоторые функции. Последнее неравенство означает, что  $v^{02} - v^{01} + \frac{h}{2} \nabla w^0 = 0$  почти всюду в  $\Omega_b$ .

Определим новое множество допустимых перемещений

$$K_0 = \left\{ (\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) \in H_{\Gamma}^1(\Omega_b)^2 \times H_{\Gamma}^1(\Omega_b)^2 \times H_{\Gamma}^2(\Omega_b) \mid \bar{v}^2 - \bar{v}^1 + \frac{h}{2} \nabla \bar{w} = 0 \text{ в } \Omega_b, [\bar{v}_2^I] \geq \frac{h}{4} |[\bar{w}_2]| \text{ на } b \right\}.$$

Возьмём тестовые функции из  $K_0$  и перейдём к нижнему пределу в (8), (9). Получим

$$(v^{01}, v^{02}, w^0) \in K_0, \quad (31)$$

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(\bar{v}^I - v^{0I})) + B_I(w^0, \bar{w} - w^0) - \frac{h}{2} (f^I, \bar{v}^I - v^{0I}) - (F^I, \bar{w} - w^0) \right\} \geq 0$$

для всех  $(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) \in K_0$ . (32)

То есть  $(v^{01}, v^{02}, w^0)$  — решение задачи минимизации функционала

$$\Pi_0(\bar{v}^1, \bar{v}^2, \bar{w}) = \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{4} (\sigma^I(\bar{v}^I), \varepsilon(\bar{v}^I)) + \frac{1}{2} B_I(\bar{w}, \bar{w}) - \frac{h}{2} (f^I, \bar{v}^I) - (F^I, \bar{w}) \right\}$$

на множестве  $K_0$ . Множество  $K_0$  является выпуклым и замкнутым, а функционал  $\Pi_0$  — коэрцитивный и слабо полунепрерывный снизу. Следовательно, задача минимизации имеет решение, которое удовлетворяет вариационному неравенству (31), (32). Так как функционал  $\Pi_0$  строго выпуклый, то это решение единственно.

**Теорема 2.** При  $\delta \rightarrow 0$  последовательность функций  $(v^{\delta 1}, v^{\delta 2}, w^{\delta})$  сильно сходится к  $(v^{01}, v^{02}, w^0)$ .

**Доказательство.** Из (30) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf \frac{G}{2\delta}(g^{\delta}, g^{\delta}) \leq \limsup \frac{G}{2\delta}(g^{\delta}, g^{\delta}) \\ &= \limsup \sum_{I=1}^2 \left\{ -\frac{h}{2} (\sigma^I(v^{\delta I}), \varepsilon(v^{\delta I})) - B_I(w^{\delta}, w^{\delta}) - \frac{h}{2} (f^I, v^{\delta I}) - (F^I, w^{\delta}) \right\} \\ &\leq \sum_{I=1}^2 \left\{ -\frac{h}{2} (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(v^{0I})) - B_I(w^0, w^0) - \frac{h}{2} (f^I, v^{0I}) - (F^I, w^0) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда имеем  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (g^{\delta}, g^{\delta}) = 0$ . Используя это равенство и (30), найдём сходимость

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^{\delta I}), \varepsilon(v^{\delta I})) + B_I(w^\delta, w^\delta) \right\} &= \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (f^I, v^{\delta I}) + (F^I, w^\delta) + \frac{G}{2\delta} (g^\delta, g^\delta) \right\} \\ &\rightarrow \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (f^I, v^{0I}) + (F^I, w^0) \right\} = \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(v^{0I})) + B_I(w^0, w^0) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условия

$$\liminf (\sigma^I(v^{\delta I}), \varepsilon(v^{\delta I})) \geq (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(v^{0I})), \quad \liminf B_I(w^\delta, w^\delta) \geq B_I(w^0, w^0),$$

получим

$$(\sigma^I(v^{\delta I}), \varepsilon(v^{\delta I})) \rightarrow (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(v^{0I})), \quad B_I(w^\delta, w^\delta) \rightarrow B_I(w^0, w^0).$$

Вместе со слабой сходимостью последовательностей функций это даёт то, что  $v^{\delta I} \rightarrow v^{0I}$  сильно в  $H_1^1(\Omega_b)^2$  и  $w^\delta \rightarrow w^0$  сильно в  $H_1^2(\Omega_b)$ .  $\square$

Имеем краевую задачу для функций  $v^{01}, v^{02}, w^0$ :

$$-\operatorname{div} \sigma^1(v^{01}) - \operatorname{div} \sigma^2(v^{02}) = f^1 + f^2, \quad \sigma^I(v^{0I}) = A^I \varepsilon(v^{0I}) \text{ в } \Omega_b, \quad (33)$$

$$-m_{ij,ij}^1(w^0) - m_{ij,ij}^2(w^0) + \frac{h^2}{8} (\sigma_{ij,ij}^1(v^{01}) + f_{i,i}^1 - \sigma_{ij,ij}^2(v^{02}) - f_{i,i}^2) = F^1 + F^2 \text{ в } \Omega_b, \quad (34)$$

$$v^{02} - v^{01} + \frac{h}{2} \nabla w^0 = 0 \text{ в } \Omega_b, \quad (35)$$

$$v^{0I} = 0, \quad w^0 = \frac{\partial w^0}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (36)$$

$$[v_2^{0I}] \geq \frac{h}{4} |[w_{,2}^0]| \text{ на } b, \quad (37)$$

$$[K_\nu] = 0, \quad K_\tau = 0, \quad [M] = 0 \text{ на } b, \quad (38)$$

$$-N_{,1}^\pm + t^{1\pm}(w^0) + t^{2\pm}(w^0) + \frac{h^2}{8} (\sigma_{2j,j}^{1\pm}(v^{01}) - \sigma_{2j,j}^{2\pm}(v^{02})) = \frac{h^2}{8} (f_2^{2\pm} - f_2^{1\pm}) \text{ на } b, \quad (39)$$

$$[\sigma_{12}^I(v^{0I})]|_{\bar{b} \setminus b} = 0, \quad |M| \leq \frac{h}{2} K_\nu, \quad K_\nu [v_2^{0I}] + \left( M + (-1)^I \frac{h}{4} K_\nu \right) [w_{,2}^0] = 0 \text{ на } b. \quad (40)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$K_\nu = -\frac{h}{2} (\sigma_\nu^1(v^{01}) + \sigma_\nu^2(v^{02})), \quad (41)$$

$$K_\tau = -\frac{h}{2} (\sigma_\tau^1(v^{01}) + \sigma_\tau^2(v^{02})), \quad (42)$$

$$M = -\frac{h^2}{8} (\sigma_\nu^1(v^{01}) - \sigma_\nu^2(v^{02})) - (m^1(w^0) + m^2(w^0)), \quad (43)$$

$$N = -\frac{h^2}{8} (\sigma_\tau^1(v^{01}) - \sigma_\tau^2(v^{02})). \quad (44)$$

В (33)–(40) через  $K_\nu, K_\tau$  обозначены усилия, через  $M$  — изгибающий момент двухслойной пластины на берегах интервала  $b$ , взятые со знаком минус. В левой части равенства (39) стоит выражение для обобщённой поперечной силы в двухслойной пластине [1, с. 51] на берегах  $b$ . Имеет место следующая

**Теорема 3.** *Предположим, что*

$$(v^{01}, v^{02}, w^0) \in K_0, \quad \operatorname{div} \sigma^I(v^{0I}) \in L_2(\Omega_b)^2, \quad \sigma_{ij,ij}^I(v^{0I}) \in L_2(\Omega_b), \quad m_{ij,ij}^I(w^0) \in L_2(\Omega_b).$$

Пусть  $f_{i,i}^I \in L_2(\Omega)$ . Тогда вариационная (31), (32) и дифференциальная (33)–(40) формулировки задачи равновесия двухслойной пластины с вертикальной трещиной эквивалентны.

**Доказательство.** Сначала введём функцию, равную горизонтальным смещениям точек на плоскости  $z = 0$ :

$$u = v^{01} - \frac{h}{4} \nabla w^0 = v^{02} + \frac{h}{4} \nabla w^0, \quad (45)$$

аналогично определяется функция  $\bar{u}$ . Тогда неравенство (32) примет вид

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(\bar{u} - u)) + B_I(w^0, \bar{w} - w^0) - \frac{h}{2} (f^I, \bar{u} - u) - (F^I, \bar{w} - w^0) - (-1)^I \frac{h^2}{8} (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(\nabla \bar{w} - \nabla w^0)) + (-1)^I \frac{h^2}{8} (f^I, \nabla \bar{w} - \nabla w^0) \right\} \geq 0. \quad (46)$$

Подставим в (46) пробные функции  $\bar{u} = u \pm \phi$ ,  $\phi \in C_0^\infty(\Omega_b)^2$ ,  $\bar{w} = w^0$ . Тогда уравнение (33) выполняется в смысле

$$\sum_{I=1}^2 \{ (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(\phi)) - (f^I, \phi) \} = 0. \quad (47)$$

Далее выведем уравнение (34). Пусть  $\bar{u} = v$ ,  $\bar{w} = w^0 \pm \psi$ , где произвольная функция  $\psi$  принадлежит  $C_0^\infty(\Omega_b)$ . Отсюда получим равенство

$$\sum_{I=1}^2 \left\{ B_I(w^0, \psi) - (F^I, \psi) - (-1)^I \frac{h^2}{8} (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(\nabla \psi)) + (-1)^I \frac{h^2}{8} (f^I, \nabla \psi) \right\} = 0. \quad (48)$$

Продолжим отрезок  $b$  замкнутой кривой  $\Sigma$  класса  $C^{1,1}$ , полностью содержащейся в области  $\Omega_b$ . Применим формулу Грина [14] к неравенству (46), используем (47), (48) и обозначения (41)–(44). Имеем

$$\begin{aligned} & \langle [K_\nu], \bar{u}_\nu - u_\nu \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [K_\tau], \bar{u}_\tau - u_\tau \rangle_{1/2, \Sigma} + \left[ \left\langle M, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w^0}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] + \left[ \left\langle N, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} - \frac{\partial w^0}{\partial \tau} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] \\ & + \left[ \left\langle t^1(w^0) + t^2(w^0) + \frac{h^2}{8} (\sigma_{ij,j}^1(v^{01}) - \sigma_{ij,j}^2(v^{02}) + f_i^1 - f_i^2) \nu_i, \bar{w} - w^0 \right\rangle_{3/2, \Sigma} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Подставляя в (49) тестовые функции вида  $\bar{u} = u \pm \phi$ ,  $\phi \in H_0^1(\Omega)^2$ ,  $\bar{w} = w^0$ , получим

$$\langle [K_\nu], \phi_\nu \rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [K_\tau], \phi_\tau \rangle_{1/2, \Sigma} = 0,$$

откуда в силу независимости  $\phi_\nu$  и  $\phi_\tau$  на  $\Sigma$  следует

$$\langle [K_\nu], \phi_\nu \rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad \langle [K_\tau], \phi_\tau \rangle_{1/2, \Sigma} = 0. \quad (50)$$

Выбрав  $\bar{u} = u \pm \phi$ ,  $[\phi_\nu] = 0$  на  $b$ ,  $\phi \in H_1^1(\Omega_b)^2$ ,  $\bar{w} = w^0$ , найдём ещё одно условие на  $b$ :

$$\langle [K_\tau], [\phi_\tau] \rangle_{1/2, b}^{00} = 0, \quad (51)$$

т. е. первое равенство (38) выполняется в смысле первого равенства (50), второе равенство (38) выполняется в смысле второго равенства (50) и (51).

Пусть  $\bar{u} = u$ ,  $\bar{w} = w^0 \pm \psi$ ,  $\psi \in H_0^2(\Omega)$ . Тогда из равенства

$$\left\langle [M], \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} + \left\langle [N], \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\rangle_{1/2, \Sigma} + \langle [t^1(w^0) + t^2(w^0)], \psi \rangle_{3/2, \Sigma}$$

$$+ \frac{h^2}{8} \langle [\sigma_{ij,j}^1(v^{01}) - \sigma_{ij,j}^2(v^{02}) + f_i^1 - f_i^2] \nu_i, \psi \rangle_{3/2, \Sigma}, \psi \rangle_{3/2, \Sigma} = 0$$

следует

$$\left\langle [M], \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} = 0, \quad (52)$$

$$\left\langle [N], \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right\rangle_{1/2, \Sigma} + \left\langle [t^1(w^0) + t^2(w^0)] + \frac{h^2}{8} [\sigma_{ij,j}^1(v^{01}) - \sigma_{ij,j}^2(v^{02}) + f_i^1 - f_i^2] \nu_i, \psi \right\rangle_{3/2, \Sigma} = 0. \quad (53)$$

Подставляя в (49) функции  $\bar{u} = u$ ,  $\bar{w} = w^0 \pm \psi$ ,  $[\psi, 2] = 0$  на  $b$ ,  $\psi \in H_{\Gamma}^2(\Omega_b)$ , получим

$$\langle N^+, [\psi, 1] \rangle_{1/2, b}^{00} + \left\langle t^{1+}(w^0) + t^{2+}(w^0) + \frac{h^2}{8} (\sigma_{2j,j}^{1+}(v^{01}) - \sigma_{2j,j}^{2+}(v^{02}) + f_2^{1+} - f_2^{2+}), [\psi] \right\rangle_{3/2, b}^{00} = 0. \quad (54)$$

Равенства (53), (54) вместе дают условие (39). В результате от неравенства (49) остались только два слагаемых:

$$\langle K_{\nu}, [\bar{u}_2 - u_2] \rangle_{1/2, b}^{00} + \langle M, [\bar{w}_{,2} - w_{,2}^0] \rangle_{1/2, b}^{00} \geq 0. \quad (55)$$

Подставим в (55) пробные функции  $\bar{u} = u + \varphi$ ,  $\bar{w} = w^0 + \psi$ ,  $[\varphi_2] \geq h|[\psi, 2]|/2$  на  $b$ ,  $\varphi \in H_{\Gamma}^1(\Omega_b)^2$ ,  $\psi \in H_{\Gamma}^2(\Omega_b)$ , получим

$$\left\langle \frac{h}{2} K_{\nu} - |M|, [\varphi_2] \right\rangle_{1/2, b}^{00} \geq 0. \quad (56)$$

Наконец, подставив последовательно  $(\bar{u}, \bar{w}) = (0, 0)$  и  $(\bar{u}, \bar{w}) = 2(u, w^0)$  в (55), имеем равенство

$$\langle K_{\nu}, [u_2] \rangle_{1/2, b}^{00} + \langle M, [w_{,2}^0] \rangle_{1/2, b}^{00} = 0. \quad (57)$$

Таким образом, получили третье условие (40).

Обратно, покажем, что из уравнений и граничных условий краевой задачи следует уравнение равновесия. Умножим уравнение (34) на  $\bar{w} - w^0$  и проинтегрируем по области  $\Omega_b$ . Тогда, используя формулу Грина, условия закрепления (36), уравнения (33), (35) и обозначения (41)–(45), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{I=1}^2 \left\{ \frac{h}{2} (\sigma^I(v^{0I}), \varepsilon(\bar{v}^I - v^{0I})) + B_I(w^0, \bar{w} - w^0) - \frac{h}{2} (f^I, \bar{v}^I - v^{0I}) - (F^I, \bar{w} - w^0) \right\} - \langle K_{\nu}, \bar{u}_{\nu} - u_{\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} \\ & - \langle K_{\tau}, \bar{u}_{\tau} - u_{\tau} \rangle_{1/2, \Sigma} - \left[ \left\langle M, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w^0}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] \\ & - \left[ \left\langle N, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau} - \frac{\partial w^0}{\partial \tau} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] - \langle [t^1(w^0) + t^2(w^0)], \bar{w} - w^0 \rangle_{3/2, \Sigma} \\ & - \frac{h^2}{8} \langle [\sigma_{ij,j}^1(v^{01}) - \sigma_{ij,j}^2(v^{02}) + f_i^1 - f_i^2] \nu_i, \bar{w} - w^0 \rangle_{3/2, \Sigma} = 0. \quad (58) \end{aligned}$$

Сумма последних трёх слагаемых левой части (58) равна нулю в силу условия (38) и первого равенства (39), выполняющихся в смысле (53), (54). Оценка

$$- \langle K_{\nu}, \bar{u}_{\nu} - u_{\nu} \rangle_{1/2, \Sigma} - \langle K_{\tau}, \bar{u}_{\tau} - u_{\tau} \rangle_{1/2, \Sigma} - \left[ \left\langle M, \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial w^0}{\partial \nu} \right\rangle_{1/2, \Sigma} \right] \leq 0$$

получается с помощью условий (38), выполненных в смысле (50)–(52), уравнения (35) и неравенства (37), а также второго и третьего условий (40), выполненных в смысле (56), (57). Таким образом, получено искомое неравенство (32).  $\square$

**Замечание 2.** При  $\delta \rightarrow 0$  функция горизонтальных перемещений мягкого слоя (3), (4)

$$v^{z*\delta} = \frac{1}{2}(v^{\delta 1} + v^{\delta 2}) + \frac{z}{2\delta} \left( v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2} \nabla w^\delta \right), \quad z \in (-\delta, \delta),$$

сходится к функции  $v^{*0} = (v^{01} + v^{02})/2$  сильно в  $H_\Gamma^1(\Omega_b)^2$ .

Чтобы показать справедливость этого утверждения, оценим норму разности

$$\|v^{z*\delta} - v^{*0}\|_{H_\Gamma^1(\Omega_b)^2} \leq \frac{1}{2} \|v^{\delta 1} + v^{\delta 2} - v^{01} - v^{02}\|_{H_\Gamma^1(\Omega_b)^2} + \frac{|z|}{2\delta} \left\| v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2} \nabla w^\delta \right\|_{H_\Gamma^1(\Omega_b)^2}.$$

Первое слагаемое в правой части неравенства стремится к нулю вследствие теоремы 2. Для второго слагаемого справедлива оценка

$$\frac{|z|}{2\delta} \left\| v^{\delta 2} - v^{\delta 1} + \frac{h}{2} \nabla w^\delta \right\|_{L_2(\Omega_b)^2} \leq \frac{C}{G} \delta^{1/2}.$$

Следовательно,  $v^{z*\delta} \rightarrow v^{*0}$  сильно в  $H_\Gamma^1(\Omega_b)^2$ . Из (45) следует, что функция  $v^{*0}$  является вектором горизонтальных перемещений точек двухслойной пластины на плоскости  $z = 0$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача равновесия упругой трёхслойной пластины, содержащей сквозную трещину. Задача равновесия двухслойной пластины Кирхгофа — Лява, содержащей вертикальную трещину, получена из задачи равновесия трёхслойной пластины с помощью предельного перехода, когда полутолщина мягкого слоя стремится к нулю, а его приведённая жёсткость — к бесконечности. Для обеих задач показана однозначная разрешимость, доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок. Показана сильная сходимости последовательности решений задач равновесия трёхслойной пластины Кирхгофа — Лява при стремлении толщины мягкого слоя к нулю, а его приведённой жёсткости к бесконечности — к решению задачи равновесия двухслойной пластины с вертикальной трещиной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980.
2. Reissner E. Contributions to the problem of structural analysis of sandwich-type plates and shells. Theory and practice of sandwich construction in aircraft. 1948. (Preprint/ Inst. Aeron. Sci. A symposium; No. 165), pp. 21–48.
3. Григолюк Э.И. Уравнение трёхслойных оболочек с лёгким наполнителем // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1957. № 1. С. 77–84.
4. Григолюк Э.И., Чулков П.П. К общей теории трёхслойных оболочек // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 5. С. 1012–1014.
5. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Обобщённая модель механики тонкостенных конструкций из композитных материалов // Мех. композит. матер. 1988. № 4. С. 698–704.
6. Королёв В.И. Упруго-пластические деформации оболочек. М.: Машиностроение, 1971.
7. Димитриенко Ю.И. Асимптотическая теория многослойных тонких пластин // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2012. № 3. С. 86–99.
8. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Юрин Ю.В. Вариационные уравнения асимптотической теории многослойных тонких пластин // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 4. С. 67–87.
9. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Пути развития теории многослойных пластин и оболочек // Вестн. ТГТУ. 2005. Т. 11, С. 439–448.

10. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки. М.: Стройиздат, 1986.
11. Хлуднев А.М. О контакте двух пластин, одна из которых содержит трещину // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, № 5. С. 882–894.
12. Khludnev A.M., Kovtunen V.A. Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
13. Рудой Е.М. Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // Прикл. математика и техн. физика. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.
14. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
15. Лазарев Н.П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей сквозную трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 4. С. 32–43.
16. Щербаков В.В. Об одной задаче управления формой тонких включений в упругих телах // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 1. С. 138–147.
17. Рудой Е.М., Казаринов Н.А., Слесаренко В.Ю. Численное моделирование равновесия двухслойной упругой конструкции со сквозной трещиной // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, № 1. С. 77–90.
18. Beneveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity // Mech. of Materials. 2001. V. 33. P. 309–323.
19. Khludnev A.M. On modelling elastic bodies with defects // Sib. Electr. Math. Rep. 2018. V. 15. P. 153–166.
20. Фанкина И.В. О равновесии двухслойной упругой конструкции при наличии трещины // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 107–120.
21. Фанкина И.В. О равновесии двухслойной упругой конструкции с верхним слоем, накрывающим вершину дефекта // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 141–160.
22. Rudoy E. Asymptotic modelling of bonded plates by a soft thin adhesive layer // Sib. Electr. Math. Rep. 2020. V. 17, P. 615–625.
23. Furtsev A., Rudoy E. Variational approach to modelling soft and stiff interfaces in the Kirchoff–Love theory of plates // Int. J. Solids Structures. 2020. V. 202. P. 562–574.

UDC 539.3:517.97

**EQUILIBRIUM OF A THREE-LAYER PLATE WITH CRACK**

© 2022 E. V. Pyatkina

*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,  
pr. Acad. Lavrentyeva 15, Novosibirsk 630090, Russia*

E-mail: dusya\_pyatkina@mail.ru

Received 22.07.2021, revised 23.09.2021, accepted 21.10.2021

**Abstract.** An equilibrium problem of a three-layer plate which is clamped at outer edge and contains a through vertical crack is studied. The three-layer plate consists of two structural layers which are considered as anisotropic Kirchhoff–Love plates and a soft layer between them. At the crack edges in the structural layers a non-penetration condition is posed. Passage to the limit as the width of soft layer tends to zero and its reduced stiffness tends to infinity is considered. For the both problems a unique solvability is shown, variational and differential statements are presented.

**Keywords:** Kirchhoff–Love plate, three-layer plate, crack with non-penetration condition.

DOI: 10.33048/SIBJIM.2022.25.108

## REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. Mechanics of multilayered structures. Moscow: Mashinostroenie, 1980 (in Russian).
2. Reissner E. Contributions to the problem of structural analysis of sandwich-type plates and shells. Theory and practice of sandwich construction in aircraft. 1948. (Preprint/ Inst. Aeron. Sci. A symposium; No. 165), pp. 21–48.
3. Grigolyuk E.I. Equation of three-layered shells with lightweight intermediate layer. *Bull. AN USSR. Division of Technical Sci.*, 1957, No. 1, pp. 77–84 (in Russian).
4. Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. On the general theory of three-layer shells with a big deflection. *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, 1963, Vol. 150, No. 5, pp. 1012–1014.
5. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Generalized model of mechanics of composite material thin-shell structures. *Mech. Composite Mater.*, 1988, No. 4, pp. 698–704 (in Russian).
6. Korolev V.I. Elasto-plastic deformation of shells. Moscow: Mashinostroenie, 1971 (in Russian)
7. Dimitrienko Yu.I. Asymptotic theory of multilayer thin plates. *Vestn. Moskov. Univ. im. Bauman, Ser. Estestv. Nauki*, 2012, No. 3, pp. 86–99 (in Russian).
8. Dimitrienko Yu.I., Gubareva E.A., Yurin Yu.V. Variational equations of asymptotic theory of multilayer thin plates. *Vestn. Moskov. Univ. im. Bauman, Ser. Estestv. Nauki*, 2015, No 4, pp. 67–87 (in Russian).
9. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. Development of the theory of elastic multilayered plates and shells. *Vestn. TSTU*, 2005, Vol. 11, pp. 439–448 (in Russian).
10. Rzanitsyn A.R. Built-up bars and plates. Moscow: Stroiizdat, 1986 (in Russian).
11. Khludnev A.M. On the contact of two plates, one of which contains a crack. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, Vol. 61, No. 5, pp. 851–862.
12. Khludnev A.M., Kovtunenkov V.A. Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.



13. Rudoy E.M. Differentiation of energy functionals in two-dimensional elasticity theory for solids with curvilinear cracks. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2004, Vol. 45, No. 6, pp. 843–852.
14. Khludnev A.M. Elasticity theory problems in nonsmooth domains. Moscow: Fizmatlit, 2010.
15. Lazarev N.P. The problem of equilibrium of a Timoshenko-type plate containing a through-thickness crack. *J. Appl. Industr. Math.*, 2011, Vol. 14, No. 4, pp. 32–43.
16. Shcherbakov V.V. On an optimal control problem of thin inclusions shapes in elastic bodies. *J. Appl. Industr. Math.*, 2013, Vol. 7, No. 3, pp. 435–443.
17. Rudoy E.M., Kazarinov N.A., Slesarenko V.Yu. Numerical simulation of the equilibrium of an elastic two-layer structure with a crack. *Numer. Analys. Appl.*, 2017, Vol. 10, No. 1, pp. 63–73.
18. Beneveniste Y., Miloh T. Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity. *Mech. of Materials*, 2001, Vol. 33, pp. 309–323.
19. Khludnev A.M. On modelling elastic bodies with defects. *Sib. Electr. Math. Rep.*, 2018, Vol. 15, pp. 153–166.
20. Fankina I.V. On the equilibrium of a two-layer elastic structure with a crack. *J. Appl. Industr. Math.*, 2019, Vol. 13, No. 4, pp. 629–641.
21. Fankina I.V. On the equilibrium problem for a two-layer structure with the upper layer covering a defect tip. *Sib. Electr. Math. Rep.*, 2020, Vol. 17, pp. 141–160.
22. Rudoy E. Asymptotic modelling of bonded plates by a soft thin adhesive layer. *Sib. Electr. Math. Rep.*, 2020, Vol. 17, pp. 615–625.
23. Furtsev A., Rudoy E. Variational approach to modelling soft and stiff interfaces in the Kirchoff–Love theory of plates. *Inter. J. Solids Structures*, 2020, Vol. 202, pp. 562–574.