E. E. Bukzhalev, On an Application of the Method of Differential Inequalities to Equations of Parabolic Type Whose Right-Hand Side Grows Faster Than Quadratically with Respect to the Space Gradient,
Differ. Uravn., 2005, Volume 41, Number 3, 356–365

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 3, с. 356–365

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ К УРАВНЕНИЯМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ПРАВАЯ ЧАСТЬ КОТОРЫХ РАСТЕТ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ГРАДИЕНТУ БОЛЕЕ ЧЕМ КВАДРАТИЧНО

© 2005 г. Е. Е. Букжалёв

1. МОДИФИКАЦИЯ ТЕОРЕМЫ АМАННА О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В настоящей работе предлагается некоторая модификация метода дифференциальных неравенств (см. [1]) для дальнейшего его применения к сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям параболического типа.

Рассмотрим задачу

$$Ly = y_t - ky_{xx} + f(y_x, y, x, t) = 0,$$
$$y(x, t+T) = y(x,t), \quad (x,t) \in \Omega = (a,b) \times \mathbb{R}, \quad y(a,t) = y^0(t), \quad y(b,t) = y^1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $k = \mathrm{const} > 0$, f, y^0 и y^1 – T-периодические по t функции.

Определение 1. Нижним и верхним (барьерными) решениями задачи (1) называются соответственно T-периодические по t функции $\alpha = \alpha(x,t)$ и $\beta = \beta(x,t)$, принадлежащие $C^2(\overline{\Omega})$ и такие, что: 1) $\alpha(a,t) < y^0(t) < \beta(a,t)$, $\alpha(b,t) < y^1(t) < \beta(b,t)$; 2) $L\alpha(x,t) = -\psi_\alpha(x,t) < 0$, $L\beta(x,t) = +\psi_\beta(x,t) > 0$, $(x,t) \in \Omega$.

Введем обозначения: $B = (\alpha, \beta) \times \Omega$, $B^M = (\alpha_x - M, \beta_x + M) \times B$, $B^* = B^\infty = \mathbb{R} \times B$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(z,y,x,t)$ принадлежит классу A в области B $(f \in A(B))$, если $f(z,y,x,t) = O(z^2)$ при $|z| \to \infty$, $(y,x,t) \in \overline{B}$.

В работе [2] доказана теорема (точнее, ее более общий вариант, в частности, в качестве x взята точка n-мерного пространства).

Теорема 1. *Пусть существуют нижнее $\alpha(x,t)$ и верхнее $\beta(x,t)$ решения задачи (1), образующие упорядоченную на $\overline{\Omega}$ пару (α,β). Далее, пусть функция*

$$f(z,y,x,t) \in C^1(\overline{B}^*) \cap A(B), \quad y^0(t), y^1(t) \in C^2(\mathbb{R}).$$

Тогда существует решение задачи (1) такое, что $\alpha(x,t) \le y(x,t) \le \beta(x,t)$.

Наша цель – распространить результаты теоремы 1 на некоторый класс функций f, допускающий более чем квадратичный рост по первому аргументу.

Пусть

$$\|\beta - \alpha\|_{C(\overline{\Omega})} < l, \quad \|\psi_\alpha\|_{C(\overline{\Omega})} < \Delta_\alpha, \quad \|\psi_\beta\|_{C(\overline{\Omega})} < \Delta_\beta, \quad \|f_z\|_{C(\overline{B}^M)} < f_1(M), \quad \|f_y\|_{C(\overline{B}^M)} < f_2(M).$$

Определение 3. Будем говорить, что функция $f(z,y,x,t)$ принадлежит классу $A1$ в области B^M $(f \in A1(B^M))$, если существует положительное число M такое, что 1) $M > 4l/(b-a)$; 2) $M > 2pf_1 + [4(pf_1)^2 + 4p(f_2 l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta) + 2p^2]^{1/2}$, где $p = l/k$.

Теорема 2. *Пусть выполнены требования теоремы 1 с тем лишь изменением, что функция $f(z,y,x,t) \in C^1(\overline{B}^M) \cap A1(B^M)$. Тогда существует решение задачи (1) такое, что*

$$\alpha(x,t) \le y(x,t) \le \beta(x,t), \quad \alpha_x - M < y_x < \beta_x + M.$$

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы 2 справедливо утверждение* $|\beta_x - \alpha_x| < M$.

Доказательство. Введем обозначение $u(x,t) = \beta(x,t) - \alpha(x,t)$, $0 \le u \le l$. Требуется показать, что $-M < u_x < M$.

Остановимся на верхнем неравенстве (нижнее рассматривается аналогично). Сперва докажем, что существует по крайней мере одна точка $(x,t) = P_1(x_1,t_1)$, в которой $u_x \le M$. Предположим противное, т.е. что $u_x > M$ всюду на $\overline{\Omega}$, и рассмотрим некоторую прямую $t = \mathrm{const}$, $x = \xi$, $\xi \in [a,b]$. Оценим разность

$$u|_{\xi=a}^{\xi=b} > M(b-a) > \frac{4l}{b-a}(b-a) = 4l.$$

Последнее противоречит тому, что $u \in [0,l]$, а значит, искомая точка P_1 действительно существует.

Предположим теперь, что $u_x(P_1) = M$ (иначе лемма доказана). Далее, очевидно, что либо $x_1 - a \ge (a-b)/2$, либо $b - x_1 \ge (a-b)/2$.

Пусть $b - x_1 \ge (a-b)/2$ (первый вариант рассматривается аналогично).

Рассмотрим кривую $t = t(x)$, определяемую из соотношений

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad (x,t) \in \overline{K}_{P_1}^{R_0}, \quad t(x_1) = t_1, \tag{2}$$

где $K_{P_1}^{R_0}$ – максимальный из открытых кругов (имеющий радиус R_0) с центром в точке P_1, принадлежащих области Ω, в которых всюду $u_x \ge M/2$. Его существование является прямым следствием непрерывности u_x.

В силу непрерывности и ограниченности правой части уравнения (2) в $\overline{K}_{P_1}^{R_0}$ существует решение $t = t(x)$ задачи (2), достигающее границы круга $K_{P_1}^{R_0}$ в некоторой точке $(x,t) = N_1(a_1,b_1)$ такой, что $a_1 > x_1$. Очевидно, что $u_x(N_1) \ge M/2$.

Если $u_x(N_1) > M/2$, то рассмотрим задачу

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad (x,t) \in \overline{K}_{N_1}^{R_1}, \quad t(a_1) = b_1,$$

где $K_{N_1}^{R_1}$ – максимальный из открытых кругов с центром в N_1, принадлежащих области Ω, в которых $u_x \ge M/2$.

Вновь в силу непрерывности и ограниченности u_t/u_x получаем утверждение о существовании точки $N_2 = (a_2,b_2)$, $a_2 > a_1$, – пересечения решения $t = t(x)$ с границей круга $K_{N_1}^{R_1}$.

Повторяя (при необходимости бесконечно много раз) указанную процедуру, получаем точку $N_3(a_3,b_3)$, затем $N_4(a_4,b_4)$ и т.д. Проанализируем три возможных случая:

1) очередная точка N_i (которую обозначим через $(x,t) = P_2(x_2,t_2)$) достигнет границы области Ω и, таким образом, указанный процесс оборвется;

2) в очередной точке N_i (вновь обозначаемой через $(x,t) = P_2(x_2,t_2)$) значение u_x станет равным $M/2$, так что указанный процесс также оборвется;

3) ни одна из точек N_i не достигнет границы области Ω и ни в одной из них значение u_x не станет равным $M/2$, так что мы получим некоторую бесконечную последовательность точек $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Покажем, что случай 1) не реализуется. Предположим противное. Тогда на отрезке $[x_1,b]$ существует решение задачи

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad t(x_1) = t_1. \tag{3}$$

Оценим $u(P_2)$. Используя представление

$$u(P_2) = u(P_1) + \int\limits_{L_{12}} u_x dx + u_t dt,$$

где L_{12} – интегральная кривая задачи (3), соединяющая точки P_1 и P_2, имеем

$$u(P_2) \geq \int\limits_{L_{12}} u_x\,dx + u_t\,dt = \int\limits_{x_1}^{b} \left(u_x + \frac{u_t^2}{u_x}\right) dx \geq \int\limits_{x_1}^{b} u_x\,dx > \frac{M}{2}(b - x_1) > \frac{4l}{2(b-a)}\,\frac{a-b}{2} = l.$$

Таким образом, получаем, что $u(P_2) > l$. Но последнее невозможно, а следовательно, невозможен и случай 1).

Обратимся теперь к случаю 3) и докажем сходимость последовательности $\{N_i\}$, эквивалентной в свою очередь сходимости $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$.

Поскольку a_i – возрастающая и ограниченная последовательность, для нее высказанное утверждение очевидно. Обозначим ее предел через x_2, $x_2 \leq b$. Для доказательства сходимости b_i, объединив все полуинтервалы $[x_1, a_1)\cup[a_1, a_2)\cup[a_2, a_3)\cup\ldots$, получим полуинтервал $[x_1, x_2)$. В силу проведенных выше построений можно говорить о существовании решения следующей задачи Коши:

$$dt/dx = u_t/u_x, \quad x \in [x_1, x_2), \quad t(x_1) = t_1.$$

Так как $t = t(x)$ непрерывна и имеет ограниченную производную на $[x_1, x_2)$, то она может быть непрерывно продолжена на весь отрезок $[x_1, x_2]$. Будем обозначать $\|dt/dx\|_{C[x_1,x_2]} = \|u_t/u_x\|_{C[x_1,x_2]}$ через M_{12}. Из определения непрерывности следует, что

$$t_2 \equiv t(x_2) = \lim_{i\to\infty} t(a_i) = \lim_{i\to\infty} b_i.$$

Итак, последовательность $\{N_i\}$ действительно сходится к некоторой точке $(x, t) = P_2(x_2, t_2)$.

Так же, как это было сделано при рассмотрении случая 1), можно показать, что $x_2 \neq b$, а следовательно, существует некоторое $\Delta_0 > 0$, такое, что $x_2 = b - \Delta_0$.

Покажем теперь, что $u_x(P_2) = M/2$. Предположим противное, т.е. $u_x(P_2) = M' > M/2$. Рассмотрим произвольное число M'', $M/2 < M'' < M'$. В силу равномерной непрерывности u_x в $\overline{\Omega}$ существует δ_0 такое, что $|u_x(M_1) - u_x(M_2)| < M'' - M/2$ при $\rho(M_1, M_2) < \delta_0$.

Далее, используя условие непрерывности u_x и то обстоятельство, что $\lim\limits_{i\to\infty} N_i = P_2$, устанавливаем существование номера i такого, что $\rho(P_2, N_i) < \delta^*/\sqrt{1 + M_{12}^2}$, $u_x(N_i) > M''$, где $\delta^* = \min(\delta_0, \Delta_0)$. Тогда при $\rho(N', N_i) < \delta_0$, $N' \in \Omega$ имеем

$$u_x(N') = u_x(N_i) + u_x(N') - u_x(N_i) > M'' + M/2 - M'' = M/2,$$

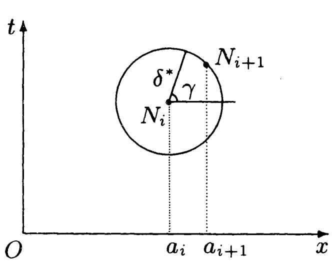

Рисунок. $\operatorname{tg}\gamma = M_{12}$.

т.е. радиус R_i круга $K_{N_i}^{R_i}$ больше или равен δ^*.

Следовательно, из простых геометрических соображений получаем (см. рисунок), что

$$a_{i+1} - a_i \geq \delta^* \cos\gamma = \delta^*[1/(1 + \operatorname{tg}^2\gamma)]^{1/2} = \delta^*/[1 + M_{12}^2]^{1/2}.$$

Но в то же время $x_2 - a_i < \delta^*/[1 + M_{12}^2]^{1/2}$, а значит, x_2 не может являться пределом последовательности $\{a_i\}$. Полученное противоречие доказывает высказанное утверждение.

Итак, как выясняется, вне зависимости от того, реализуется ли случай 2) или 3), можно говорить о кривой $L_{12} = \{(x,t)|\ x \in [x_1, x_2],\ t = t(x)\}$, соединяющей точки $P_1(x_1, t_1)$ и $P_2(x_2, t_2)$ и такой, что $u_x(P_1) = M$, $u_x(P_2) = M/2$.

Так как u_x непрерывна на кривой L_{12}, то, очевидно, найдутся точки $(x,t) = P^1(\xi_1, \eta_1)$ и $(x,t) = P^2(\xi_2, \eta_2)$, принадлежащие кривой L_{12} и такие, что $\xi_2 > \xi_1$, $u_x(P^1) = M$, $u_x(P^2) = M/2$ и $M/2 < u_x < M$ всюду между точками P^1 и P^2.

Обозначим $u_1 = u(P^1)$ и $u_2 = u(P^2)$ и выразим разность $u_2 - u_1$ через криволинейный интеграл второго рода по кривой l_{12}, являющейся частью кривой L_{12}, соединяющей точки P^1 и P^2:

$$u_2 - u_1 = \int_{l_{12}} u_x\,dx + u_t\,dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(u_x + \frac{u_t^2}{u_x}\right) dx > \frac{M}{2}(\xi_2 - \xi_1) + \frac{1}{M}\int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2\,dx.$$

Оценим последнее интегральное слагаемое

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2\,dx \ge \int_{\xi_1}^{\xi_2} (-2pu_t - p^2)\,dx, \tag{4}$$

но

$$u_t = \beta_t - \alpha_t = k\beta_{xx} - f(\beta_x, \beta, x, t) + \psi_\beta - k\alpha_{xx} + f(\alpha_x, \alpha, x, t) + \psi_\alpha =$$
$$= ku_{xx} + f(\alpha_x, \alpha, x, t) - f(\beta_x, \beta, x, t) + \psi_\alpha + \psi_\beta$$

(здесь и далее в доказательстве $t = t(x)$), а поэтому из (4) следует неравенство

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2\,dx \ge -2p\int_{\xi_1}^{\xi_2} (ku_{xx} + f(\alpha_x, \alpha, x, t) - f(\beta_x, \beta, x, t) + \psi_\alpha + \psi_\beta)\,dx - p^2(\xi_2 - \xi_1). \tag{5}$$

При $x \in [\xi_1, \xi_2]$ из неравенства $|\beta_x - \alpha_x| \le M$ вытекает принадлежность

$$(\alpha_x, \alpha, x, t), (\beta_x, \beta, x, t) \in \overline{B}^M = [\alpha_x - M, \beta_x + M] \times [\alpha, \beta] \times \overline{\Omega},$$

а значит, $S = (\alpha_x + \theta(\beta_x - \alpha_x), \alpha + \theta(\beta - \alpha), x, t)$, $0 \le \theta \le 1$, также принадлежит $\overline{B}^M$, откуда приходим к выводу, что при всех указанных x

$$|f(\beta_x, \beta, x, t) - f(\alpha_x, \alpha, x, t)| = |f_z(S)(\beta_x - \alpha_x) + f_y(S)(\beta - \alpha)| < f_1 M + f_2 l.$$

Возвращаясь к неравенству (5), имеем

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} u_t^2\,dx > 2pku_x|_{\xi_2}^{\xi_1} - 2p(f_1 M + f_2 l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta)(\xi_2 - \xi_1) - p^2(\xi_2 - \xi_1) =$$
$$= pkM - (2p(f_1 M + f_2 l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta) + p^2)\Delta\xi = lM - 2pf_1 M\Delta\xi - \Delta\Delta\xi,$$

где $\Delta = 2p(f_2 l + \Delta_\alpha + \Delta_\beta) + p^2$.

Итак, для разности $u_2 - u_1$ окончательно получаем

$$u_2 - u_1 > \frac{M}{2}\Delta\xi + l - 2pf_1\Delta\xi - \Delta\frac{\Delta\xi}{M} = l + \frac{M^2 - 4pf_1 M - 2\Delta}{2M}\Delta\xi. \tag{6}$$

Используя условие теоремы 2 $M > 2pf_1 + \sqrt{4(pf_1)^2 + 2\Delta}$, легко убедиться в положительности второго слагаемого из (6). Но тогда $u_2 = u_1 + u_2 - u_1 > 0 + l = l$, что противоречит условию $u \le l$. Данное противоречие опровергает предположение о том, что $u_x(P_1) = M$, и завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что аналогично доказательству леммы 1 для любого решения y задачи (1), заключенного между α и β, можно установить следующие априорные (т.е. справедливые при условии существования оцениваемой величины) оценки y_x : $\alpha_x - M < y_x < \beta_x + M$. Для этого в доказательстве леммы следует заменить $\beta \to y$, ψ_β и $\Delta_\beta \to 0$ (при обосновании нижнего неравенства) или $\alpha \to y$, ψ_α и $\Delta_\alpha \to 0$ (при обосновании верхнего) и принять во внимание, что в силу доказанного выше неравенства $|\beta_x - \alpha_x| < M$ всюду на пути интегрирования от ξ_1 до ξ_2 $(y_x, y, x, t) \in \overline{B}^M$.

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим задачу

$$\widetilde{y}_t - k\widetilde{y}_{xx} + h(\widetilde{y}_x, \widetilde{y}, x, t) = 0, \quad \widetilde{y}(x, t+T) = \widetilde{y}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega,$$
$$\widetilde{y}(a,t) = y^0(t), \quad \widetilde{y}(b,t) = y^1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1*}$$

где

$$h(z,y,x,t) = \begin{cases} \dfrac{f(z,y,x,t)}{1+(z-\beta_x-M)^2 f(z,y,x,t)^2} & \text{при} \quad z \geq \beta_x + M, \\ f(z,y,x,t) & \text{при} \quad \alpha_x - M \leq z \leq \beta_x + M, \\ \dfrac{f(z,y,x,t)}{1+(z-\alpha_x+M)^2 f(z,y,x,t)^2} & \text{при} \quad z \leq \alpha_x - M. \end{cases}$$

Поскольку функция $h(z,y,x,t)$ непрерывно дифференцируема и ограничена в $\overline{B}^*$, то к задаче (1*) применима теорема 1, согласно которой задача (1*) имеет решение $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x,t)$, принадлежащее $[\alpha, \beta]$ (ибо α и β суть барьеры и для задачи (1*)). Но тогда в силу априорных оценок производной решения (справедливых и для $\widetilde{y}_x$, так как $f = h$ всюду на $\overline{B}^M$), т.е. в силу того, что $\alpha_x - M \leq \widetilde{y}_x \leq \beta_x + M$, заключаем, что всюду на решении $\widetilde{y}(x,t)$ функция h совпадает с f, а значит, что $\widetilde{y}$ является также и решением задачи (1).

2. НЕКОТОРЫЙ КЛАСС, ДОПУСКАЮЩИЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЫ

В качестве примера рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа с условием периодичности по t

$$\varepsilon^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x} A\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t\right) + B\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t\right), \quad (x,t) \in \Omega \equiv (0,1) \times \mathbb{R},$$
$$y(0,t,\varepsilon) = y^0(t), \quad y(1,t,\varepsilon) = y^1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

где A, B, y^0 и y^1 – T-периодические по t функции (при этом никаких специальных ограничений на характер роста A и B по y_x не накладывается).

Эта задача является обобщением рассмотренной ранее в [3] следующей постановки:

$$\varepsilon^4 \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon \frac{dy}{dx} A\left(\varepsilon^3 \frac{dy}{dx}, y, x\right) + B\left(\varepsilon^3 \frac{dy}{dx}, y, x\right), \quad x \in (0,1), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad y(1,\varepsilon) = y^1, \tag{8}$$

представляющей собой задачу (7) в случае, когда все входящие в уравнение величины, включая само решение, не зависят от t.

При анализе задачи (8) применялся метод пограничных функций (см. [4]), с помощью которого была построена асимптотика решения, обладающего двумя пограничными слоями (в окрестностях левой и правой граничных точек). Доказательство существования проводилось методом дифференциальных неравенств с использованием теоремы, доказанной в [5].

Поскольку построение асимптотики и получаемых на ее основе барьерных решений для задачи (7) ничем принципиально не отличается, ограничимся лишь краткой формулировкой основных результатов.

2.1. Построение асимптотики. Потребуем существования решения $y = \varphi(x,t)$ уравнения $B(0,y,x,t) = 0$ и выполнения условия $B_y(0,\varphi(x,t),x,t) > 0$, $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Кроме того, считаем, что $A(0,\varphi(x,t),x,t) < 0$ при $(x,t) \in \{0\} \cup \{1\} \times \mathbb{R}$.

Будем строить T-периодическое по t решение, обладающее двумя погранслоями (в окрестностях левой и правой граничных прямых области Ω) :

$$y(x,t,\varepsilon) = \overline{y}(x,t,\varepsilon) + \Pi(\tau,t,\varepsilon) + Q(\rho,t,\varepsilon), \quad \tau = x/\varepsilon^3, \quad \rho = (x-1)/\varepsilon.$$

Представим составляющие решения в виде рядов по ε

$$\overline{y}(x,t,\varepsilon)=\overline{y}_0(x,t)+\varepsilon\overline{y}_1(x,t)+\ldots,\quad \Pi(\tau,t,\varepsilon)=\Pi_0(\tau,t)+\varepsilon\Pi_1(\tau,t)+\ldots,$$

$$Q(\rho,t,\varepsilon)=Q_0(\rho,t)+\varepsilon Q_1(\rho,t)+\ldots$$

Построение начнем с регулярной части. В нулевом приближении имеем $B(0,\overline{y}_0,x,t)=0$, откуда $\overline{y}_0=\varphi(x,t)$. В n-м приближении $(n\geq 1)$ $\overline{y}_nB_y(0,\varphi(x,t),x,t)+\overline{G}_n(x,t)=0$, где $\overline{G}_n$ – известная функция аргументов $\overline{y}_0,\ \ldots,\ \overline{y}_{n-1}$ и их производных. Таким образом, $\overline{y}_n=-\overline{G}_n/B_y$.

Перейдем к левому погранслою. Нулевое приближение дает

$$\frac{\partial^2\Pi_0}{\partial\tau^2}=\frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}A\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau},\overline{y}_0(0,t)+\Pi_0,0,t\right),\quad (\tau,t)\in\Pi^+\equiv[0,+\infty)\times\mathbb{R},$$

$$\Pi_0(0,t)=y^0(t)-\overline{y}_0(0,t),\quad t\in\mathbb{R},\quad \Pi_0(+\infty,t)=0,\quad \frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}(+\infty,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Считая, что производная $\dfrac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}\neq 0$ на Π^+ (предполагается, что $y^0(t)-\overline{y}_0(0,t)\neq 0$), можем представить ее в виде

$$\frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}=P^{(-)}(\Pi_0,t), \tag{10}$$

где $P^{(-)}$ определяется из начальной задачи

$$\partial P^{(-)}/\partial\Pi_0=A(P^{(-)},\overline{y}_0(0,t)+\Pi_0,0,t),\quad P^{(-)}(0,t)=0.$$

Предполагая ее разрешимость на $(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$, приходим к (10).

Поскольку $\Pi_0=0$ – устойчивая точка покоя уравнения (10), ибо $P^{(-)}(0,t)=0$ и

$$\frac{\partial P^{(-)}}{\partial\Pi_0(0,t)}=\overline{A}^{(-)}<0,$$

то, потребовав принадлежности $y^0(t)-\overline{y}_0(0,t)$ ее области влияния $(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\cap(\gamma_{\text{н}}(t),\gamma_{\text{в}}(t))$, где $\gamma_{\text{н}}(t)$ и $\gamma_{\text{в}}(t)$ – ближайшие к нулю соответственно снизу и сверху корни уравнения $P^{(-)}(\gamma,t)=0$, получим утверждение о разрешимости задачи (9).

Для описания старших приближений левого погранслоя будем использовать обозначения

$$\overline{A}^{(-)}(t)=A(0,\overline{y}_0(0,t),0,t),$$

$$\widetilde{A}^{(-)}(\tau,t)=A\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial\tau}(\tau,t),\overline{y}_0(0,t)+\Pi_0(\tau,t),0,t\right),$$

$$\widetilde{P}^{(-)}(\tau,t)=P^{(-)}(\Pi_0(\tau,t),t),\quad \widetilde{P}_0^{(-)}(\tau,t)=P^{(-)}(\tau,t)/P^{(-)}(0,t),$$

тогда n-е приближение $(n\geq 1)$ дает

$$\frac{\partial^2\Pi_n}{\partial\tau^2}=(\widetilde{P}^{(-)}\widetilde{A}_z^{(-)}+\widetilde{A}^{(-)})\frac{\partial\Pi_n}{\partial\tau}+\widetilde{P}^{(-)}\widetilde{A}_y^{(-)}\Pi_n+\widetilde{G}_n^{(-)},\quad (\tau,t)\in\Pi^+,$$

$$\Pi_n(0,t)=-\overline{y}_n(0,t),\quad \Pi_n(+\infty,t)=0,\quad t\in\mathbb{R},$$

где индекс z означает производную по первому аргументу, а $\widetilde{G}_n^{(-)}(\tau,t)$ – известная при условии, что найдены $\overline{y}_0,\ldots,\overline{y}_n$, а также $\Pi_0,\ldots,\Pi_{n-1}$, функция. Решая эту систему, находим

$$\Pi_n(\tau,t)=-\overline{y}_n(0,t)\widetilde{P}_0^{(-)}(\tau,t)-\int\limits_0^\tau\frac{\widetilde{P}^{(-)}(\tau,t)}{\widetilde{P}^{(-)}(s,t)}\int\limits_s^{+\infty}\exp\left\{\int\limits_\zeta^s\widetilde{P}^{(-)}(\xi,t)\widetilde{A}_z^{(-)}(\xi,t)d\xi\right\}\widetilde{G}_n^{(-)}(\zeta,t)\,d\zeta\,ds.$$

Приступим к правому погранслою. В нулевом приближении имеем

$$\frac{\partial Q_0}{\partial \rho} = P^{(+)}(Q_0, t), \quad (\rho, t) \in \Pi^- \equiv (-\infty, 0] \times \mathbb{R}, \quad Q_0(0,t) = y^1(t) - \overline{y}_0(1,t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где $P^{(+)} = -B(0, \overline{y}_0(1,t) + Q_0, 1, t)/A(0, \overline{y}_0(1,t) + Q_0, 1, t)$.

Так же, как и в случае левой погранчасти, показывается, что $Q_0 = 0$ – устойчивая точка покоя уравнения (11). В качестве границ области влияния $\gamma_{\text{н}}$ и $\gamma_{\text{в}}$ для $y^1(t) - \overline{y}_0(1,t)$ выбираются ближайшие к нулю соответственно снизу и сверху корни уравнения

$$A(0, \overline{y}_0(1,t) + \gamma, 1, t)B(0, \overline{y}_0(1,t) + \gamma, 1, t) = 0.$$

Используя для описания старших приближений правого погранслоя обозначения $\overline{E}^{(+)}(t) = E(0, \overline{y}_0(1,t), 1, t)$, $\widetilde{E}^{(+)}(\rho, t) = E(0, \overline{y}_0(1,t) + Q_0(\rho, t), 1, t)$, $\widetilde{P}^{(+)}(\rho, t) = P^{(+)}(Q_0(\rho, t), t)$, $\widetilde{P}_0^{(+)}(\rho, t) = P^{(+)}(\rho, t)/P^{(+)}(0, t)$, где в качестве функции E могут выступать A и B, а также их частные производные, n-е приближение $(n \geq 1)$ запишем в виде

$$\widetilde{A}^{(+)} \frac{\partial Q_n}{\partial \rho} + (\widetilde{B}_y^{(+)} + \widetilde{P}^{(+)} \widetilde{A}_y^{(+)}) Q_n + \widetilde{G}_n^{(+)} = 0, \quad (\rho, t) \in \Pi^-, \quad Q_n(0,t) = -\overline{y}_n(1,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$\widetilde{G}_n^{(+)}(\rho, t)$ – известная при условии, что найдены $\overline{y}_0, \ldots, \overline{y}_n$, а также $Q_0, \ldots, Q_{n-1}$, функция. Решая эту систему, находим

$$Q_n(\rho, t) = -\overline{y}_n(1,t) \widetilde{P}_0^{(+)}(\rho, t) - \int\limits_0^\rho \frac{\widetilde{P}^{(+)}(\rho, t)}{\widetilde{P}^{(+)}(s, t)} \frac{\widetilde{G}_n^{(+)}(s, t)}{\widetilde{A}^{(+)}(s, t)} \, ds.$$

Можно показать справедливость следующих мажорант:

$$\left| \frac{\partial^{k+l} \Pi_n}{\partial \tau^k \partial t^l} \right| < C_n^{k+l} (1 + \tau^{n+l}) \exp(\overline{A}^{(-)}(t) \tau), \qquad \left| \frac{\partial^{k+l} Q_n}{\partial \rho^k \partial t^l} \right| < C_n^{k+l} (1 + |\rho|^{2n+l}) \exp\left(-\frac{\overline{B}_y^{(+)}(t)}{\overline{A}^{(+)}(t)} \rho \right).$$

2.2. Построение барьерных решений. Ниже при установлении разного рода неравенств C и c обозначают произвольные достаточно большие и достаточно малые постоянные соответственно.

Поставим в соответствие уравнению (7) дифференциальный оператор

$$Ly = L[y(x, t, \varepsilon)] = \varepsilon \frac{\partial y}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x} A\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t \right) + B\left(\varepsilon^3 \frac{\partial y}{\partial x}, y, x, t \right).$$

Нижнее решение уравнения (7) выберем следующим образом: $\alpha(x, t, \varepsilon) = \overline{\alpha} + \Pi\alpha + Q\alpha$, где

$$\begin{gathered} \overline{\alpha}(x, t, \varepsilon) = \overline{y}_0(x, t) + \ldots + \varepsilon^n \overline{y}_n(x, t) + \varepsilon^{n+1}(\overline{y}_{n+1}(x, t) - \Upsilon), \\ \Pi\alpha(\tau, t, \varepsilon) = \Pi_0(\tau, t) + \ldots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau, t) + \varepsilon^{n+1} \Pi_{(n+1)\alpha}(\tau, t), \\ Q\alpha(\rho, t, \varepsilon) = Q_0(\rho, t) + \ldots + \varepsilon^n Q_n(\rho, t) + \varepsilon^{n+1} Q_{(n+1)\alpha}(\rho, t); \end{gathered} \tag{12}$$

здесь $\Upsilon > 0$ – некоторая постоянная, а $\Pi_{(n+1)\alpha}$, $Q_{(n+1)\alpha}$ определяются из задач

$$\frac{\partial^2 \Pi_{(n+1)\alpha}}{\partial \tau^2} = (\widetilde{P}^{(-)} \widetilde{A}_z^{(-)} + \widetilde{A}^{(-)}) \frac{\partial \Pi_{(n+1)\alpha}}{\partial \tau} + \widetilde{P}^{(-)} \widetilde{A}_y^{(-)} \Pi_{(n+1)\alpha} + \widetilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)} + \psi_l,$$

$$\Pi_{(n+1)\alpha}(0, t) = -\overline{y}_{n+1}(0, t), \quad \Pi_{(n+1)\alpha}(+\infty, t) = 0,$$

$$\widetilde{A}^{(+)}\frac{\partial Q_{(n+1)\alpha}}{\partial\rho}+(\widetilde{B}_y^{(+)}+\widetilde{P}^{(+)}\widetilde{A}_y^{(+)})Q_{(n+1)\alpha}+\widetilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(+)}+\psi_r=0,\quad Q_{(n+1)\alpha}(0,t)=-\overline{y}_{n+1}(1,t),$$

где

$$\psi_l(\tau,t)=C_\psi\exp(\overline{A}^{(-)}(t)\tau),\quad \psi_r(\tau,t)=C_\psi\exp(-\overline{B}_y^{(+)}(t)\rho/\overline{A}^{(+)}(t)),$$

$$\widetilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)}(\tau,t)=\widetilde{G}_{n+1}^{(-)}-\widetilde{P}^{(-)}\widetilde{A}_y^{(-)}\Upsilon,\quad \widetilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(+)}(\rho,t)=\widetilde{G}_{n+1}^{(+)}-(\widetilde{B}_y^{(+)}+\widetilde{P}^{(+)}\widetilde{A}_y^{(+)})\Upsilon.$$

Считая A и B достаточно гладкими функциями, покажем корректность определения (12). Поскольку выполнение п. 1 определения 1 не вызывает сомнений, остановимся на доказательстве второго пункта ($L\alpha<0$).

С точностью до экспоненциально бесконечно малых $L\alpha(x,t,\varepsilon)=\overline{L\alpha}+\Pi L\alpha+QL\alpha$, где

$$\overline{L\alpha}(x,t,\varepsilon)\equiv L\overline{\alpha}(x,t,\varepsilon),\quad \Pi L\alpha(\tau,t,\varepsilon)\equiv L(\overline{\alpha}(\tau\varepsilon^3,t,\varepsilon)+\Pi\alpha(\tau,t,\varepsilon))-L\overline{\alpha}(\tau\varepsilon^3,t,\varepsilon),$$

$$QL\alpha(\rho,t,\varepsilon)\equiv L(\overline{\alpha}(1+\rho\varepsilon,t,\varepsilon)+Q\alpha(\rho,t,\varepsilon))-L\overline{\alpha}(1+\rho\varepsilon,t,\varepsilon),$$

несложно убедиться в том, что $\overline{L\alpha}=-\varepsilon^{n+1}\Upsilon\overline{B}_y+O(\varepsilon^{n+2})<0$. Далее $\Pi L\alpha$ представим в виде

$$\Pi L\alpha(\tau,t,\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\Pi_{-2}L\alpha(\tau,t)+\ldots+\varepsilon^{n-1}\Pi_{n-1}L\alpha(\tau,t)+\varepsilon^nR(\tau,t,\varepsilon)=$$

$$=-\varepsilon^{n-1}\psi_l(\tau,t)+\varepsilon^nR(\tau,t,\varepsilon). \tag{13}$$

Для $R(\tau,t,\varepsilon)$ может быть получена оценка $|R|<C(1+\tau^{(4n+6)/3})\exp(\overline{A}^{(-)}(t)\tau)$.

Используя последнее неравенство, из (13) получаем, что $\Pi L\alpha<0$ при $\tau<c\varepsilon^{-3/(4n+6)}$. При бóльших τ величина $\Pi L\alpha$ заведомо меньше любой степени ε. Значит, на отрезке $[0,1/2]$ (там, где $Q\alpha$ пренебрежимо мало) $L\alpha<0$. Таким же образом можно показать отрицательность $L\alpha$ на отрезке $[1/2,1]$.

Верхнее решение $\beta=\beta(x,t,\varepsilon)$ вводится и анализируется аналогично (изменяется лишь знак Υ и невязок).

Докажем упорядоченность нижнего и верхнего решений. Имеем

$$\beta(x,t,\varepsilon)-\alpha(x,t,\varepsilon)=2\Upsilon\varepsilon^{n+1}+(\Pi_{(n+1)\beta}-\Pi_{(n+1)\alpha})\varepsilon^{n+1}+(Q_{(n+1)\beta}-Q_{(n+1)\alpha})\varepsilon^{n+1},$$

где $2\Upsilon>0$, поэтому для положительности всего выражения достаточно неотрицательности каждой из фигурирующих в нем скобок. Поскольку

$$\Pi_{(n+1)\beta}-\Pi_{(n+1)\alpha}=$$

$$=\int_0^\tau\frac{\widetilde{P}^{(-)}(\tau,t)}{\widetilde{P}^{(-)}(s,t)}\int_s^{+\infty}\exp\left\{\int_\zeta^s\widetilde{P}^{(-)}(\xi,t)\widetilde{A}_z^{(-)}(\xi,t)d\xi\right\}(2\psi_l(\zeta,t)+\widetilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)}(\zeta,t)-\widetilde{G}_{(n+1)\beta}^{(-)}(\zeta,t))\,d\zeta\,ds, \tag{14}$$

из неравенства

$$|\widetilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(-)}(\tau,t)-\widetilde{G}_{(n+1)\beta}^{(-)}(\tau,t)|=2\Upsilon|\widetilde{P}^{(-)}\widetilde{A}_y^{(-)}|<Ce^{\overline{A}^{(-)}t}$$

следует, что, выбирая C_ψ (из определения ψ_l, ψ_r) достаточно большой, легко обеспечить положительность выражения (14). Далее,

$$Q_{(n+1)\beta}-Q_{(n+1)\alpha}=\int_0^\rho\frac{\widetilde{P}^{(+)}(\rho,t)}{\widetilde{P}^{(+)}(s,t)}\frac{1}{\widetilde{A}^{(+)}(s,t)}(2\psi_r(s,t)+\widetilde{G}_{(n+1)\alpha}^{(+)}(s,t)-\widetilde{G}_{(n+1)\beta}^{(+)}(s,t))\,ds. \tag{15}$$

Так как

$$|\widetilde{G}^{(+)}_{(n+1)\alpha}(\rho,t)-\widetilde{G}^{(+)}_{(n+1)\beta}(\rho,t)|=2\Upsilon|\widetilde{B}^{(+)}_{y}+\widetilde{P}^{(+)}\widetilde{A}^{(+)}_{y}|<C\exp\biggl(-\frac{\overline{B}^{(+)}_{y}}{\overline{A}^{(+)}}\rho\biggr),$$

то, выбирая C_ψ достаточно большой и учитывая, что $\widetilde{A}^{(+)},\rho<0,$ убеждаемся в положительности выражения (15).

2.3. Доказательство существования решения и его асимптотического представления. Покажем применимость к задаче (7) теоремы 2. Для этого достаточно убедиться в принадлежности правой части уравнения (7)

$$f(z,y,x,t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\{\varepsilon zA(\varepsilon^3z,y,x,t)+B(\varepsilon^3z,y,x,t)\}$$

классу $A1(B^M)$ при некотором значении $M.$

Выберем $M=M(\varepsilon)=\widetilde{M}\varepsilon^{n-2}.$ Тогда, учитывая, что $\|\alpha_x\|_{C(\overline{\Omega})},\|\beta_x\|_{C(\overline{\Omega})}<M_{\text{кр}}(\varepsilon)=$ $=\widetilde{M}_{\text{кр}}/\varepsilon^3,$ получаем

$$\|f_z\|_{C(\overline{B}^M)}=\varepsilon^{-1}\|\varepsilon A+\varepsilon^4zA_z+\varepsilon^3B_z\|_{C(\overline{B}^M)}<f_1(\widetilde{M},\varepsilon)=\widetilde{f}_1(\varepsilon^{n+1}\widetilde{M}),$$

$$\|f_y\|_{C(\overline{B}^M)}=\varepsilon^{-1}\|\varepsilon zA_y+B_y\|_{C(\overline{B}^M)}<f_2(\widetilde{M},\varepsilon)=\widetilde{f}_2(\varepsilon^{n+1}\widetilde{M})/\varepsilon^3,$$

где $\widetilde{f}_1$ и $\widetilde{f}_2$ – непрерывные неубывающие функции своих аргументов.

Кроме того, будем принимать во внимание также то обстоятельство, что

$$\|\beta-\alpha\|_{C(\overline{\Omega})}<l=l(\varepsilon)=\widetilde{l}\varepsilon^{n+1},\quad \|\psi_\alpha\|_{C(\overline{\Omega})}<\Delta_\alpha=\Delta_\alpha(\varepsilon)=\widetilde{\Delta}_\alpha\varepsilon^{n-2},$$

$$\|\psi_\beta\|_{C(\overline{\Omega})}<\Delta_\beta=\Delta_\beta(\varepsilon)=\widetilde{\Delta}_\beta\varepsilon^{n-2},\quad p=p(\varepsilon)=l/k=\widetilde{l}\varepsilon^{n+1}/\varepsilon^3=\widetilde{l}\varepsilon^{n-2},$$

где ψ_α и ψ_β – невязки из определения 1 нижнего и верхнего решений.

Теперь непосредственной проверкой убеждаемся в том, что, выбирая ε достаточно малым $(0<\varepsilon\le\varepsilon_0),$ а $\widetilde{M}$ достаточно большим:

$$\widetilde{M}>2\widetilde{l}\widetilde{f}_1(\varepsilon_0^{n+1}\widetilde{M})+(4(\widetilde{l}\widetilde{f}_1(\varepsilon_0^{n+1}\widetilde{M}))^2+4\widetilde{l}(\widetilde{f}_2(\varepsilon_0^{n+1}\widetilde{M})\widetilde{l}+\widetilde{\Delta}_\alpha+\widetilde{\Delta}_\beta)+2\widetilde{l}^2)^{1/2},$$

легко добиться выполнимости пп. 1) и 2) определения 3 класса $A1:$

1) $M(\varepsilon)=\widetilde{M}\varepsilon^{n-2}>4l(\varepsilon)=4\widetilde{l}\varepsilon^{n+1},$

2) $M(\varepsilon)=\widetilde{M}\varepsilon^{n-2}>2pf_1+(4(pf_1)^2+4p(f_2l+\Delta_\alpha+\Delta_\beta)+2p^2)^{1/2}.$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполнен ряд требований:*

1) вырожденное уравнение $B(0,y,x,t)=0$ *имеет корень* $y=\varphi(x,t),$ *удовлетворяющий условиям* $B_y(0,\varphi(x,t),x,t)>0,\ \ (x,t)\in\overline{\Omega},\ \ A(0,\varphi(x,t),x,t)<0,\ \ (x,t)\in\{0\}\cup\{1\}\times\mathbb{R};$

2) граничные функции $y^0=y^0(t)$ *и* $y^1=y^1(t)$ *принадлежат соответствующим областям влияния корня вырожденного уравнения;*

3) $A,$ $B,$ y^0 *и* y^1 *суть достаточно гладкие функции своих аргументов:*

$$A(z,y,x,t)\in C^{n+3}(\Omega_l)\cap C^{n+2}(\Omega_c)\cap C^{n+3}(\Omega_r),$$

$$B(z,y,x,t)\in C^{n+1}(\Omega_l)\cap C^{n+3}(\Omega_c)\cap C^{n+3}(\Omega_r),\quad y^0(t),y^1(t)\in C^2(\mathbb{R}),$$

где $\Omega_l\equiv\mathbb{R}\times[\overline{y}_0^{(-)}(t)-k_l,y^0(t)+k_l]\times[0,\varepsilon^2k]\times\mathbb{R},$ $\Omega_c\equiv\mathbb{R}\times[\overline{y}_0^{(+)}(t)-k_r,y^1(t)+k_r]\times[1-k,1]\times\mathbb{R},$ $\Omega_r\equiv\mathbb{R}\times[\overline{y}_0(x,t)-k,\overline{y}_0(x,t)+k]\times\overline{\Omega},$ k *– произвольная положительная постоянная,* $k_l=\operatorname{sign}(y^0(t)-\overline{y}_0^{(-)}(t))k,$ $k_r=\operatorname{sign}(y^1(t)-\overline{y}_0^{(+)}(t))k.$

Тогда при достаточно малых ε *существует решение* $y = y(x,t,\varepsilon)$ *задачи (7), для которого справедливо представление*

$$y(x,t,\varepsilon) = \overline{y}_0(x,t) + \Pi_0(\tau,t) + Q_0(\rho,t) + \ldots + \varepsilon^n(\overline{y}_n(x,t) + \Pi_n(\tau,t) + Q_n(\rho,t)) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 01-01-00753).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефёдов Н.Н.* // Фунд. и прикл. математика. 1998. Т. 4. № 3. С. 799–851.
2. *Amann H.* // Nonlinear Analysis: A Collection of Papers in Honor of Erich Rothe. New York, 1978. P. 1–29.
3. *Васильева А.Б., Букжалёв Е.Е.* // Мат. методы и приложения: Тр. Девятых мат. чтений МГСУ. М., 2002. С. 33–36.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
5. *Букжалёв Е.Е.* // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 723–730.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
11.09.2003 г.