В. А. Демьяненко, О гипотезе Л. Эйлера,
Изв. вузов. Матем., 1968, номер 3, 37–42

https://www.mathnet.ru/ivm3286

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1968 МАТЕМАТИКА № 3 (70)

УДК 511.5

В. А. Демьяненко

О ГИПОТЕЗЕ Л. ЭЙЛЕРА

Леонард Эйлер [1] высказал гипотезу, что для всякого натурального числа $n \geqslant 3$ уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n = x_{n+1}^n$$

имеет решения в рациональных числах, отличных от 0, а уравнение

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^n = x_n^n$$

таких решений не имеет. Случай $n=3$ был рассмотрен самим Эйлером [1]. На пути же доказательства этой гипотезы при $n=4$ были получены следующие результаты:

1) Уорд [2] доказал неразрешимость уравнения

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4 \tag{1}$$

в натуральных числах x, y, z, t при $t \leqslant 10^8$;

2) Норри и Лич [1], [3] указали несколько рациональных решений уравнения

$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = r^4. \tag{2}$$

Насколько нам известно, других сведений, касающихся этих уравнений, не имеется.

Цель работы — вывод рекуррентных формул для уравнения (1) и решение над полем $R(u, v)$ уравнения $x^4 + (u^4 + v^4) y^4 = z^4$.

Теорема 1. *Если уравнение*

$$x^4 = (y+z)^4 + (y-z)^4 + t^4 \tag{3}$$

имеет решение $\{x_k, y_k, z_k, t_k\}$, *то оно имеет решение* $\{x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}, t_{k+1}\}$, *где:*

$$\left.\begin{aligned}
x_{k+1} = \frac{x_k}{y_k}\, y_{k+1} + 4cz_k^2 t_k^2 [4(c-a) z_k^4 - (c+2a) t_k^4] \times \\
\times [(bx_k - 2ay_k) z_k^2 - (ax_k + by_k) t_k^2], \\
y_{k+1} = y_k \{4bc(c+2a) z_k^4 t_k^6 + 16ac(c-a) z_k^6 t_k^4 - \\
- 4z_k^2 t_k^2 (ax_k + by_k)(bx_k + 2ay_k)[4(c-a) z_k^4 + (c+2a) t_k^4] + \\
+ (c+a) y_k^2 [16(c-a)^2 z_k^8 + 24(c-a)(c+2a) z_k^4 t_k^4 + \\
+ (c+2a)^2 t_k^8]\},
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
z_{k+1} &= z_k\{4ac(c+2a)z_k^2t_k^8 + 4bc(c+2a)z_k^4t_k^6 - \\
&\quad - 8z_k^2t_k^6(c+2a)(ax_k+by_k)(bx_k-2ay_k) + \\
&\quad + (c+a)y_k^2[-16(c-a)^2z_k^8 + 24(c-a)(c+2a)z_k^4t_k^4 + \\
&\quad + 3(c+2a)^2t_k^8]\}, \\
t_{k+1} &= t_k\{16ac(c-a)z_k^6t_k^4 + 16bc(c-a)z_k^8t_k^2 - \\
&\quad - 32(c-a)z_k^6t_k^2(ax_k+by_k)(bx_k-2ay_k) + \\
&\quad + (c+a)y_k^2[48(c-a)^2z_k^8 + 24(c-a)(c+a)z_k^4t_k^4 - \\
&\quad - (c+2a)^2t_k^8]\}, \\
a &= 4x_k^3y_k + 6x_k^2y_k^2 + 2x_k^2z_k^2 - 4x_ky_kt_k^2 - 16x_ky_k^3 - 6y_k^2t_k^2 - \\
&\quad - 24y_k^4 - 2z_k^2t_k^2 - 8y_k^2z_k^2, \\
b &= -x_k^4 + 2x_k^2t_k^2 + 16x_k^2y_k^2 + 24x_ky_k^3 + 8x_ky_kz_k^2 + \\
&\quad + 2y_k^4 + 12y_k^2z_k^2 + 2z_k^4 - 8y_k^2t_k^2 - t_k^4, \\
c &= x_k^4 - 2x_k^2t_k^2 + 24x_ky_k^3 + 8x_ky_kz_k^2 + 34y_k^4 + \\
&\quad + 8y_k^2t_k^2 + t_k^4 + 12y_k^2z_k^2 + 2z_k^4.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Доказательство. Пусть

$$qt^2 = q(x^2-4y^2) + p(2xy+3y^2+z^2). \quad (5)$$

Тогда, подставляя (5) в (3) и сокращая на $2xy+3y^2+z^2$, получим: $q^2(2z^2+6y^2-4xy)+2qp(x^2-4y^2)+p^2(2xy+3y^2+z^2)=0$. Таким образом, уравнение (3) можно заменить системой

$$\begin{cases} qt^2 = q(x^2-4y^2) + p(2xy+3y^2+z^2), \\ q^2(2z^2+6y^2-4xy) + 2qp(x^2-4y^2) + p^2(2xy+3y^2+z^2) = 0, \end{cases}$$

которую, в свою очередь, можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
(p^2+2q^2)z^2 &= -2pqx^2 + 2(2q^2-p^2)xy - (3p^2-8pq+6q^2)y^2, \\
(p^2+2q^2)t^2 &= (2q^2-p^2)x^2 + 8pqxy + 4(p^2-2q^2)y^2.
\end{aligned} \quad (6)$$

Предположим теперь, что уравнение (3) имеет решение $\{x_k, y_k, z_k, t_k\}$. В этом случае система (6) также обладает решением $\{x_k, y_k, z_k, t_k\}$ при $p = t_k^2 - x_k^2 + 4y_k^2$, $q = 2x_ky_k + 3y_k^2 + z_k^2$. Ввиду громоздкости дальнейших выкладок, опишем лишь идею получения рекуррентных формул (4). Очевидно, всякое решение $\{x, y, z, t\}$ системы (6) по формулам $x = x$, $y = y$, $r = (p^2+2q^2)zt$ порождает решение уравнения

$$\begin{aligned}
r^2 = \{&(2q^2-p^2)x^2 + 8pqxy + 4(p^2-2q^2)y^2\}\{-2pqx^2 + \\
&+ 2(2q^2-p^2)xy - (3p^2-8pq+6q^2)y^2\}.
\end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, уравнение (7) обладает решением $\{(x_k, y_k, (p^2+2q^2)z_kt_k\}$. Будем искать другое решение этого уравнения. Положим

$$x = x_k + tu,\ y = y_k + t,\ r = (p^2+2q^2)z_kt_k + t^2v. \quad (8)$$

Подставив значения x, y, r в (7) и сократив на k, получим

$$f_1(u) + f_2(u, v)t + f_3(u, v)t^2 + f_4(u, v)t^3 = 0. \quad (9)$$

Заменим уравнение (9) системой

$$f_1(u) = 0,\ f_2(u, v) = 0,\ f_3(u, v) + f_4(u, v)t = 0. \quad (10)$$

Решив систему (10) относительно переменных u, v, k, определяем по формулам (8) x, y, r и непосредственной проверкой убеждаемся, что найденные значения x, y удовлетворяют также и системе (6). Проделав указанные выкладки, получим (4).

Теорема 2. *Если уравнение* (3) *имеет хотя бы одно решение в рациональных числах, отличных от* 0, *то оно имеет и бесконечное множество таких решений.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что многочлены x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}, t_{k+1} удовлетворяют следующему сравнению: $x_{k+1}^4-(y_{k+1}-z_{k+1})^4-(y_{k+1}+z_{k+1})^4-t_{k+1}^4\equiv 0 \pmod{x_k^4-(y_k-z_k)^4-(y_k+z_k)^4-t_k^4}$. Далее, нетрудно установить, что из условия $x_k(y_k^2-z_k^2)t_k\neq 0$ непосредственно вытекает $x_{k+1}(y_{k+1}^2-z_{k+1}^2)t_{k+1}\neq 0$. Рассмотрим группу S, состоящую из таких подстановок l_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, при которых выражение $x_k^4-(y_k-z_k)^4-(y_k+z_k)^4-t_k^4$ остается инвариантным, а $\dfrac{x_{k+1}}{x_k}$, $\dfrac{y_{k+1}}{y_k}$, $\dfrac{z_{k+1}}{z_k}$, $\dfrac{t_{k+1}}{t_k}$ — рациональными над полем $R(x_k, y_k, z_k, t_k)$. В этом случае можно получить новые рекуррентные формулы посредством отображений: $P=\{x_{k+1}, y_{k+1}, z_{k+1}, t_{k+1}\}=P^{(0)}=\{x_{k+1}^{(0)}, y_{k+1}^{(0)}, z_{k+1}^{(0)}, t_{k+1}^{(0)}\}\xrightarrow[l_0\to l_i]{} P^{(i)}=\{x_{k+1}^{(i)}, y_{k+1}^{(i)}, z_{k+1}^{(i)}, t_{k+1}^{(i)}\}$, где l_0, $l_i\in S$, l_0 — единица группы S. Очевидно, подстановки l_0, $l_1(y\to -y)$, $l_2(y\to z)$, $l_3(t^2\to -t^2)$ образуют подгруппу T группы S. Применим к рекуррентным формулам P группу подстановок T. В результате получим рекуррентные формулы $P^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, 8)$. Нетрудно установить, что при некотором $j\in(1, 2, \ldots, 8)$

$$\frac{V_{k+1}^{(j)}}{(x_{k+1}^{(j)}, y_{k+1}^{(j)}-z_{k+1}^{(j)}, t_{k+1}^{(j)})}\equiv 0 \left(\operatorname{mod}\frac{V_k}{x_k, y_k-z_k, t_k}\right), \quad V=y, z, t. \tag{11}$$

Следовательно, $\left|\dfrac{x_{k+1}^{(j)}}{(x_{k+1}^{(j)}, y_{k+1}^{(j)}-z_{k+1}^{(j)}, t_{k+1}^{(j)})}\right|\geqslant\left|\dfrac{x_k}{(x_k, y_k-z_k, t_k)}\right|$. Равенство $\dfrac{x_{k+1}^{(j)}}{(x_{k+1}^{(j)}, y_{k+1}^{(j)}-z_{k+1}^{(j)}, t_{k+1}^{(j)})}=\pm\dfrac{x_k}{(x_k, y_k-z_k, t_k)}$ невыполнимо.

Действительно, если $x_{k+1}^{(j)}(x_k, y_k-z_k, t_k)=\pm x_k(x_{k+1}^{(j)}, y_{k+1}^{(j)}-z_{k+1}^{(j)}, t_{k+1}^{(j)})$, то, учитывая (11), имеем

$$\left|\frac{V_{k+1}^{(j)}}{(x_{k+1}^{(j)}, y_{k+1}^{(j)}-z_{k+1}^{(j)}, t_{k+1}^{(j)})}\right|=\left|\frac{V_k}{(x_k, y_k-z_k, t_k)}\right|, \quad V=y, z, t,$$

откуда $x_{k+1}^{(j)}t_k=\pm x_k t_{k+1}^{(j)}$, $y_{k+1}^{(j)}t_k=\pm y_k t_{k+1}^{(j)}$, $z_{k+1}^{(j)}t_k=\pm z_k t_{k+1}^{(j)}$. Поэтому система $x_k^4=(y_k-z_k)^4+(y_k+z_k)^4+t_k^4$, $x_{k+1}^{(j)}t_k=\pm x_k t_{k+1}^{(j)}$, $y_{k+1}^{(j)}t_k=\pm y_k t_{k+1}^{(j)}$, $z_{k+1}^{(j)}t_k=\pm z_k t_{k+1}^{(j)}$ должна иметь хотя бы одно решение в рациональных числах x_k, y_k, z_k, t_k, отличных от 0, что, однако, невозможно. Проводя последовательно указанные рассуждения, в результате получим цепочку решений $\{x_k, y_k-z_k, y_k+z_k, t_k\}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$ уравнения (3), где $(x_k, y_k-z_k, y_k+z_k, t_k)=1$ и $|x_1|<|x_2|<|x_3|<\ldots$

Условимся в дальнейшем не различать решения $\{x, y, z\}$ и $\{\pm kx, \pm ky, \pm k^2z\}$ уравнения $ax^4+by^4=cz^2$.

Лемма 1. *Уравнения*

$$y^4-(u^4+v^4)x^4=z^2 \tag{12}$$

и

$$(u^4+v^4)x_1^4-y_1^4=z_1^2 \tag{13}$$

связаны бирациональным преобразованием

$$x=x_1^2u^2-y_1^2, \quad y=x_1y_1v^2+uz_1,$$
$$z=v^2z_1(x_1^2u^2+y_1^2)+2x_1y_1u[(u^4+v^4)x_1^2-u^2y_1^2]; \tag{14}$$
$$x_1=x^2u^2+y^2, \quad y_1=xyv^2+uz,$$
$$z_1=v^2z(x^2u^2-y^2)+2uxy[(u^4+v^4)x^2-u^2y^2]. \tag{15}$$

Доказательство. Решая уравнение

$$u^2x_1^2y^2-2v^2xyx_1y_1-u^2x^2y_1^2=y^2y_1^2+(u^4+v^4)x^2x_1^2 \tag{16}$$

относительно y и y_1, получим

$$y=\frac{-v^2x_1y_1+u\sqrt{(u^4+v^4)x_1^4-y_1^4}}{u^2x_1^2-y_1^2}, \quad y_1=\frac{-v^2xy+u\sqrt{y^4-(u^4+v^4)x^4}}{y^2+y^2ux^2}.$$

Отсюда видно, что если одно из выражений $(u^4+v^4)x_1^4-y_1^4$, $y^4-(u^4+v^4)x^4$ представляет точный квадрат, то и другое — точный квадрат. Следовательно, если положить $(u^4+v^4)x_1^4-y_1^4=z_1^2$, $y^4-(u^4+v^4)x^4=z^2$, то $x=u^2x_1^2-y_1^2$, $y=x_1y_1v^2+uz_1$, $z=v^2z_1(x_1^2u^2+y_1^2)+2ux_1y_1[(u^4+v^4)x_1^2-u^2y_1^2]$, и, наоборот, $x_1=x^2u^2+y^2$, $y_1=xyv^2+uz$, $z_1=v^2z(x^2u^2-y^2)+2uxy[(u^4+v^4)x^2-u^2y^2]$, что и требовалось доказать.

Из доказанной леммы с очевидностью вытекает

Лемма 2. *Зная все рациональные решения одного из уравнений* (12), (13), *по формулам* (14), (15) *можно найти и все рациональные решения другого уравнения.*

Теорема 3. *Уравнения*

$$x^4+(u^4+v^4)y^4=z^4 \tag{17}$$

и

$$(u^4+v^4)y^4-x^4=z^4 \tag{18}$$

имеют соответственно только по одному рациональному над полем $R(u, v)$ *решению*: $\{1, 0, 1\}$, $\{1, u, v\}$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (18) имеет рациональное решение $\{x_k, y_k, z_k\}$. В этом случае уравнение

$$(u^4+v^4)x^4-y^4=z^2 \tag{19}$$

также будет иметь рациональное решение $\{z_k, y_k, x_k^2\}$, и так как многочлен u^4+v^4 неприводим над полем $R(u, v)$, то из (19) следует:

$$x=m^2+n^2, \quad \pm y^2=v^2(m^4-6m^2n^2+n^4)\mp 4u^2mn(m^2-n^2),$$
$$\pm z=u^2(m^4-6m^2n^2+n^4)\pm 4v^2mn(m^2-n^2)$$

или

$$x=m^2+n^2, \quad \pm y^2=u^2(m^4-6m^2n^2+n^4)\mp 4v^2mn(m^2-n^2),$$
$$\pm z=v^2(m^4-6m^2n^2+n^4)\mp 4u^2mn(m^2-n^2).$$

Далее с помощью подстановок $\pm m\to m\pm n$, $\pm n\to m\mp n$ легко убеждаемся, что достаточно рассмотреть только случаи

$$y^2=u^2(m^4-6m^2n^2+n^4)+4v^2mn(m^2-n^2),$$
$$y^2=v^2(m^4-6m^2n^2+n^4)+4u^2mn(m^2-n^2). \tag{20}$$

Переписывая уравнения (20) в виде

$$u^2y^2=(u^2m^2+2v^2mn-u^2n^2)-4(u^4+v^4)m^2n^2,$$
$$v^2y^2=(v^2m^2+2u^2mn-v^2n^2)-4(u^4+v^4)m^2n^2,$$

из них выводим: $m=A\alpha$, $n=B\beta$, $uy=A^2B^2-(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2$, $\pm(u^2m^2+2v^2mn-u^2n^2)=A^2B^2+(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2$ или $m=A\alpha$, $n=B\beta$, $vy=A^2B^2-(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2$, $\pm(v^2m^2+2u^2mn-v^2n^2)=A^2B^2+(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2$.

Решая каждое из уравнений:

$$u^2A^2\alpha^2+2v^2AB\alpha\beta-u^2B^2\beta^2=A^2B^2+(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2,$$
$$v^2A^2\alpha^2+2u^2AB\alpha\beta-v^2B^2\beta^2=A^2B^2+(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2,$$
$$-u^2A^2\alpha^2-2v^2AB\alpha\beta+u^2B^2\beta^2=A^2B^2+(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2,$$
$$-v^2A^2\alpha^2-2u^2AB\alpha\beta+v^2B^2\beta^2=A^2B^2+(u^4+v^4)\alpha^2\beta^2$$

относительно A и B, соответственно получим:

$$A(u^2\alpha^2-B^2)=-v^2B\alpha+u\sqrt{(u^4+v^4)\alpha^4-B^4},$$
$$B(A^2-u^2\beta^2)=-v^2A\beta+u\sqrt{(u^4+v^4)\beta^4-A^4},$$
$$A(v^2\alpha^2-B^2)=-u^2B\alpha+v\sqrt{(u^4+v^4)\alpha^4-B^4},$$
$$B(A^4-v^2\beta^2)=-u^2A\beta+v\sqrt{(u^4+v^4)\beta^4-A^4}.$$

Таким образом, если уравнение (19) имеет некоторое рациональное решение $P\{x, y, z\}$, то оно имеет и рациональное решение $Q=\{x_1, y_1, z_1\}$, причем

$$x=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2,\quad uy=y_1^2y_2^2-(u^4+v^4)x_1^2x_2^2,$$
$$z=v^2(x_1^4y_2^4-6x_1^2y_2^2x_2^2y_1^2+x_2^4y_1^4)+4u^2x_1y_1x_2y_2(x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2),$$
$$x_2=u^2x_1^2-y_1^2,\quad y_2=v^2x_1y_1+uz_1$$

или

$$x=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2,\quad vy=y_1^2y_2^2-(u^4+v^4)x_1^2x_2^2,$$
$$z=u^2(x_1^4y_2^4-6x_1^2y_2^2x_2^2y_1^2+x_2^4y_1^4)+4v^2x_1y_1x_2y_2(x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2),$$
$$x_2=v^2x_1^2-y_1^2,\quad y_2=u^2x_1y_1+vz_1.$$

Отсюда, применяя метод спуска и используя леммы 1 и 2, устанавливаем:

1) всякая рациональная над полем $R(u, v)$ точка кривой $(u^4+v^4)x^4-y^4=z^2$ имеет вид mP_1+nP_2, где $m+n\not\equiv 0 \pmod 2$, $P_1=\{1, u, v^2\}$, $P_2=\{1, v, u^2\}$;

2) всякая рациональная над полем $R(u, v)$ точка кривой

$$y^4-(u^4+v^4)x^4=z^2 \tag{21}$$

имеет вид mP_1+nP_2, где $m+n\equiv 0 \pmod 2$, $P_1=\{1, u, v^2\}$, $P_2=\{1, v, u^2\}$.

Следовательно, для всякого решения уравнения (17) или уравнения (18) имеем соответственно

$$m_1P_1+n_1P_2=\{x, y, z^2\},\quad m_1+n_1\equiv 0 \pmod 2, \tag{22}$$

или

$$m_2P_1+n_2P_2=\{x, y, z^2\},\quad m_2+n_2\not\equiv 0 \pmod 2.$$

Положим сначала $u=v=1$, а затем $u=-v=1$. В этом случае из (22) вытекает $(m_1+n_1)P=\{x_1, y_1, z_1^2\}$, $(m_1-n_1)P=\{x_2, y_2, z_2^2\}$, $(m_2+n_2)P=\{x_3, y_3, z_3^2\}$, $(m_2-n_2)P=\{x_4, y_4, z_4^2\}$, где $P=\{1, 1, 1\}$. Так как уравнения $x^4-2y^4=z^4$, $2y^4-x^4=z^4$ имеют только следующие рациональные решения: $\{1, 0, 1\}$, $\{1, 1, 1\}$, то $(m_1+n_1)P=(m_1-n_1)P=0$, $\pm(m_2+n_2)P=(m_2-n_2)P=P$, откуда $m_1=n_1=0$, $m_2=1$, $n_2=0$ или $m_2=0$, $n_2=1$, что и требовалось доказать.

Морделл [4] и Леммер [5] рассматривали уравнение $x^3+y^3+z^3=1$. Так, например, Морделл указал параметрическое решение $x=-9t^4-3t$, $y=9t^4$, $z=9t^3+1$ этого уравнения, а Леммер вывел рекуррентные соотношения, позволяющие находить бесконечное множество таких решений. Аналогичные результаты для уравнения

$$x^4-y^4+z^2=1 \tag{23}$$

дает

Теорема 4. *Уравнение* (23) *имеет бесконечное множество параметрических решений.*

Справедливость теоремы с очевидностью вытекает из рекуррентных формул: $x_{k+1}=t^4x_k+(t^4-1)y_k$, $y_{k+1}(t^4+1)x_k+t^4y_k$, $z_{k+1}=(2t^6+t^2)x_k^2+4t^6x_ky_k+(2t^6-t^2)y_k^2+1$, $x_0=t$, $y_0=t$, $z_0=1$. В частности, это уравнение имеет следующие решения:

$$x_1=2t^5-t, \qquad x_2=4t^9-2t^5-t,$$
$$y_1=2t^5+t, \qquad y_2=4t^9+2t^5-t,$$
$$z_1=8t^8+1, \qquad z_2=64t^{16}-16t^8+1,$$

$$x_3=8t^{13}-4t^9-4t^5+t, \qquad x_4=16t^{17}-8t^{13}-12t^9+4t^5+t,$$
$$y_3=8t^{13}+4t^9-4t^5-t, \qquad y_4=16t^{17}+8t^{13}-12t^9-4t^5+t,$$
$$z_3=128t^{24}-96t^{16}+16t^8+1, \qquad z_4=512t^{32}-640t^{24}+224t^{16}-16t^8+1.$$

В заключение заметим, что нами было найдено следующее параметрическое решение уравнения $x^4=y^4+z^4+t^2$:

$$x=(2u^4+8u^3+12u^2+8u+3)v^2-4u(2u^3+6u^2+5u+2)v+14u^4+$$
$$+16u^3+8u^2+1,$$
$$y=-(2u^2+8u^3+12u^3+8u+1)v^2+4u(2u^3+6u^2+7u+2)v-$$
$$-6u^4-16u^3-8u^2+1,$$
$$z=-2(u+1)v^2+2(2u^4+4u^3+6u^2+6u+1)v-$$
$$-2u(2u^3+4u^2+6u+1),$$
$$t=8(u+1)^6v^4+4(4u^8+24u^7+48u^6+20u^5-60u^4-96u^3-$$
$$-56u^2-10u+1)v^3+8u(-12u^7-60u^6-106u^5-66u^4+18u^3+44u^2+$$
$$+14u-1)v^2+4(52u^8+200u^7+256u^6+124u^5-28u^4-32u^3+2u+1)v+$$
$$+4u(-48u^7-104u^6-94u^5-24u^4+6u^3-2u-2).$$

Следовательно, если гипотеза Л. Эйлера верна, то уравнение

$$\pm w^2=8(u+1)^6v^4+4(4u^8+24u^7+48u^6+20u^5-60u^4-96u^3-56u^2-$$
$$-10u+1)v^3+8u(-12u^7-60u^6-106u^5-66u^4+18u^3+$$
$$+44u^3+14u-1)v^2+4(52u^8+200u^7+256u^6+124u^5-28u^4-32u^3+$$
$$+2u+1)v+4u(-48u^7-104u^6-94u^5-24u^4+6u^3-2u-2)$$

не имеет решений в рациональных числах, отличных от 0.

г. Москва

Поступило
10 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Dickson L. E. History of the theory of numbers, v. 2. New York, 1934.

2. Серпинский В. Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики.— На границе геометрии и арифметики. М., Учпедгиз, 1961, с. 62.

3. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. М., Физматгиз, 1961.

4. Mordell L. J. On an infinity of integer solutions of $ax^3+ay^3+bz^3=bc^3$. J. London Math. Soc., v. 30, 1955, p. 111—113.

5. Lehmer D. H. On the diophantine equation $x^3+y^3+z^3=1$. J. London Math. Soc., v. 31, 1956, p. 275—280.