Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. Г. Камунтавичюс, Категорные свойства множества точек неединственности в пространстве L_φ, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 73–80

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
25 марта 2025 г., 20:38:54

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

КАТЕГОРНЫЕ СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НЕЕДИНСТВЕННОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_φ

Д.-А. Г. Камунтавичюс

Пусть Φ — множество всех четных на $(-\infty, \infty)$ функций φ, неубывающих на $[0, \infty)$, удовлетворяющих условиям $\varphi(u_1 + u_2) \leqslant \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$ при $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$; $\varphi(0) = 0$; $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$. Пусть (T, Ω, μ) — пространство с мерой, Ω — σ-алгебра подмножеств T. Через $L_\varphi = L_\varphi(\mathrm{T}, \Omega, \mu)$ будем обозначать множество измеримых, конечных почти всюду на T функций $f(t)$ таких, что $\int_\mathrm{T} \varphi(f(t))\, d\mu < \infty$. При этом будем считать, что $f_1 = f_2$, если $\int_\mathrm{T} \varphi(f_1 - f_2)\, d\mu = 0$, где $f_1, f_2 \in L_\varphi$. Множество L_φ является линейным метрическим пространством с метрикой $\rho(f_1, f_2) = \int_\mathrm{T} \varphi(f_1 - f_2)\, d\mu$. Если $E \in \Omega$, то обозначим $\rho_E(f_1, f_2) = \int_E \varphi(f_1 - f_2)\, d\mu$.

Атомом меры μ называется всякое множество $E \in \Omega$ конечной положительной меры такое, что если $F \subset E$, $F \in \Omega$, то $\mu(F) = 0$ либо $\mu(F) = \mu(E)$. Мера μ, не содержащая атомов, называется неатомической. Пусть X — метрическое пространство. Метрической проекцией элемента $x \in X$ на множество $M \subset X$ называется множество

$$P_M x = \{g \in M\colon \rho(x, g) = \inf_{y \in M} \rho(x, y) = \rho(x, M)\}.$$

Множество $R(M) = \{x \in X\colon \operatorname{card} P_M x > 1\}$ называется множеством точек неединственности для $M \subset X$. Элемент $x \in X$ называется точкой аппроксимативной компактности для множества $M \subset X$, если для x любая минимизирующая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ (т. е. последовательность, обладающая свойством $\rho(x, y_n) \to \rho(x, M)$, $n \to \infty$) в M имеет предельную точку y. Через $AC(M)$ обозначим множество точек аппроксимативной компактности для множества M. Множество $M \subset X$ называется аппроксимативно компактным, если $AC(M) = X$ (см. [1]).

Категорные свойства множества $R(M)$ ранее исследовались в нормированных пространствах. В частности, в работе Хавин-

© Д.- А. Г. Камунтавичюс, 1990

сона С. Я. и Романовой З. С. [2] доказано, что если E — конечномерное подпространство пространства L_1 (T, Ω, μ), $\dim E > 0$, μ — неатомическая мера, то множество $R(E)$ является множеством первой категории. В пространстве L_φ справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $X = L_\varphi$ (T, Ω, μ), $M \subset X$, μ — *неатомическая мера. Тогда множество* $AC(M) \cap R(M)$ *является множеством первой категории в* X.

Отсюда вытекает обобщение теоремы из [2] на случай $\varphi \in \Phi$ (см. следствие 3).

В доказательстве теоремы нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть* (T, Ω, μ) — *пространство с неатомической мерой* μ, $E \in \Omega$, $\mu(E) < \infty$. *Тогда для любого* γ, $0 < \gamma < 1$, *существуют множества* $B^n \in \Omega$, $B^n \subset E$ $(n \in \mathbf{N})$ *такие, что для любого набора* $n_1 < \ldots < n_m$ *выполнено равенство*

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B^{n_j}\right) = \mu(E)(1-\gamma)^m. \tag{1}$$

Доказательство. Из теоремы о выпуклости множества $\{\mu(F),\ F \in \Omega\}$, где μ — конечная неатомическая мера на σ-алгебре Ω [3, с. 135] следует, что если $E_1 \subset \Omega$, $\mu(E_1) < \infty$, то для любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \mu(E_1)$, существует такой элемент $E_2 \in \Omega$, что $E_2 \subset E_1$ и $\mu(E_2) = \alpha$. Таким образом, существуют множества $D_k^n \subset E$ $(n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ такие, что $\mu(D_1^1) = \gamma\mu(E)$, $D_2^1 = E \setminus D_1^1$; $D_{2k-1}^n \subset D_k^{n-1}$, $D_{2k}^n = D_k^{n-1} \setminus D_{2k-1}^n$; $\mu(D_{2k-1}^n) = \gamma\mu(D_k^{n-1})$ $(n = 2, 3, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, 2^{n-1})$. Положим $B^n = \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} D_{2i-1}^n$. Отметим некоторые свойства множеств D_k^n и B^n.

1. $\bigcup_{k=1}^{2^n} D_k^n = E$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ В самом деле,

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} D_k^n = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} (D_{2k-1}^n \cup D_{2k}^n) = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} D_k^{n-1} = \ldots = \bigcup_{k=1}^{2} D_k^1 = E.$$

2. $D_k^n \cap D_m^n = \varnothing$ при $k \neq m$.

3. $\mu(D_k^n \cap B^p) = \gamma\mu(D_k^n)$ при $p > n$.

Если $p = n + 1$, то равенство справедливо потому, что $\mu(D_k^n \cap B^{n+1}) = \mu(D^n \cap D_{2k-1}^{n+1}) = \gamma\mu(D_k^n)$.

При $p > n + 1$ множество D_k^n можно представить в виде объединения $\bigcup_i D_i^{p-1}$, где $i = 2^{p-n-1}\cdot k - 2^{p-n-1} + 1, \ldots, 2^{p-n-1}\cdot k$. Но тогда $\mu(\bigcup_i D_i^{p-1} \cap B^p) = \mu(\bigcup_i (D_i^{p-1} \cap B^p)) = \gamma\mu(\bigcup_i D_i^{p-1}) = \gamma\mu(D_k^n)$.

Утверждение леммы докажем методом индукции по числу m в равенстве (1). При $m = 1$

$$\mu(E \setminus B^n) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} D_k^{n-1} \setminus B^n\right) = (1-\gamma)\cdot\mu\left(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} D_k^{n-1}\right) = (1-\gamma)\mu(E).$$

Пусть (1) справедливо при $m = 1, 2, \ldots, M - 1$. Тогда

$$\mu (E \setminus \bigcup_{j=1}^{M} B^{n_j}) = \mu (E \setminus \bigcup_{j=1}^{M-1} B^{n_j} \setminus B^{n_M}).$$

Множество $E \setminus \bigcup_{j=1}^{M-1} B^{n_j}$ можно представить как $\bigcup_i D_i^{n_{M-1}}$, где $i \in I$ — некоторое множество индексов. При этом $\mu (\bigcup_{i \in I} D_i^{n_{M-1}}) = (1 - \gamma)^{M-1} \mu (E)$. Но

$$\mu (\bigcup_{i \in I} D_i^{n_{M-1}} \setminus B^{n_M}) = \sum_{i \in I} \mu (D_i^{n_{M-1}} \setminus B^{n_M}) =$$

$$= \sum_{i \in I} (1 - \gamma) \mu (D_i^{n_{M-1}}) = (1 - \gamma) \mu (\bigcup_{i \in I} D_i^{n_{M-1}}).$$

Таким образом, $\mu (E \setminus \bigcup_{j=1}^{M} B^{n_j}) = (1 - \gamma)^M \mu (E)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $X = L_\varphi (\mathrm{T}, \Omega, \mu)$ — пространство с неатомической мерой μ, функции g, $x \in X$ и компакт $M \subset X$ такие, что $g \notin M$, $\rho (x, g) = \rho (x, f)$ для любого $f \in M$. Тогда существует множество $E \in \Omega$, $E \subset G = \{t \in \mathrm{T}\colon\ g (t) \neq x (t)\}$, $\mu (E) < \infty$, такое, что $\mu \{t \in E\colon f (t) \neq g (t)\} > 0$ для любой функции $f \in M$.*

Доказательство. Пусть мы нашли функцию $f \in M$ такую, что $f = g$ на G. Но тогда, если $\mu \{t \in \mathrm{T} \setminus E\colon\ f (t) \neq g (t)\} = 0$, то $f = g$ на Т, что противоречит условию $g \notin M$. Если $\mu \{t \in \mathrm{T} \setminus E\colon f (t) \neq g (t)\} > 0$, то $\rho (f, x) > \rho (g, x)$, а это противоречит условию $\rho (g, x) = \rho (f, x)$ для любого $f \in M$. Значит, если $\mu (G) < \infty$, то множество $E = G$ удовлетворяет лемме.

Пусть $\mu (G) = \infty$. Возьмем множества $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ такие, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = G$, $E_n \subset E_{n+1}$, $\mu (E_n) < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Предположим, что для любого n найдется функция $f_n \in M$, $\mu \{t \in E_n\colon f_n (t) \neq g (t)\} = 0$. Так как M — компакт, для множества $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предельная функция $f \in M$, следовательно, $f = g$ на G. Но выше показано, что это невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $X = L_\varphi (\mathrm{T}, \Omega, \mu)$ — пространство с неатомической мерой μ, функции g, $x \in X$ и компакт $M \subset X$ такие, что $g \notin M$, $\rho (x, g) = \rho (x, f)$ при $f \in M$. Тогда для любого $\alpha > 0$ найдется функция $x' \in X$ такая, что $\rho (x, x') < \alpha$, $\rho (g, x') = \rho (g, x) - \rho (x, x')$ и $\rho (x', f) > \rho (x', g)$ для любого элемента $f \in M$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\beta > 0$ найдется множество $B \in \Omega$, $B \subset G = \{t \in \mathrm{T}\colon\ g (t) \neq x (t)\}$, $0 < \mu (B) \leqslant \beta$ такое, что

$$\rho_B (x, f) < \rho_B (x, g) + \rho_B (g, f) \tag{1'}$$

для любой функции $f \in M$. В самом деле, из интегрируемости функций $\varphi (x)$, $\varphi (g)$ следует, что можно подобрать число $\beta > 0$ так, что для любого множества $B \in \Omega$, $B \subset G$, $0 < \mu (B) \leqslant \beta$

будет выполнено неравенство $\rho_B(g, x) < \alpha$. Положим $x' = \begin{cases} g, & t \in B, \\ x, & t \in T \setminus B \end{cases}$. Тогда $\rho(g, x') = \rho(g, x) - \rho(x, x')$. Используя (1′), имеем

$$\rho(x', f) = \rho_{T\setminus B}(x, f) + \rho_B(g, f) > \\ > \rho_{T\setminus B}(x, f) + \rho_B(x, f) - \rho_B(x, g) = \\ = \rho(x, g) - \rho_B(x, g) = \rho(x', g).$$

Пусть множество E_0 удовлетворяет лемме 2. Положим $\varepsilon = \inf_{f \in M} \rho_{E_0}(f, g)$. Множество E, $E_0 \subset E \subset G$, $\mu(E) < \infty$ возьмем таким, что $\rho_{G\setminus E}(g, x) < \varepsilon/20$. Пусть $0 < \gamma < \min\{\beta/\mu(E), 1\}$, $B^n \subset E$ — множества, удовлетворяющие лемме 1. Заметим, что $\mu(B^n) = \gamma\mu(E) \leqslant \beta$ при $n \in \mathbf{N}$.

Неравенство (1′) будем доказывать от противного. Пусть для любого $n \in \mathbf{N}$ существует функция $f_n \in M$, для которой

$$\rho_{B^n}(x, f_n) \geqslant \rho_{B^n}(x, g) + \rho_{B^n}(g, f_n). \tag{2}$$

Так как φ удовлетворяет неравенству треугольника, в (2) возможно только равенство. Более того, это влечет за собой равенство

$$\varphi(x(t) - f_n(t)) = \varphi(x(t) - g(t)) + \varphi(g(t) - f_n(t)) \tag{3}$$

для почти всех $t \in B^n$.

Из $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f_k'\}_{k=1}^{\infty}$, где $f_k' = f_{n_k}$, $f_k' \to f$ при $k \to \infty$. Обозначим $B_k = B^{n_k}$. Так как $\varphi(x(t) - g(t))$ — интегрируемая функция, то найдется такое число N, что для любого множества $\tilde{E} \subset E$, удовлетворяющего условию $\mu(\tilde{E}) \leqslant \mu(E)(1-\gamma)^N$, будет выполнено неравенство

$$\rho_{\tilde{E}}(x, g) < \varepsilon/5. \tag{4}$$

Из $f_k' \to f$ при $k \to \infty$ следует, что существует номер $k_0 \in \mathbf{N}$ такой, что при $k \geqslant k_0$

$$\rho(f, f_k') \leqslant \varepsilon/10N. \tag{5}$$

Для произвольно выбранного номера k почти всюду на B_k будем иметь

$$\varphi(x(t) - f(t)) \geqslant \varphi(x(t) - f_k'(t)) - \varphi(f_k'(t) - f(t)) = \\ = \varphi(x(t) - g(t)) + \varphi(g(t) - f_k'(t)) - \varphi(f_k'(t) - f(t)) \geqslant \\ \geqslant \varphi(x(t) - g(t)) - \varphi(f_k'(t) - f(t)).$$

Введем обозначения $A_1 = B_{k_0+1}$, $A_i = B_{k_0+i} \setminus \bigcup_{k=k_0+1}^{k_0+i-1} B_k$ $(i > 1)$. В силу $A_i \subset B_{k_0+i}$ последнее неравенство, написанное с функцией f_{k_0+i}' можно интегрировать по множеству A_i. Полагая $F = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, пользуясь свойством $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$

и оценкой (5), имеем

$$\rho_F(x, f) = \sum_{i=1}^N \rho_{A_i}(x, f) \geqslant \sum_{i=1}^N (\rho_{A_i}(x, g) - \rho_{A_i}(f'_{k_0+i}, f)) \geqslant$$
$$\geqslant \rho_F(x, g) - \sum_{i=1}^N \rho(f'_{k_0+i}, f) \geqslant \rho_F(x, g) - \varepsilon/10.$$

В силу последней оценки и выбора множества E, имеем

$$\rho_{E\setminus F}(x, f) \leqslant \rho(x, f) - \rho_F(x, f) = \rho(x, g) - \rho_F(x, f) \leqslant$$
$$\leqslant \rho_{G\setminus F}(x, g) + \varepsilon/10 \leqslant \rho_{E\setminus F}(x, g) + 3\varepsilon/20. \quad (6)$$

Наконец, из леммы 1 и примененного к множеству $E \setminus F$ неравенству (4) имеем оценку

$$\rho_{E\setminus F}(x, g) < \varepsilon/5. \quad (7)$$

Далее, для произвольно выбранного номера k почти всюду на B_k справедливо неравенство

$$\varphi(x(t) - f(t)) \geqslant \varphi(x(t) - f'_k(t)) - \varphi(f'_k(t) - f(t)) =$$
$$= \varphi(x(t) - g(t)) + \varphi(g(t) - f'_k(t)) - \varphi(f(t) - f'_k(t)) \geqslant$$
$$\geqslant \varphi(x(t) - g(t)) + \varphi(g(t) - f(t)) - 2\varphi(f(t) - f'_k(t)),$$

которое опять-таки можно интегрировать по множеству A_i ($i = k - k_0$). Проинтегрировав соответствующие неравенства по множествам A_i ($i = 1, \ldots, N$), получим

$$\rho_F(g, f) \leqslant \rho_F(x, f) - \rho_F(x, g) + 2\sum_{i=1}^N \rho(f, f'_{k_0+i}) \leqslant$$
$$\leqslant \rho_F(x, f) - \rho_F(x, g) + 2\varepsilon/10. \quad (8)$$

В силу (7) $\rho_F(x, g) > \rho_E(x, g) - \varepsilon/5$, а согласно выбору E $\rho_E(x, g) > \rho(x, g) - \varepsilon/20$. Значит, продолжая (8), получаем

$$\rho_F(g, f) < \rho(x, f) - \rho(x, g) + \varepsilon/20 + \varepsilon/5 + 2\varepsilon/10 = 9\varepsilon/20.$$

Далее, согласно (6) и (7), имеем

$$\rho_{E\setminus F}(g, f) \leqslant \rho_{E\setminus F}(g, x) + \rho_{E\setminus F}(x, f) \leqslant$$
$$\leqslant 2\rho_{E\setminus F}(x, g) + 3\varepsilon/20 < 11\varepsilon/20.$$

Таким образом, $\rho_E(f, g) = \rho_{E\setminus F}(f, g) + \rho_F(f, g) < \varepsilon$. Но $\rho_E(f, g) \geqslant \rho_{E_0}(f, g) \geqslant \varepsilon$ по выбору числа ε. Полученное противоречие и доказывает лемму.

З а м е ч а н и е. Далее не будут использованы никакие свойства пространства L_φ, кроме метрического свойства, доказанного в лемме 3. Таким образом, теорема справедлива для любого метрического пространства X, в котором верно утверждение леммы 3. В частности, теорема справедлива в строго выпуклых нормированных пространствах X (т. е. таких, что для любых $x, y \in X$ из $\|x\| = \|y\|$, $x \neq y$ следует, что $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$). Докажем это.

Пусть X — строго выпуклое пространство с нормой $\|\cdot\|$, функции $g, x \in X$ и компакт $M \subset X$ такие, что $g \notin M$, $\|x - g\| = \|x - f\|$ для любого $f \in M$. Зафиксируем произвольное число $\alpha > 0$. Положим $\beta = \alpha/(2\| x - g \| + \alpha)$, $x' = (1 - \beta) x + \beta g$. Тогда $\| x - x' \| = \beta \| x - g \| < \alpha$, $\| x' - g \| = (1 - \beta) \| x - g \| = \| x - g \| - \| x - x' \|$. В силу строгой выпуклости $\| f - x' \| > \| f - x \| - \| x - x' \| = \| g - x' \|$ для любого $f \in M$, что и доказывает утверждение леммы 3 в пространстве X. В частности, Стечкиным С. Б. доказано [4], что если M — ограниченно компактное множество в строго выпуклом пространстве, то множество $R\ (M)$ является множеством первой категории. Аналогичный результат был получен Конягиным С. В. [5] для аппроксимативно компактных множеств в строго выпуклом пространстве.

ЛЕММА 4. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $X = L_\varphi\ (\mathrm{T}, \Omega, \mu)$, μ — *неатомическая мера*, $M_1, M_2 \subset X$ — *непересекающиеся множества. Тогда множество* $A\ (M_1, M_2) = \{x \in AC\ (M_1) \cap AC\ (M_2)\colon \rho\ (x, M_1) = \rho\ (x, M_2)\}$ *нигде не плотно в* X.

Доказательство. Мы должны показать, что для любого элемента $x \in A\ (M_1, M_2)$ и всякого $\alpha > 0$ найдется открытое подмножество в шаре радиуса α с центром в точке x не пересекающее $A\ (M_1, M_2)$. Пусть $x \in A\ (M_1, M_2)$, тогда $P_{M_1}x$ и $P_{M_2}x$ — компакты. Возьмем $g \in P_{M_1}x$. В силу леммы 3 найдется такая функция $x' \in X$, что $\rho\ (x, x') < \alpha$, $\rho\ (x', g) = \rho\ (x, g) - \rho\ (x, x')$ и $\rho\ (x', f) > \rho\ (x', g)$ для любого элемента $f \in P_{M_1}x$. Допустим, что $\rho\ (x', M_2) \leqslant \rho\ (x', g)$. Тогда для некоторой последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in M_2$ $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\ (x', f_n) \leqslant \rho\ (x', g) = \rho\ (x, g) - \rho\ (x, x')$, откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ \rho\ (x, f_n) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \rho\ (x', f_n) + \rho\ (x, x') \leqslant \rho\ (x, g) = \rho\ (x, M_2)$. В силу условия $x \in AC\ (M_2)$ последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $f \in P_{M_2}x$. Далее, имеем $\rho\ (x', f) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho\ (x', f_n) \leqslant \rho\ (x', g)$, что противоречит выбору x'. Значит, $\rho\ (x', M_2) > \rho\ (x', g) \geqslant \rho\ (x', M_1)$. Но тогда все функции $x'' \in X$ такие, что $\rho\ (x, x'') < (^1/_2)\ (\rho\ (x', M_2) - \rho\ (x', g))$ также удовлетворяют неравенству $\rho\ (x'', M_2) > \rho\ (x'', M_1)$, откуда $x'' \notin A\ (M_1, M_2)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть* X — *метрическое пространство*, $M \subset X$ $x \in AC\ (M)$. *Тогда для любого* $\alpha > 0$ *существует такое* $\varepsilon > 0$, *что если* $\rho\ (x, x') < \varepsilon$, $y \in P_M x'$, *то* $\rho\ (y, P_M x) \leqslant \alpha$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\alpha > 0$ и любого $n \in \mathbf{N}$ найдутся функции $x_n \in X$, $y_n \in P_M x_n$ такие, что $\rho\ (x, x_n) < 1/n$, $\rho\ (y_n, P_M x) > \alpha$. Тогда

$$\rho\ (x, y_n) \leqslant \rho\ (x, x_n) + \rho\ (x_n, y_n) \leqslant$$
$$\leqslant \rho\ (x, x_n) + \rho\ (x_n, P_M x) \leqslant 2 \cdot \rho\ (x, x_n) + \rho\ (x, P_M x) <$$
$$< \rho\ (x, P_M x) + 2/n \to \rho\ (x, P_M x), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — минимизирующая последовательность для x и в силу условия $x \in AC\,(M)$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу $y \in P_M x$. Но это противоречит условию $\rho(y_n, P_M x) > \alpha$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

ЛЕММА 6. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $X = L_\varphi(\mathrm{T}, \Omega, \mu)$ — *пространство с неатомической мерой* μ, $M \subset X$, α — *произвольное положительное число. Тогда множество* $R_\alpha(M) = \{x \in AC(M)\colon \exists y_1, y_2 \in P_M x, \rho(y_1, y_2) \geqslant \alpha\}$ *нигде не плотно в* X.

Доказательство. Пусть функция $x \in R_\alpha(M)$. Согласно лемме 5 существует такое $\varepsilon > 0$, что если $\rho(x, x') < \varepsilon$, $y \in P_M x'$, то $\rho(y, P_M x) \leqslant \alpha/10$. В компактном множестве $P_M x$ выберем конечную $(\alpha/10)$-сеть $\{g_i\}_{i=1}^n$. Обозначим $M_i = \{g \in M\colon \rho(g, g_i) \leqslant \alpha/5\}$.

Если $x' \in R_\alpha(M)$ и $\rho(x, x') < \varepsilon$, то по определению множества $R_\alpha(M)$ существуют функции $y_1, y_2 \in P_M x'$ такие, что $\rho(y_1, y_2) \geqslant \alpha$. Согласно выбору числа ε найдутся элементы $z_1, z_2 \in P_M x$ такие, что $\rho(y_1, z_1) \leqslant \alpha/10$, $\rho(y_2, z_2) \leqslant \alpha/10$ и g_i, g_j из конечной $(\alpha/10)$-сети такие, что $\rho(z_1, g_i) \leqslant \alpha/10$, $\rho(z_2, g_j) \leqslant \alpha/10$. Из $\rho(y_1, g_i) \leqslant \rho(y_1, z_1) + \rho(z_1, g_i) \leqslant \alpha/5$ получаем, что $y_1 \in M_i$. Аналогично, $y_2 \in M_j$. При этом $M_i \cap M_j \neq \varnothing$, так как $\rho(g_i, g_j) \geqslant \rho(y_1, y_2) - \rho(y_1, g_i) - \rho(y_2, g_j) \geqslant 3\alpha/5$. Из условий $x' \in AC(M)$, $\rho(x', M) = \rho(x', M_i) = \rho(x', M_j)$ вытекает, что $x' \in AC(M_i) \cap AC(M_j)$. Действительно, для x' любая минимизирующая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty \in M_i$ является минимизирующей и в M, так как $\rho(x', M) = \rho(x', M_i)$, следовательно, имеет предельную функцию $y \in M$. Так как M_i — замкнутое множество, $y \in M_i$, но это и значит, что $x' \in AC(M_i)$. Аналогично получаем, что $x' \in AC(M_j)$.

Таким образом, множество $L = \{x' \in R_\alpha(M)\colon \rho(x, x') < \varepsilon\}$ покрывается множествами $A(M_i, M_j)$, где $M_i \cap M_j = \varnothing$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$. Согласно лемме 4, $A(M_i, M_j)$ — нигде не плотно, а значит и L нигде не плотно. Так как функция $x \in R_\alpha(M)$ была выбрана произвольно, отсюда вытекает, что $R_\alpha(M)$ нигде не плотно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $x \in R(M) \cap AC(M)$. Тогда найдутся функции $y_1, y_2 \in P_M x$, $\rho(y_1, y_2) = \delta > 0$. При $n > 1/\delta$ имеем $x \in R_{1/n}(M)$. Следовательно, $R(M) \cap AC(M) \subset \bigcup_{n=1}^\infty R_{1/n}(M)$ и по лемме 6 является множеством первой категории. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $L_\varphi(\mathrm{T}, \Omega, \mu)$ — *пространство с неатомической мерой* μ, $M \subset L_\varphi$ — *аппроксимативно компактное множество. Тогда* $R(M)$ *является множеством первой категории в* L_φ.

Это вытекает из теоремы и условия $AC(M) = L_\varphi$ для аппроксимативно компактного множества M.

Замечание 2. Если $M \subset L_\varphi$ не является аппроксимативно компактным множеством, то следствие 1, вообще говоря, не выполнено. В самом деле, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(u) = \infty$, а $M = \{y \in L_\varphi\colon \rho(y, 0) \leqslant 1\}$. Для функции $x \in L_\varphi \diagdown M$ будет выполнено $\rho(x, M) \geqslant$

$\geqslant \rho(x, 0) - 1$. Пусть

$$S = \{y \in M\colon \forall t \in \mathrm{T}\ y(t) \in \{0, x(t)\},\ \rho(y, 0) = 1\}.$$

Из $\rho(x, 0) > 1$ следует, что $\operatorname{card} S > 1$. С другой стороны, $\rho(x, y) = \rho(x, 0) - 1$ при $y \in S$, следовательно, $S \subset P_M x$. Так как функция x была выбрана произвольно из $L_\varphi \setminus M$, то $R(M) = L_\varphi \setminus M$ — множество не первой категории.

Следствие 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $L_\varphi(\mathrm{T}, \Omega, \mu)$ — пространство с неатомической мерой μ, $M \subset L_\varphi$ — компактное множество. Тогда $R(M)$ является множеством первой категории в L_φ.*

Следствие 3. *Пусть $\varphi \in \Phi$, φ непрерывна, $L_\varphi(\mathrm{T}, \Omega, \mu)$ — пространство с неатомической мерой μ, $Y \subset L_\varphi$ — конечномерное подпространство. Тогда $R(Y)$ является множеством первой категории в L_φ.*

В работе Гаркави А. Л. [6] доказано, что конечномерное подпространство в L_φ, где $\varphi \in \Phi$, φ непрерывна, является аппроксимативно компактным. Отсюда и из следствия 1 вытекает требуемое утверждение.

Замечание 3. Требование, чтобы мера μ была неатомической, в теореме существенно. В частности, теорема не верна в пространствах $l_\varphi = \{x = (x_1, x_2, \ldots)\colon \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) < \infty\}$ с метрикой $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i - y_i)$, где φ — непрерывная функция класса Φ. Для примера достаточно рассмотреть одномерное подпространство $Y = \{(a, -a, 0, 0, \ldots),\ \text{где } a \in \mathbf{R}\} \subset l_\varphi$. Тогда, каков бы ни был элемент $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ из $l_\varphi \setminus Y$, проекция $P_Y x$ будет содержать по крайней мере две точки $(x_1, -x_1, 0, \ldots)$ и $(-x_2, x_2, 0, \ldots)$. Таким образом, все точки из $l_\varphi \setminus Y$ содержатся в $R(Y)$, а, так как $l_\varphi \setminus Y$ не является множеством первой категории, следствие 3 в пространстве l_φ не верно. Это в свою очередь влечет невыполнение теоремы в пространстве l_φ.

В заключение выражаю благодарность С. В. Конягину за помощь в подготовке работы.

Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса

Поступило 05.03.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. Аппроксимативная компактность и чебышевские множества // ДАН СССР. 1961. Т. 140, № 3. С. 522—524.

[2] Хавинсон С. Я., Романова З. С. Аппроксимативные свойства подпространств конечной размерности в пространстве L_1 // Мат. сб. 1972. Т. 89, № 1. С. 3—15.

[3] Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

[4] Стечкин С. Б. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Rev. Math. Pur. Appl. 1963. V. 8, N 1. P. 5—18.

[5] Конягин С. В. Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // ДАН СССР. 1980. Т. 251, № 2. С. 276—280.

[6] Гаркави А. Л. Теорема существования элемента наилучшего приближения в пространствах типа (F) с интегральной метрикой // Математические заметки. 1970. Т. 8, вып. 5. С. 583—594.