Д. В. Карпов, Разделяющие множества в k-связном графе,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2006, том 340, 33–60

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 340, 2006 г.

Д. В. Карпов

РАЗДЕЛЯЮЩИЕ МНОЖЕСТВА В k-СВЯЗНОМ ГРАФЕ

Введение. Основные определения

Структура взаимного расположения точек сочленения в связном графе хорошо известна и имеет многочисленные применения в теории графов (см. [7, 8]). Понятие вершинной k-связности можно рассматривать как обобщение понятия связности. Это привело к многочисленным попыткам обобщения методов и конструкций, известных для связного графа, на случай k-связного графа. Таким образом возникает одно из направлений исследований в теории связности графов – исследование взаимного расположения k-вершинных разделяющих множеств в k-связном графе и разбиения графа этими множествами. В 1966 году W. T. Tutte [3] полностью описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе и показал, что она имеет много общего со структурой точек сочленения. Случай $k > 2$ намного сложнее; о структуре k-разделяющих множеств в k-связном графе известно значительно меньше.

В работе рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. На протяжении всей работы мы будем пользоваться следующими определениями и обозначениями. Множества вершин и ребер графа G будем обозначать через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Мы будем называть две вершины графа связанными, если существует путь между ними. Под компонентой связности графа в работе подразумевается максимальное по включению множество его попарно связанных вершин.

Для любого множества ребер $E \subset E(G)$ мы, как обычно, будем обозначать через $G - E$ граф, полученный из G в результате уда-

Автор благодарит за поддержку исследований программу фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики". Работы поддержана грантом Президента РФ НШ-8664.2006.1, грантом INTAS 04-77-7173 и грантом РФФИ 05-0100932.

ления ребер множества E. Для $e \in E(G)$ положим $G - e = G - \{e\}$. Для любого множества вершин $V \subset V(G)$ мы будем обозначать через $G - V$ граф, полученный из G в результате удаления вершин множества V и всех инцидентных им ребер. Для $v \in V(G)$ положим $G - v = G - \{v\}$.

Во всей работе пусть G – k-связный граф (здесь и далее $k \geqslant 2$ – натуральное число). Множество $S \subset V(G)$ – *разделяющее*, если граф $G - S$ несвязен. Семейство всех разделяющих множеств графа G мы будем обозначать через $\mathfrak{R}(G)$, а семейство всех его k-вершинных разделяющих множеств (мы будем называть такие множества *k-разделяющими*) будем обозначать через $\mathfrak{R}_k(G)$. Целью настоящей работы является исследование свойств k-разделяющих множеств k-связного графа, а также изучение структуры взаимного расположения таких множеств. Мы постараемся показать сходство этой структуры со структурой взаимного расположения точек сочленения связного графа.

Определение 1. 1) *Пусть $R, X \subset V(G)$. Будем говорить, что множество R разделяет множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

2) *Пусть $U, W \subset V(G)$. Будем говорить, что множество R отделяет множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что R отделяет вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что R отделяет вершину u от вершины w.

Во всех работах по теории связности считается, что "части" разбиения графа одним разделяющим множеством S так или иначе соответствуют компонентам связности графа $G - S$. Наша работа не будет исключением. Однако для изучения структуры взаимного расположения разделяющих множеств необходимо определить разбиение графа набором из нескольких разделяющих множеств. В этом вопросе исследователи шли разными путями, в той или иной степени обобщающими определение двусвязного блока в связном графе.

Блок связного графа – это, с одной стороны, максимальный по включению двусвязный подграф (наиболее классическое определение блока), а с другой стороны – часть разбиения графа точками сочленения (то есть, одновершинными разделяющими множествами). При попытке обобщить первый подход (см., например, [2]) получается определение блока в k-связном графе, как максимального по включению $(k+1)$-связного подграфа. При всей простоте и красоте этого определения отметим, что свойства определенных таким образом блоков очень далеки от свойств блоков связного графа.

Наиболее многочисленными были попытки определить разбиение графа набором его разделяющих множеств как результат процесса последовательного разбиения графа множествами этого набора (см. [3] для двусвязных графов, а также [1, 6] для графов большей связности). Общая суть этих определений такова. Рассматривается разделяющее множество S. Пусть $H_1, \dots, H_n$ – компоненты связности графа $G-S$. Части разбиения графа множеством S определяются как индуцированные подграфы графа G на вершинах $H_i \cup S$ (для $i \in \{1, \dots, n\}$), к которым для сохранения k-связности добавляются всевозможные ребра между вершинами множества S. Далее рассматривается следующее разделяющее множество, лежащее в одной из полученных частей (нетрудно показать, что такое множество является разделяющим и в исходном графе) и происходит следующая операция разбиения. Нетрудно понять, что в результате такого процесса разбиения связного графа его точками сочленения получатся блоки вне зависимости от последовательности разбиения. Однако при $k>1$ в k-связном графе могут существовать *зависимые* (то есть разделяющие друг друга) k-разделяющие множества; после разбиения по одному из них мы не можем провести разбиение по второму. Таким образом, в общем случае результат зависит от последовательности разбиения.

Мы придерживаемся значительно более простого подхода к определению разбиения графа набором разделяющих множеств, предложенного в [5].

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$.*

Часть разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ (или часть $\mathfrak{S}$-разбиения) – это такое максимальное по включению множество $A \subset V(G)$, что никакое множество $S \in \mathfrak{S}$ не разделяет A. Будем обозначать через $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ множество всех частей $\mathfrak{S}$-разбиения. Для $S \in \mathfrak{R}(G)$ положим $\mathrm{Part}\,(S) = \mathrm{Part}\,(\{S\})$.

В этих обозначениях не указывается граф, так как во всей работе они будут применяться именно для частей разбиения графа

G. Для краткости в дальнейшем вместо "часть разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$" мы будем говорить просто "часть из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$". Нетрудно понять, что для различных частей $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ пересечение $A_1 \cap A_2$ содержится в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$. Это соображение показывает естественность данного выше определения.

Отметим, что и при таком подходе части разбиения связного графа набором из всех его точек сочленения – это множества вершин блоков этого графа. Для любого множества $S \in \mathfrak{R}(G)$ каждая часть из $\mathrm{Part}(S)$ – это компонента связности графа $G - S$, объединенная с множеством S. В теореме 1 мы покажем, что для любого набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$ части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ представляются в виде пересечения частей разбиения графа множествами этого набора; более того, все максимальные по включению множества вершин графа, представимые в таком виде, – это все части из $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$.

Определение 3. *Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, будем называть внутренними, а множество всех таких вершин – внутренностью части A, которую будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$. Вершины части A, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, мы будем называть граничными, а множество всех этих вершин – границей части A и обозначать через $\mathrm{Boundary}(A)$.*

Мы докажем, что $\mathrm{Boundary}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины вне A. Границей части разбиения графа одним разделяющим множеством S, естественно, будет множество S.

Как уже сказано выше, одной из главных трудностей в изучении свойств k-разделяющих множеств k-связного графа является наличие зависимых разделяющих множеств. Для любого набора $\mathfrak{S}$ k-разделяющих множеств мы определим *граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$, вершины которого соответствуют множествам набора $\mathfrak{S}$, причем две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы. Набор $\mathfrak{S}$ представляется в виде объединения *компонент зависимости* – поднаборов, соответствующих компонентам связности графа $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

В разделе 2 мы сформулируем и докажем *теорему о разбиении*, которая позволяет показать, что структура взаимного расположения удовлетворящих некоторым условиям наборов k-разделяющих множеств k-связного графа изображается с помощью гипердерева и имеет свойства, аналогичные свойствам структуры точек сочленения связного графа. В разделе 3 с помощью теоремы о разбиении мы опишем структуру взаимного расположения компонент зависимости произвольного набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ k-связного графа и докажем ряд фактов, связывающих разбиение графа набором $\mathfrak{S}$ с разбиениями графа компонентами зависимости этого набора. Компоненты зависимости и их структура представляются нам полезными инструментами для работы с разделяющими множествами.

В разделе 4 мы дадим определение *ромашки* – набора F подмножеств $V(G)$, состояшего из *центра* P (возможно, пустого) и $m \geqslant 4$ циклически упорядоченных непустых *лепестков* $Q_1, \dots, Q_m$ одинакового размера ($|P| + 2|Q_i| = k$), для которых существует набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, разбивающий граф на m циклически упорядоченных частей с границами из центра ромашки и двух соседних ее лепестков. Будем говорить, что этот набор $\mathfrak{S}$ *порождает* ромашку F. Мы покажем, что все порождающие ромашку F наборы одинаково разбивают граф, это разбиение мы назовем разбиением графа ромашкой F. Ромашку удобно представлять в виде круга, в центре которого расположен центр ромашки, а по окружности – лепестки соответственно циклическому порядку. Каждую часть разбиения графа ромашкой удобно расположить между соответствующими соседними лепестками. Окажется, что любое множество, состоящее из центра и двух несоседних лепестков, является k-разделяющим, причем разделяет граф так, как соответствующая этому множеству ломаная (соединяющая лепестки и центр) разделяет круг (см. рис. 1).

Понятие ромашки является обощением хорошо известных конструкций для случаев малых k. Так, у любой ромашки в двусвязном графе центр пуст, а каждый лепесток является одиночной вершиной. Такая ромашка представляет из себя “цикл”, хорды которого соответствуют разделяющим множествам. Именно эта конструкция стала одной из главных в работе [3], где W. T. Tutte описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. В конце работы мы в качестве иллюстрации к полученным результатам приведем достаточно простое и наглядное описание структуры двусвязного графа с помощью ромашек. Нетрудно понять, что у любой ромашки в трехсвязном графе и центр, и лепестки являются одиночными вершинами, такая ромашка напоминает “колесо” из работы [4].

В разделе 5 мы докажем интересный факт: для того, чтобы каждая часть разбиения k-связного графа G набором $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ содержала не менее k вершин, необходимо и достаточно, чтобы любая компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, состоящая более чем из одного множества, порождала ромашку.

Отметим, что, на наш взгляд, полученные в работе результаты являются набором инструментов, с помощью которых, возможно, в будущем удастся получить более полные результаты для случая $k > 2$.

1. Свойства разделяющих множеств и частей разбиения

1.1. Разбиение графа набором разделяющих множеств

Теорема 1. *Пусть наборы $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{R}(G)$ попарно не пересекаются, $\mathfrak{S} = \cup_{i=1}^n \mathfrak{S}_i$. Рассмотрим все множества вершин вида*

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i, \tag{1.1}$$

где $A_i \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_i)$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) *Любая часть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ представляется в виде* (1.1).

2) *Из всех множеств вершин графа G, представимых в виде* (1.1)*, частями из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ являются те и только те, которые являются максимальными по включению среди множеств такого вида.*

3) *Если множество вершин A представимо в виде* (1.1) *и $A \notin \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, то A является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. 1) Пусть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. Для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}_i$ не разделяет A. Следовательно, существует часть $A_i \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_i)$, содержащая A. Пусть $\widetilde{A} = \cap_{i=1}^n A_i$. Включение $A \subset \widetilde{A}$ очевидно.

Докажем обратное включение. Предположим, что вершина $b \in \widetilde{A} \setminus A$. Тогда существует разделяющее множество $S \in \mathfrak{S}$, отделяющее b от A. Не умаляя общности предположим, что $S \in \mathfrak{S}_i$.

Тогда $b \notin A_i$, следовательно, $b \notin \widetilde{A}$. Противоречие. Таким образом, $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

2) Мы доказали, что любая часть из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ представляется в виде (1.1). Множество вершин, представимое в виде (1.1), невозможно разделить никаким множеством из набора $\mathfrak{S}$. Следовательно, частями из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ будут те и только те множества вида (1.1), которые являются максимальными по включению среди множеств такого вида.

3) Пусть $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ (где $A_i \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_i)$), причем $A \notin \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. Тогда существует часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, такая, что $B \supsetneq A$. Рассмотрим представление $B = \bigcap_{i=1}^{n} B_i$, где $B_i \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_i)$. Так как $B \neq A$, то $A_j \neq B_j$ для какого-то j. Следовательно, $A \subset A_j \cap B_j$, а такое пересечение обязательно является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{S}_j$. $\square$

Следствие 1. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}(G)$ не пересекаются, а часть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ такова, что ни одно из множеств набора $\mathfrak{T}$ ее не разделяет. Тогда $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$.*

Доказательство. Из условия следует, что существует часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$, содержащая A. Тогда $A = A \cap B$, причем нетрудно понять, что среди всех множеств вершин графа G, имеющих представление в виде пересечения части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ и части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$, A является максимальным по включению. По пункту 2 теоремы 1 тогда $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S} \cup \mathfrak{T})$. $\square$

1.2. Граница и внутренность части разбиения

В этом разделе мы опишем свойства границ и внутренностей частей разбиения k-связного графа набором k-разделяющих множеств.

Замечание. Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, тогда граф $G - S$ несвязен. Для любой части $F \in \mathrm{Part}\,(S)$ ее внутренность $\mathrm{Int}\,(F)$ есть множество всех вершин одной из компонент связности графа $G - S$. Так как S является минимальным по включению разделяющим множеством, то каждая вершина из S должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}\,(F)$, то есть индуцированный подграф графа G на множестве вершин из F связен. Это соображение будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть G – k-связный граф, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{Boundary}\,(A)$ *отделяет* $\mathrm{Int}\,(A)$ *от остальных вершин графа.*

2) *Любая вершина* $v \in \mathrm{Boundary}\,(A)$ *смежна хотя бы с одной вершиной, не входящей в часть* A.

Доказательство. По теореме 1, существует представление

$$A = \cap_{S\in\mathfrak{S}} A_S, \quad \text{где} \quad A_S \in \mathrm{Part}\,(S).$$

1) Для любой вершины $y \notin A$ существует такое $S \in \mathfrak{S}$, что $y \notin A_S$. Тогда множество S отделяет вершину y от $\mathrm{Int}\,(A)$. Следовательно, никакая вершина $y \notin A$ не может быть смежна ни с какой вершиной из $\mathrm{Int}\,(A)$. Отсюда немедленно следует утверждение пункта 1.

2) Для любой граничной вершины $v \in \mathrm{Boundary}\,(A)$ существует такое множество $S \in \mathfrak{S}$, что $v \in S$. Рассмотрим отличную от A_S часть $F_S \in \mathrm{Part}\,(S)$. Ее внутренность $\mathrm{Int}\,(F_S)$ не пересекается с A и обязательно содержит вершину смежную с v. □

Следствие 2. *Для* k*-связного графа* G *выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. *Тогда* $\mathrm{Boundary}\,(A)$ *есть множество всех вершин части* A*, имеющих смежные вершины не из* A.

2) *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *таковы, что* $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ *и* $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$. *Тогда граница* A*, как части из* $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$*, совпадает с границей* A*, как части из* $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$.

Доказательство. Пункт 1 непосредственно следует из теоремы 2 и дает определение границы части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, не зависящее от множеств набора $\mathfrak{S}$. Отсюда следует утверждение пункта 2. □

Определение 4. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(G)$, $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. *Назовем часть* A *пустой, если* $\mathrm{Int}\,(A) = \varnothing$ *и непустой в противном случае. Назовем часть* A *малой, если* $|A| < k$ *и нормальной, если* $|A| \geqslant k$.

1.3. Зависимые и независимые k-разделяющие множества

Настоящий раздел содержит несколько несложных лемм, в которых собраны необходимые нам в дальнейшем технические результаты.

Определение 5. *Будем называть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *независимыми, если* S *не разделяет* T *и* T *не разделяет* S. *В противном случае будем называть эти множества зависимыми.*

Несложно показать, что если $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ и S не разделяет T, то T не разделяет S, то есть эти множества независимы (см.

лемму 10 из работы [6]; также этот факт доказывался в качестве одной из лемм в работе [1].)

Лемма 1. 1) *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что S не пересекается со внутренностью некоторой части $A \in \mathrm{Part}\,(T)$. Тогда S и T независимы, причем S не разделяет часть A.*

2) *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ независимы, а часть $A \in \mathrm{Part}\,(T)$ содержит S. Тогда в $\mathrm{Part}\,(S)$ есть часть, содержащая все отличные от A части из $\mathrm{Part}\,(T)$.*

Доказательство. 1) Так как индуцированный подграф графа G на множестве вершин $\mathrm{Int}\,(A)$ связен, а каждая вершина множества $T = \mathrm{Boundary}\,(A)$ смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}\,(A)$ и $S \cap \mathrm{Int}\,(A) = \varnothing$, то все вершины из $A \setminus S$ лежат в одной компоненте связности графа $G - S$, то есть S не разделяет A и, следовательно, не разделяет T. Это означает, что множества S и T независимы.

2) По пункту 1 множество S не разделяет никакой отличной от A части из $\mathrm{Part}\,(T)$. Поскольку $T \setminus S \neq \varnothing$, все эти части содержатся в одной части из $\mathrm{Part}\,(S)$. □

Лемма 2. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ таковы, что любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы. Пусть часть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ не содержит ни одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Тогда в $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ есть часть, содержащая A.*

Доказательство. По теореме 1 существует представление

$$A = \cap_{T \in \mathfrak{T}} A_T, \quad \text{где} \quad A_T \in \mathrm{Part}\,(T).$$

Любое множество $S \in \mathfrak{S}$ отделено каким-то множеством $T \in \mathfrak{T}$ от части A, следовательно, $S \cap \mathrm{Int}\,(A_T) = \varnothing$. По лемме 1 существует такая часть $A_S \in \mathrm{Part}\,(S)$, что $A_S \supset A_T \supset A$. Множество вершин $B = \cap_{S \in \mathfrak{S}} A_S$ содержит A. Так как B невозможно разделить никаким множеством набора $\mathfrak{S}$, то существует часть из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, содержащая B и, следовательно, содержащая A. □

Определение 6. *Граф зависимости $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{S})$ набора $\mathfrak{S}$ – это граф, вершины которого соответствуют множествам набора, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им множества зависимы.*

Лемма 3. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ не пересекаются, причем граф зависимости* $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{S})$ *связен, а любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы. Тогда все множества набора $\mathfrak{S}$ лежат в одной части $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$, и никакая другая часть из* $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ *не содержит ни одного множества набора $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $T \in \mathfrak{T}$. Так как T и любое множество $S \in \mathfrak{S}$ независимы, то каждое такое S целиком содержится в некоторой части из $\mathrm{Part}\,(T)$. Пусть множества $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ лежат в разных частях $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}\,(T)$, соответственно. Тогда $S_2 \cap \mathrm{Int}\,(A_1) = \varnothing$, и по лемме 1 множества S_1 и S_2 независимы. Отсюда в силу связности графа зависимости $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{S})$ следует, что все множества набора $\mathfrak{S}$ содержатся в одной части из $\mathrm{Part}\,(T)$. Так как это утверждение верно для любого множества $T \in \mathfrak{T}$, то существует часть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$, содержащая все множества набора $\mathfrak{S}$.

Предположим, что отличная от A часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ содержит множество $S \in \mathfrak{S}$. Тогда $S \subset A \cap B$, но пересечение $A \cap B$ является подмножеством одного из множеств набора $\mathfrak{T}$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 4. *Пусть наборы $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ не пересекаются, причем любые два множества $S \in \mathfrak{S}$ и $T \in \mathfrak{T}$ независимы. Пусть часть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора $\mathfrak{S}$, а часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}$. Тогда B содержит объединение всех отличных от A частей из* $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$.

Доказательство. Граница любой части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ состоит из вершин множеств набора $\mathfrak{T}$ и, следовательно, содержится в B. Рассмотрим отличную от A непустую часть $A' \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$. По лемме 2 существует часть $B' \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, содержащая A'. Предположим, что $B' \neq B$. Так как $B' \supset \mathrm{Boundary}\,(A')$ и $B \supset \mathrm{Boundary}\,(A')$, то из $B' \neq B$ следует

$$\mathrm{Boundary}\,(A') \subset B \cap B' \subset S \in \mathfrak{S},$$

откуда в силу непустоты части A' имеем $\mathrm{Boundary}\,(A') = S$. Поскольку $S \subset A$, то $S = A \cap A' \subset T \in \mathfrak{T}$, откуда $S \in \mathfrak{T}$, что невозможно. Следовательно, сделанное выше предположение невозможно и $A' \subset B$. □

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, *граф зависимости* $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{T})$ *связен, а множество* $T \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus \mathfrak{T}$ *является границей части* $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$. *Тогда часть* B *представляет собой объединение всех частей из* $\mathrm{Part}\,(T)$, *внутренности которых не пересекаются с множествами набора* $\mathfrak{T}$, *а никакая другая часть из* $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ *не содержит множество* T.

Доказательство. По лемме 3 никакая отличная от B часть из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ не может содержать множество T, а все множества набора $\mathfrak{T}$ лежат в одной части $F \in \mathrm{Part}\,(T)$. По лемме 4 часть B содержит объединение всех отличных от F частей из $\mathrm{Part}\,(T)$. Учитывая, что любая часть из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ с границей T есть объединение нескольких частей из $\mathrm{Part}\,(T)$, мы получаем утверждение леммы. □

Лемма 6. *Пусть графы зависимости наборов* $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{R}_k(G)$ *связны, а множество* $R \in \mathfrak{R}_k(G) \setminus (\mathfrak{T}_1 \cup \mathfrak{T}_2)$ *таково, что все вершины множеств из* $\mathfrak{T}_1$ *и* $\mathfrak{T}_2$ *содержатся в одной части* $F \in \mathrm{Part}\,(R)$ *и существует часть* $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}_1) \cap \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}_2)$ *с границей* R. *Тогда существуют два зависимых множества* $T_1 \in \mathfrak{T}_1$ *и* $T_2 \in \mathfrak{T}_2$.

Доказательство. Предположим противное. По лемме 5 часть A является объединением всех отличных от F частей из $\mathrm{Part}\,(R)$. Так как граф зависимости $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{T}_1)$ связен и никакое множество набора $\mathfrak{T}_1$ не зависимо ни с каким множеством набора $\mathfrak{T}_2$, то по лемме 3 все множества набора $\mathfrak{T}_1$ лежат в одной части $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}_2)$. Поскольку множество $R \subset \cup_{T \in \mathfrak{T}_1} T$ также лежит в B, то по лемме 5 имеем $A = B$. Однако все множества набора $\mathfrak{T}_1$ лежат в F, причем $F \cap A = R$. Следовательно, все эти множества совпадают с R, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство. □

1.4. Разбиение k-связного графа парой зависимых k-разделяющих множеств

Лемма 7. *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *зависимы. Пусть* $\mathrm{Part}\,(S) = \{F_1, \ldots, F_n\}$, *а* $\mathrm{Part}\,(T) = \{H_1, \ldots, H_m\}$. *Для всех* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *и* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *введем обозначения*

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}\,(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}\,(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Тогда

$$\mathrm{Part}\,(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\ldots,n\},\, j \in \{1,\ldots,m\}},$$

$$\mathrm{Boundary}\,(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ *для всех* $i \in \{1,\dots,n\}$ *и* $S_j \neq \varnothing$ *для всех* $j \in \{1,\dots,m\}$.

Доказательство. Понятно, что

$$S = \left(\bigcup_{j=1}^{m} S_j\right) \cup P \quad \text{и} \quad T = \left(\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right) \cup P.$$

Предположим, что $S_j = \varnothing$ (для некоторого j) или, что то же самое, $S \cap \mathrm{Int}\,(H_j) = \varnothing$. По лемме 1 это означает независимость S и T, противоречие с условием. Аналогично доказывается непустота любого из множеств T_i. Таким образом получается, что все множества $S_1,\dots,S_m$, $T_1,\dots,T_n$ непусты. Так как $G_{i,j} \supset S_i \cup T_j$ и множества S_i и T_j вместе не входят ни в какое другое множество $G_{x,y}$, то $G_{i,j} \not\subset G_{x,y}$ при $(i,j) \neq (x,y)$. Тогда по теореме 1 мы получаем, что $\mathrm{Part}\,(\{S,T\})$ состоит из всех частей $G_{i,j}$. Понятно, что $\mathrm{Boundary}\,(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j$. □

Лемма 8. *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *зависимы, а часть* $A \in \mathrm{Part}\,(\{S,T\})$ *пуста. Тогда существуют смежные вершины* $w \in A \setminus T$ *и* $w' \in A \setminus S$.

Доказательство. По лемме 7 существует представление $A = A_S \cap A_T$, где $A_S \in \mathrm{Part}\,(S)$ и $A_T \in \mathrm{Part}\,(T)$, а $\mathrm{Boundary}\,(A) = P \cup W_S \cup W_T$, где

$$P = S \cap T, \quad W_S = S \cap \mathrm{Int}\,(A_T) \subset S \setminus T$$
$$\text{и} \quad W_T = T \cap \mathrm{Int}\,(A_S) \subset T \setminus S,$$

причем $W_S \neq \varnothing$ и $W_T \neq \varnothing$. Как мы знаем (см. замечание перед теоремой 2), любая вершина множества $W_S \subset S \setminus T$ должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}\,(A_S)$. Но W_S отделено множеством T от всех вершин из $\mathrm{Int}\,(A_S)$ кроме вершин множества W_T. Следовательно, любая вершина множества W_S смежна хотя бы с одной вершиной множества W_T. □

2. Теорема о разбиении

Рассмотрим конечное множество V, элементы которого будем называть вершинами. Пусть каждой вершине $w \in V$ соответствует разбиение $\mathrm{Class}_w(V)$ множества $V \setminus \{w\}$ на несколько классов (возможно, такой класс всего один). Будем говорить, что вершина w разделяет вершины v_1 и v_2, если v_1 и v_2 лежат в разных классах $\mathrm{Class}_w(V)$.

Назовем вершины $v_1, v_2 \in V$ *соседними*, если их не разделяет никакая вершина множества V. Построим *гиперграф разбиения* $\mathrm{Struct}(V)$ на вершинах множества V, гиперребра которого – это максимальные по включению множества попарно соседних вершин.

Приведем пример множества вершин и гиперграфа разбиения, показывающий, какое отношение имеет эта конструкция к теории связности. Пусть F – связный граф, а $\mathfrak{R}_1(F)$ – множество всех его точек сочленения, то есть таких вершин $a \in V(F)$, что граф $F - a$ несвязен. Для такой вершины a классы разбиения $\mathrm{Class}_a(\mathfrak{R}_1(F))$ будут состоять из точек сочленения, лежащих в одной компоненте связности графа $F - a$. Именно широко известная структура взаимного расположения точек сочленения связного графа [7, 8] подсказала нам результат теоремы 3 (см. далее).

Определение 7. *Пусть H – гиперграф.*

Назовем последовательность вершин гиперграфа $a_1a_2\dots a_k$ путем, если существуют такие гиперребра $e_1, e_2, \dots e_{k-1}$, что $a_i, a_{i+1} \in e_i$ для всех $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Назовем путь циклом, если существует гиперребро $e_k \ni a_1, a_k$.

Назовем две вершины гиперграфа связанными, если существует путь между ними. Пусть компонента связности гиперграфа H – это любое максимальное по включению множество попарно связанных вершин этого гиперграфа. Назовем гиперграф H связным, если любые две его вершины связаны.

Для любой вершины v гиперграфа H определим $H - v$ как гиперграф, полученный из H в результате удаления вершины v и всех инцидентных ей гиперребер.

Назовем связный гиперграф H гипердеревом, если для любого цикла в этом гиперграфе существует гиперребро, содержащее все вершины этого цикла.

Назовем вершину v гипердерева H висячей, если гиперграф $H - v$ связен.

Отметим, что гипердерево – это понятие, обобщающее понятие дерева для гиперграфов. При этом висячие вершины гипердерева являются аналогом висячих вершин дерева.

Теорема 3. *Пусть для любых $a, b, c \in V$ выполнено условие: если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Гиперграф* $\mathrm{Struct}\,(V)$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть для некоторой вершины $a \in V$ гиперграф* $\mathrm{Struct}\,(V) - a$ *распадается на компоненты связности $W_1, \dots, W_\ell$. Тогда* $\mathrm{Class}_a(V) = \{W_1, \dots, W_\ell\}$.

Доказательство. Все утверждения теоремы для случая $|V| = 1$ очевидны. Пусть $|V| \geqslant 2$.

a. Докажем индукцией по количеству вершин, что существуют две такие вершины $a, b \in V$, для которых $|\mathrm{Class}_a(V)| = |\mathrm{Class}_b(V)| = 1$. База для множества, состоящего не более чем из трех вершин, очевидна.

Докажем индукцуионный переход. Рассмотрим произвольную вершину $c \in V$, пусть $V' = V \setminus \{c\}$. По индукционному предположению, существуют две такие вершины $a, b \in V'$, что $|\mathrm{Class}_a(V')| = |\mathrm{Class}_b(V')| = 1$. Тогда $|\mathrm{Class}_a(V)| > 1$ в том и только том случае, когда $\mathrm{Class}_a(V) = \{V', \{c\}\}$, а $|\mathrm{Class}_b(V)| > 1$ в том и и только том случае, когда $\mathrm{Class}_b(V) = \{V', \{c\}\}$.

Если $|\mathrm{Class}_a(V')| = |\mathrm{Class}_b(V')| = 1$, то две требуемые вершины найдены. Пусть $|\mathrm{Class}_a(V)| > 1$. Тогда $\mathrm{Class}_a(V) = \{V', \{c\}\}$, следовательно, a разделяет b и c, тогда b не может разделять a и c, и по доказанному в предыдущем абзаце мы получаем, что $|\mathrm{Class}_b(V)| = 1$. Так как для любой вершины $x \in V' \setminus \{a\}$ вершина a разделяет c и x, то c не разделяет a и x. Таким образом, $|\mathrm{Class}_c(V)| = 1$, и в качестве искомых вершин можно взять b и c.

b. Докажем индукцией по количеству вершин в множестве V связность гиперграфа $\mathrm{Struct}\,(V)$. База для множества, состоящего не более чем из трех вершин, очевидна. Рассмотрим такие вершины $a, b \in V$, что $|\mathrm{Class}_a(V)| = |\mathrm{Class}_b(V)| = 1$. Пусть $V' = V \setminus \{a\}$. По индукционому предположению, гиперграф $\mathrm{Struct}\,(V')$ связен. Так как $|\mathrm{Class}_a(V)| = 1$, то все вершины множества V' связаны и в гиперграфе $\mathrm{Struct}\,(V)$. По аналогичным причинам вершины множества $V \setminus \{b\}$ связаны в $\mathrm{Struct}\,(V)$, что означает связность гиперграфа $\mathrm{Struct}\,(V)$.

c. Пусть $a_1 a_2 \dots a_k$ – путь в гиперграфе $\mathrm{Struct}\,(V)$, $b \notin \{a_1, \dots, a_k\}$. Тогда b не разделяет пары вершин a_1 и a_2, ..., a_{k-1} и a_k. Следовательно, b не разделяет a_1 и a_k.

Из этого факта очевидно следует, что любые две вершины, входящие в какой-либо цикл гиперграфа Struct(V), невозможно разделить никакой отличной от них вершиной. Следовательно, все вершины цикла принадлежат одному гиперребру. Таким образом, Struct(V) – гипердерево.

d. Рассмотрим любую компоненту связности W_i. Из доказанного выше следует, что a не разделяет никакие две вершины из W_i. Следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе разбиения $\mathrm{Class}_a(V)$.

Рассмотрим две разных компоненты W_i и W_j и выберем в них соседние с a вершины w_i и w_j, соответственно. Никакая отличная от w_i, w_j, a вершина не может разделить пары соседних вершин w_i и a, а также w_j и a. Следовательно, разделить вершины w_i и w_j может только a. Поскольку w_i и w_j не принадлежат одному гиперребру, то a их разделяет, следовательно, все вершины из W_i лежат в одном классе $\mathrm{Class}_a(V)$, а все вершины из W_j – в другом. □

Замечание 2. Из теоремы 3 следует, что множество

$$W = \{a \in V : |\mathrm{Class}_a(V)| = 1\}$$

– это множество всех висячих вершин гипердерева Struct(V), причем если $|V| \geqslant 2$, то и $|W| \geqslant 2$.

3. Компоненты зависимости

Пусть G – k-связный граф, а $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

Определение 8. *Будем называть компонентой зависимости набора $\mathfrak{S}$ любой набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, состоящий из всех множеств, соответствующих вершинам одной из компонент связности графа зависимости* Dep$(\mathfrak{S})$.

До конца этого раздела мы будем считать, что $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ – все компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$. Множество всех компонент зависимости обозначим через Comp$(\mathfrak{S})$.

Будем говорить, что часть разбиения Part$(\mathfrak{S}_i)$ содержит компоненту зависимости $\mathfrak{S}_j$, если она содержит все входящие в $\mathfrak{S}_j$ множества. Такая часть существует и единственна по лемме 3; обозначим ее через $A_{i \supset j}$.

Каждой компоненте зависимости $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ поставим в соответствие разбиение $\mathrm{Class}_{\mathfrak{T}}(\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}))$ остальных компонент зависимости на классы: каждый класс будут образовывать компоненты зависимости, содержащиеся в одной из частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{T})$.

Определение 9. *Гиперграф описанного выше разбиения* $\mathrm{Struct}(\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}))$ *мы будем называть гиперграфом компонент зависимости набора* $\mathfrak{S}$ *и для простоты обозначать через* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$.

Теорема 4. 1) *Гиперграф компонент зависимости* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ *является гипердеревом.*

2) *Пусть* $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, *а* $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ – *компоненты связности гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. *Тогда компоненты зависимости из множества* $\mathcal{C}_i$ *содержатся в одной части* $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, *причем* $B_i \neq B_j$ *при* $i \neq j$.

3) *Пусть* $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, *а часть* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$ *содержит хотя бы одно множество из* $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. *Тогда существует единственное гиперребро гиперграфа* $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, *вершинами которого являются* $\mathfrak{T}$ *и несколько (быть может, одна) компонент зависимости, лежащих в части* A.

Доказательство. 1) и 2) Проверим выполнение условия из теоремы 3 для описанного выше разбиения множества $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$. Пусть компонента зависимости $\mathfrak{S}_i$ разделяет $\mathfrak{S}_j$ и $\mathfrak{S}_\ell$, то есть части $A_{i\supset j}$ и $A_{i\supset \ell}$ различны. Тогда по лемме 4 мы имеем $A_{j\supset i} \supset A_{i\supset \ell}$, следовательно, $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_\ell$ лежат в одном классе из $\mathrm{Class}_{\mathfrak{S}_j}(\mathrm{Comp}(\mathfrak{S}))$. Таким образом, $\mathfrak{S}_j$ не разделяет $\mathfrak{S}_i$ и $\mathfrak{S}_\ell$. Теперь утверждения 1 и 2 настоящей теоремы следуют из теоремы 3.

3) Как показано выше, для каждой компоненты из $\mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ либо все ее множества содержатся в A, либо ни одно из них не лежит в A. Из условия следует, что множество $\mathcal{C}_A \subset \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$ компонент зависимости, все множества которых содержатся в A, непусто. Из пунктов 1 и 2 следует, что компоненты зависимости из $\mathcal{C}_A$ образуют компоненту связности гиперграфа $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S}) - \mathfrak{T}$. Так как $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$ – гипердерево, то существует единственное гиперребро гиперграфа $\mathrm{Struct}(\mathfrak{S})$, состоящее из $\mathfrak{T}$ и нескольких компонент зависимости из $\mathcal{C}_A$. $\square$

Теорема 5. 1) *Пусть* $\mathfrak{S}_1, \dots \mathfrak{S}_n$ – *все компоненты зависимости набора* $\mathfrak{S}$, *принадлежащие некоторому гиперребру* r *графа*

Struct $(\mathfrak{S})$. *Для всех* $i \in \{1,\dots,n\}$ *пусть* $A_i \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_i)$ – *часть, содержащая множества всех остальных компонент зависимости из* $\mathfrak{S}_1,\dots,\mathfrak{S}_n$. *Тогда для множества вершин*

$$A = \cap_{i=1}^{n} A_i \tag{3.1}$$

выполняется одно из двух утверждений.

(i) *Множество* A *является нормальной частью* $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ *(то есть, содержит хотя бы* k *вершин), причем* $\mathrm{Boundary}\,(A) = \cup_{i=1}^{n}\mathrm{Boundary}\,(A_i)$.

(ii) $n = 2$, $\mathrm{Boundary}\,(A_1) = \mathrm{Boundary}\,(A_2) = A \in \mathfrak{S}$, *причем одна из компонент зависимости* $\mathfrak{S}_1$ *или* $\mathfrak{S}_2$ – *это* $\{A\}$.

2) *Для любой части* $H \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, *не представимой в виде* (3.1), *существует такая компонента зависимости* $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}\,(\mathfrak{S})$, *что* $H \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}')$.

3) *Пусть* $\mathfrak{S}' \in \mathrm{Comp}\,(\mathfrak{S})$ *и часть* $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}')$ *таковы, что* A *не содержит множеств из* $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. *Тогда* $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$.

Доказательство. 1) Рассмотрим любую отличную от $\mathfrak{S}_1,\dots,\mathfrak{S}_n$ компоненту зависимости $\mathfrak{S}_\ell$ (если такая компонента зависимости существует). Так как Struct $(\mathfrak{S})$ – гипердерево, то существует единственное такое $i \leqslant n$, что $\mathfrak{S}_\ell$ лежит в одной компоненте связности графа $\mathrm{Struct}\,(\mathfrak{S}) - \mathfrak{S}_i$, а $\mathfrak{S}_1,\dots \mathfrak{S}_{i-1},\mathfrak{S}_{i+1},\dots,\mathfrak{S}_n$ – в другой. Тогда по утверждению 2 теоремы 4 мы имеем $A_{i\supset\ell} \neq A_i$, и по лемме 3 существует часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_\ell)$, содержащая A_i. Следовательно, множества компонент зависимости, не принадлежащих гиперребру r, не разделяют A. Тогда по теореме 1 и следствию 1 либо $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, либо A – подмножество одного из множеств набора $\cup_{j=1}^{n}\mathfrak{S}_j$. Поскольку для всех $i \in \{1,\dots,n\}$ часть A_i содержит $\cup_{j=1}^{n}\mathrm{Boundary}\,(A_j)$, то $A \supset \cup_{j=1}^{n}\mathrm{Boundary}\,(A_j)$, откуда $|A| \geqslant k$ (для любого j часть A_j непуста, следовательно, $|\mathrm{Boundary}\,(A_j)| \geqslant k$).

Пусть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. Вершина части A, не входящая в границу ни одной из частей A_i, по следствию 2 не может быть смежна ни с какой вершиной не из A, следовательно, $\mathrm{Boundary}\,(A) = \cup_{i=1}^{n}\mathrm{Boundary}\,(A_i)$.

Пусть $A \notin \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. Тогда из сказанного выше следует, что

$$\mathrm{Boundary}\,(A_1) = \mathrm{Boundary}\,(A_2) = \cdots = \mathrm{Boundary}\,(A_n) = A.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $A \in \mathfrak{S}_1$. Так как $A = \mathrm{Boundary}\,(A_1)$ – граница части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_1)$, то A и любое множество набора $\mathfrak{S}_1$ независимы, откуда $\mathfrak{S}_1 = \{A\}$. Предположим, что

$n \geqslant 3$. По лемме 5 множество B, равное объединению всех отличных от A_1 частей из $\mathrm{Part}\,(A)$, принадлежит $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_2) \cap \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}_3)$. Тогда по лемме 6 граф зависимости $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3)$ связен, что невозможно.

2) Докажем утверждение индукцией по количеству компонент зависимости в наборе. База для случая, когда компонента зависимости одна, очевидна. Докажем переход. Пусть $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}\,(\mathfrak{S})$ – компонента зависимости, соответствующая висячей вершине гипердерева $\mathrm{Struct}\,(\mathfrak{S})$; эта компонента зависимости не разделяет никакие две другие. Тогда утверждение пункта 2 для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ уже доказано. Пусть часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}'$, а часть $B' \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}')$ содержит все множества набора $\mathfrak{T}$. По теореме 1 для любой части $H \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ существует представление $H = H_1 \cap H_2$, где $H_1 \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ и $H_2 \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}')$.

Если $H_1 = B$ и $H_2 = B'$, то часть H представляется в виде (3.1), противоречие с условием. По лемме 4 часть B содержит объединение всех отличных от B' частей из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}')$, а часть B' содержит объединение всех отличных от B частей из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$. Тогда по следствию 1 остальные части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$ – это либо части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$, либо части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}')$, откуда очевидно следует доказываемое утверждение.

3) Так как часть A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$, то по лемме 2 ни одно из этих множеств не разделяет A. Тогда по следствию 1 мы имеем $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. □

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, $\mathfrak{T} \in \mathrm{Comp}\,(\mathfrak{S})$, $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$. *Тогда либо* $\{\mathrm{Boundary}\,(A)\} \in \mathrm{Comp}\,(\mathfrak{S})$, *либо существует такая часть* $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, *что* $\mathrm{Boundary}\,(B) \supset \mathrm{Boundary}\,(A)$.

Доказательство. Если часть A не содержит множеств из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$, то по части 3 теоремы 5 мы имеем $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$. Тогда можно взять $B = A$.

Пусть часть A содержит хотя бы одно множество из $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$. Тогда по теореме 4 существует такое гиперребро гипердерева $\mathrm{Struct}\,(\mathfrak{S})$, что одной из его вершин является $\mathfrak{T}$, а все остальные вершины этого гиперребра – компоненты зависимости, содержащиеся в A. Тогда по пункту 1 теоремы 5 либо существует такая часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S})$, что $\mathrm{Boundary}\,(B) \supset \mathrm{Boundary}\,(A)$, либо $\{\mathrm{Boundary}\,(A)\} \in \mathrm{Comp}\,(\mathfrak{S})$. □

Определение 10. *Назовем компоненту зависимости набора $\mathfrak{S}$ крайней, если она соответствует висячей вершине гипердерева* Struct $(\mathfrak{S})$.

Замечание 3. 1) У любого набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ с несвязным графом зависимости имеется хотя бы две крайних компоненты зависимости.

2) Из теоремы 4 следует, что компонента зависимости $\mathfrak{S}'$ набора $\mathfrak{S}$ не разделяет никакие две компоненты зависимости этого набора тогда и только тогда, когда она является крайней.

4. Ромашки

Перейдем к определению *ромашки* – важнейшего в нашей работе понятия. Напомним, что мы имеем дело с k-связным графом G, где $k \geqslant 2$.

Пусть $m \geqslant 4$, а множества $P, Q_1, \dots, Q_m \subset V(G)$ таковы, что

$$0 \leqslant |P| < k, \quad Q_i \cap P = \varnothing, \quad |Q_i| = \frac{k - |P|}{2}$$

для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Рассмотрим набор $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$, в котором множества $Q_1, \dots, Q_m$ считаются *циклически упорядоченными*. Мы будем считать, что циклическая перестановка множеств $Q_1, \dots, Q_m$ не меняет набора F. Введем обозначение $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$. Пусть $\mathfrak{R}(F)$ – набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j.

Определение 11. *Пусть существует такой набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(F)$, что $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, а разбиение* Part $(\mathfrak{S})$ *состоит из m частей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$, ..., $G_{m,1}$, причем* Boundary $(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. *Тогда назовем набор F ромашкой, множество P – центром, а множества $Q_1, \dots, Q_m$ – лепестками этой ромашки. Если никакие два лепестка ромашки F не пересекаются, то назовем эту ромашку правильной. Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F.*

Одну и ту же ромашку могут порождать различные наборы разделяющих множеств. Ниже мы докажем, что если наборы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ порождают ромашку F, то Part $(\mathfrak{S})$ = Part $(\mathfrak{T})$. Мы будем называть это разбиение *разбиением графа G ромашкой F* и обозначать через Part (F).

Также будет доказано, что если F – ромашка, то $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$. При $k \leqslant 3$ имеет место совпадение $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{R}(F)) = \mathrm{Part}\,(F)$, что не всегда верно при $k \geqslant 4$.

Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки. Лепестки ромашки всегда будем указывать в циклическом порядке и рассматривать их индексы, как вычеты по модулю количества лепестков. Расположим лепестки $Q_1, Q_2, \dots,$ Q_m по окружности соответственно их циклическому порядку и поместим в центр окружности центр ромашки P. Между лепестками Q_i и Q_{i+1} мы поместим часть $G_{i,i+1}$. На рисунке изображено разбиение графа ромашкой с восемью лепестками. Введем обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). В теореме 6 мы докажем, что множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$ то есть разбивает граф именно так, как соответствующая этому множеству ломаная разбивает круг.

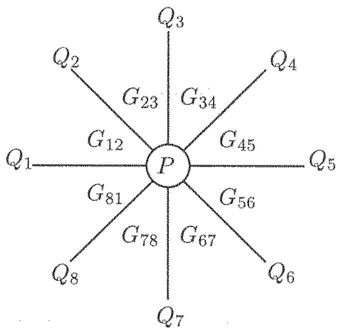

Рис. 1.

При малых значениях k ромашки имеют большое значение для исследования структуры k-связных графов. Так, у любой ромашки в двусвязном графе центр пуст, а каждый лепесток является одиночной вершиной. Такая ромашка представляет из себя “цикл”, хорды которого соответствуют разделяющим множествам. Именно такая конструкция стала одной из главных в работе [3], где W. T. Tutte описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. В конце работы мы в качестве иллюстрации наших результатов приведем достаточно простое и наглядное описание структуры двусвязного графа с помощью ромашек.

Нетрудно понять, что у любой ромашки в трехсвязном графе и центр, и лепестки являются одиночными вершинами, такая ромашка напоминает "колесо" из работы [4].

При больших k ромашки устроены значительно сложнее: и лепестки, и центр могут состоять из нескольких вершин, соседние лепестки могут пересекаться. Докажем ряд свойств ромашек.

Лемма 9. *Граф зависимости любого набора k-разделяющих множеств, порождающего ромашку, связен.*

Доказательство. Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ и набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F. Тогда $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$, $\mathrm{Boundary}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Предположим, что граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$ несвязен, и рассмотрим любую компоненту зависимости $\mathfrak{S}'$ набора $\mathfrak{S}$. Рассмотрим множество $Q_{i,j} \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}'$. Так как $Q_{i,j}$ и любое множество набора $\mathfrak{S}'$ независимы, то существует часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$, содержащая $Q_{i,j}$. Понятно, что A есть объединение нескольких частей из $\mathrm{Part}(F)$, то есть граница A есть объединение центра и нескольких лепестков ромашки. Из включения $A \supset Q_{i,j}$ легко вывести, что $\mathrm{Boundary}(A)$ содержит какие-то два несоседних лепестка Q_x и Q_y. По следствию 3 тогда либо $\{\mathrm{Boundary}(A)\} \in \mathrm{Comp}(\mathfrak{S})$, либо существует такая часть $B \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, что $\mathrm{Boundary}(B) \supset \mathrm{Boundary}(A) \supset Q_x \cup Q_y$. Легко видеть, что оба варианта в нашем случае невозможны. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Теорема 6. *Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ – ромашка. Тогда $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$.*

Доказательство. Пусть набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F, тогда $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$, $\mathrm{Boundary}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Пусть $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$. Тогда множество $Q_{i,j}$ не разделяет ни одну из частей $G_{x,x+1}$. Следовательно, оно не разделяет ни $G_{i,j}$, ни $G_{j,i}$. Отсюда следует, что $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Назовем множество лепестков M ромашки F *хорошим*, если для любых двух различных лепестков $Q_i, Q_j \in M$ множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Для любого такого непустого поднабора $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, что граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ связен, мы докажем идукцией по $|\mathfrak{T}|$, что множество всех лепестков, входящих в множества из $\mathfrak{T}$, хорошее (обозначим это множество лепестков через $L(\mathfrak{T})$).

База для поднабора из одного множества уже проверена, докажем переход. В наборе $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}$, содержащем более одного множества, есть такое множество T, что для набора $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \setminus \{T\}$ граф $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{T}')$ связен. По индукционному предположению, множество лепестков $L(\mathfrak{T}')$ – хорошее. Пусть $T = Q_{i,j}$, тогда достаточно проверить, что для любого лепестка $Q_x \in L(\mathfrak{T}')$ множество $Q_{i,x}$ отделяет $G_{i,x}$ от $G_{x,i}$. Можно считать, что $Q_x \subset G_{i,j}$, $x \notin \{i,j\}$. Как доказано выше, множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Так как граф $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{T})$ связен, то существует такое множество $R \in \mathfrak{T}'$, что R и $Q_{i,j}$ зависимы; следовательно, $R \cap \mathrm{Int}\,(G_{j,i}) \neq \varnothing$. Это означает, что $R \cap \mathrm{Int}\,(G_{j,i}) = Q_y$, где $Q_y \in L(\mathfrak{T}')$ и $y \notin \{i,j\}$. По индукционному предположению, множество $Q_{x,y}$ отделяет $G_{x,y}$ от $G_{y,x}$. Таким образом, множества $Q_{i,j}$ и $Q_{x,y}$ зависимы, и по лемме 7 множество $Q_{i,x}$ отделяет $G_{i,j} \cap G_{x,y} = G_{i,x}$ от остальных вершин графа (то есть, от $G_{x,i}$). Так как по лемме 9 граф $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{S})$ связен, то теорема доказана. $\square$

Следствие 4. *Для ромашки $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Несоседние в циклическом порядке лепестки ромашки не могут пересекаться.*

2) *Расположим индексы $1, 2, \ldots m$ по окружности соответственно их циклическому порядку и поставим в соответствие множеству $Q_{i,j}$ хорду этой окружности, соединяющую i и j. Тогда множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ являются зависимыми k-разделяющими множествами в том и только том случае, когда соответствующие им хорды окружности пересекаются во внутренней точке.*

3) *Если множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ являются зависимыми разделяющими множествами, то $Q_{x,y}$ отделяет друг от друга лепестки Q_z и Q_t.*

Доказательство этих утверждения непосредственно следует из теоремы 6.

Следствие 5. *Для ромашки $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть $j \notin \{i, i+1, i+2\}$. Тогда $G_{i,j} \in \mathrm{Part}\,(Q_{i,j})$.*

2) *Пусть хотя бы одна из частей $G_{i,i+1}$ или $G_{i+1,i+2}$ непуста. Тогда $G_{i,i+2} \in \mathrm{Part}\,(Q_{i,i+2})$.*

Доказательство. 1) В рассматриваемом случае $\mathrm{Int}\,(G_{i,j-1}) \neq \varnothing$. По теореме 6 множество $G_{i,j-1}$ есть объединение частей

$A_1, \dots, A_\ell \in \mathrm{Part}\,(Q_{i,j-1})$ (возможно, $\ell = 1$), причем легко видеть, что все эти части непусты, а их внутренности не пересекаются с $Q_{i,j}$. Тогда $Q_{i,j}$ не разделяет ни одну из частей $A_1, \dots, A_\ell$, а следовательно, и их объединение $G_{i,j-1}$. Аналогично, $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{i+1,j}$. Теперь понятно, что $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{i,j} = G_{i,j-1} \cup G_{i+1,j}$. Так как $Q_{i,j}$ по теореме 6 отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$, то $G_{i,j} \in \mathrm{Part}\,(Q_{i,j})$.

2) Множество $Q_{i,i+2}$ не пересекает внутренность ни одной из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$. Следовательно, если какая-то из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ непуста, то $Q_{i,i+2}$ не разбивает эту часть. Отсюда очевидно следует утверждение пункта 2. $\square$

Пусть индексы i и j таковы, что $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$. Из утверждения 1 следствия 5 понятно, что тогда $\mathrm{Part}\,(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Пусть $k \leqslant 3$. Как мы уже отмечали, в этом случае лепестки любой ромашки k-связного графа – одновершинные множества. Тогда из следствия 5 для любых двух несоседних в циклическом порядке индексов i, j получается, что $\mathrm{Part}\,(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Теорема 7. *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_k(G)$ *порождают ромашки* F_S *и* F_T*, соответственно, с одинаковым центром и одинаковыми множествами лепестков. Тогда* $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ *и* $F_S = F_T$ *(то есть циклические порядки лепестков в этих ромашках одинаковы).*

Доказательство. Пусть $F_S = (P; Q_1, \dots, Q_m)$, тогда $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$, $\mathrm{Boundary}\,(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Так как наборы лепестков ромашек F_S и F_T совпадают, то граница любой части из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T})$ есть множество вида $Q_{x,y}$. Предположим, что одна из частей $\mathrm{Part}\,(F_T)$ имеет границу $Q_{i,j}$, где индексы i и j – несоседние в циклическом порядке ромашки F_S.

Рассмотрим две группы лепестков: лежащие в $G_{i,j}$ и лежащие в $G_{j,i}$. Множество $Q_{i,j}$ и любое множество набора $\mathfrak{T}$ независимы, а значит, $Q_{i,j}$ по следствию 4 содержит либо два лепестка из первой группы (тогда назовем его множеством первого типа), либо два лепестка из второй группы (тогда назовем его множеством второго типа). Так как обе группы содержат отличные от Q_i и Q_j лепестки, то в наборе $\mathfrak{T}$ есть и множества первого типа, и множества второго типа. Но по следствию 4 множества разных типов независимы, следовательно, граф $\mathrm{Dep}\,(\mathfrak{T})$ несвязен, противоречие с леммой 9.

Таким образом, циклический порядок в ромашках F_S и F_T совпадает. Отсюда по теореме 6 имеем $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$, то есть, $F_S = F_T$. □

Из теоремы 7, в частности, следует, что все наборы, порождащие ромашку F, разбивают граф одинаково. Этот факт показывает корректность определения разбиения графа ромашкой F.

5. Разбиения без малых частей

Теорема 8. *Для любого набора k-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ в k-связном графе G следующие два утверждения равносильны.*

1° *Каждая часть из* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *содержит по крайней мере k вершин.*

2° *Каждая компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$, состоящая более чем из одного множества, порождает правильную ромашку.*

Доказательство. Утверждение 1° следует из утверждения 2° по теореме 5. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим такой набор $\mathfrak{S}$, что в $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ нет малых частей, и его компоненту зависимости $\mathfrak{S}'$, состоящую более чем из одного множества. По теореме 5 в $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Докажем, что если $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}'$, $|\mathfrak{T}| \geqslant 2$ и граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T})$ связен, то набор $\mathfrak{T}$ порождает правильную ромашку.

Проверим базу для набора, состоящего из двух зависимых множеств S и T. С помощью леммы 7 нетрудно понять, что все части из $\mathrm{Part}(\{S,T\})$ содержат хотя бы по k вершин в том и только том случае, когда эти два множества порождают правильную ромашку.

Докажем индукционный переход. Пусть набор $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{S}'$ порождает правильную ромашку $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$. Пусть $S \in \mathfrak{S}' \setminus \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \cup \{S\}$ таковы, что граф $\mathrm{Dep}(\mathfrak{T}')$ связен. Докажем, что набор $\mathfrak{T}'$ также порождает правильную ромашку. Введем обозначения

$$p = |S \cap P|, \quad a_{i,i+1} = |S \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})|, \quad b_i = |S \cap Q_i|.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{i=1}^{m} a_{i,i+1} + p = k. \tag{5.1}$$

1. Пусть множество S разделяет пустую часть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}\,(F)$. Так как $|G_{i,i+1}| = k$, то S разделяет эту часть на несколько малых частей из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}')$. С помощью теоремы 6 и леммы 8 нетрудно установить, что существуют смежные вершины $u \in Q_i$, $v \in Q_{i+1}$. Так как u и v смежны, то существует часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}')$, содержащая u и v. По теореме 1 существует такая часть $A \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}')$, что $u, v \in B \subset A$. Так как часть A содержит u и v, то $A \subset G_{i,i+1}$, следовательно, $|A| < k$. Тогда и $|B| < k$, но в $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}')$ нет малых частей. Полученное противоречие показывает, что S не может разделять ни одну из пустых частей из $\mathrm{Part}\,(F)$.

2. Пусть S и $Q_{i,j}$ зависимы, $\mathrm{Part}\,(S) = \{H_1, \ldots, H_\ell\}$. Не умаляя общности, будем считать, что

$$|S \cap \mathrm{Int}\,(G_{i,j})| \leqslant |S \cap \mathrm{Int}\,(G_{j,i})|. \tag{5.2}$$

Введем обозначения:

$$Q_{i,j} \cap S = P', \quad Q_{i,j} \cap \mathrm{Int}\,(H_x) = T_x, \quad \mathrm{Int}\,(G_{i,j}) \cap S = S',$$

$$F_x = G_{i,j} \cap H_x, \quad R_x = T_x \cup P' \cup S'.$$

Пусть для некоторого x мы имеем $|R_x| < k$. Поскольку $G_{i,j}$ есть объединение нескольких частей из $\mathrm{Part}\,(Q_{i,j})$, то F_x в силу леммы 7 является объединением нескольких частей из $\mathrm{Part}\,(\{Q_{i,j}, S\})$, причем объединение границ этих частей – это R_x, следовательно, все эти части пусты и $F_x = R_x$. Выберем две смежные вершины $u \in S'$ и $v \in T_x$ (такие две вершины по лемме 8 есть в любой из пустых частей из $\mathrm{Part}\,(\{Q_{i,j}, S\})$, составляющих F_x). Так как u и v смежны, то существует часть $B \in \mathrm{Part}\,(\mathfrak{S}')$, содержащая u и v.

Отметим, что каждое из множеств вершин $F_1, \ldots, F_\ell, G_{j,i}$ является объединением нескольких частей из $\mathrm{Part}\,(\mathfrak{T}')$. Следовательно, одно из этих множеств должно содержать B, причем это может быть только множество F_x, так как остальные множества не содержат хотя бы одной из вершин u и v. Таким образом, $B \subset F_x$; следовательно, $|B| \leqslant |F_x| < k$, что невозможно.

Следовательно, для всех x мы имеем $|R_x| \geqslant k$. Однако в силу (5.2)

$$2k = |R_1| + |R_2| = (2|S'| + |P'|) + (|T_1| + |T_2| + |P'|) \leqslant k + k. \tag{5.3}$$

В (5.3) должно достигаться равенство, что возможно лишь в случае, когда $\mathrm{Part}\,(S) = \{H_1, H_2\}$ и

$$|Q_{i,j} \cap \mathrm{Int}\,(H_1)| = |Q_{i,j} \cap \mathrm{Int}\,(H_2)|,$$

$$|S \cap \mathrm{Int}\,(G_{i,j})| = |S \cap \mathrm{Int}\,(G_{j,i})|. \qquad (5.4)$$

3. Предположим, что множество S не пересекает внутренность ни одной из частей из $\mathrm{Part}\,(F)$. Учитывая п. 1, получаем, что в этом случае S не разделяет ни одну из частей $\mathrm{Part}\,(F)$. Такое множество может быть разделяющим только в случае, когда оно является объединением двух лепестков и центра ромашки F. В этом случае понятно, что набор $\mathfrak{T}'$ также порождает ромашку F.

Теперь не умаляя общности можно предположить, что $a_{i,i+1} \neq 0$. В силу зависимости S и $Q_{i,i+1}$ имеет место один из двух случаев.

(1) Существует такое $j \neq i$, что $a_{j,j+1} > 0$.

(2) Для всех $x \neq i$ мы имеем $a_{x,x+1} = 0$, и существует такое $t \notin \{i, i+1\}$, что $b_t \neq 0$.

Рассмотрим случай (1). Из (5.4) имеем $2a_{i,i+1}+b_i+b_{i+1} = k-p = 2a_{j,j+1} + b_j + b_{j+1}$. Учитывая (5.1), получаем, что $a_{x,x+1} = 0$ при $x \notin \{i,j\}$ и $b_x = 0$ при $x \notin \{i, i+1, j, j+1\}$. Более того, если $b_i \neq 0$ или $b_{j+1} \neq 0$, то $i = j+1$, а если $b_j \neq 0$ или $b_{i+1} \neq 0$, то $j = i+1$. Так как в ромашке хотя бы четыре лепестка, то $Q_{i,i+1} \neq Q_{j,j+1}$; следовательно, не умаляя общности, мы можем считать, что $i \neq j+1$ и $b_i = b_{j+1} = 0$.

Предположим, что $j = i+1$. В этом случае множество S не разделяет $G_{j+1,i} \supset (Q_{j+2} \cup (P \setminus S))$. Отметим, что множества $Q_{j,j+2}$ и S зависимы и по (5.4) множество S должно разделять $Q_{j,j+2}$ на две части одинакового размера. Это возможно лишь когда $S \supset P$, $b_j = 0$ и S не разбивает лепесток Q_j.

Пусть все индексы $i, i+1, j, j+1$ различны. Тогда нетрудно понять, что S не разбивает частей $G_{j+1,i}$ и $G_{i+1,j}$. Предположим, что $S \not\supset P$. Очевидно, множества S и $Q_{i,j}$ зависимы и по (5.4) множество S должно разделять $Q_{i,j}$ на две равные части. Учитывая, что S не разделяет ни $Q_i \cup (P \setminus S)$, ни $Q_j \cup (P \setminus S)$, получаем $S \supset P$.

Таким образом, множество S является объединнением центра P и двух равных лепестков $Q'_i = S \cap \mathrm{Int}\,(G_{i,i+1})$ и $Q'_j = S \cap \mathrm{Int}\,(G_{j,j+1})$. Множество S не разбивает отличных от $G_{i,i+1}$

и $G_{j,j+1}$ частей из $\mathrm{Part}\,(F)$, делит часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $Q_i \cup Q_i' \cup P$ и $Q_{i+1} \cup Q_i' \cup P$, а часть $G_{j,j+1}$ – на две части с границами $Q_j \cup Q_j' \cup P$ и $Q_{j+1} \cup Q_j' \cup P$. Следовательно, набор $\mathfrak{T}'$ порождает правильную ромашку F', полученную из F добавлением лепестка Q_i' между Q_i и Q_{i+1} и лепестка Q_j' между Q_j и Q_{j+1}.

Случай (2) разбирается аналогично. В этом случае получается $S = P \cup Q_i' \cup Q_t$, в ромашку F добавляется один новый лепесток $Q_i' = S \cap \mathrm{Int}\,(G_{i,i+1})$ между Q_i и Q_{i+1}. □

6. Структура разбиения двусвязного графа

В принципе, структура разбиения двусвязного графа 2-разделяющими множествами достаточно полно изучена в книге [3]. Не претендуя на первенство в этом вопросе, мы опишем эту структуру с помошью разработанной выше теории ромашек, так как это описание представляется нам достаточно простым, удобным и наглядным.

Отметим важное обстоятельство, делающее случай двусвязного графа гораздо более простым, чем случай графа большей связности: в разбиении двусвязного графа любым набором разделяющих множеств нет малых частей, так как нетрудно понять, что все части разбиения содержат хотя бы по две вершины. (Действительно, любая вершина x двусвязного графа смежна хотя бы с одной вершиной y, тогда вершины x и y невозможно разделить. Следовательно, не существует части, состоящей из одной вершины x.)

Итак, пусть G – двусвязный граф, а $\mathfrak{S}$ – произвольный набор 2-разделяющих множеств графа G. По теореме 8 из сказанного выше следует, что множества любой компоненты зависимости набора $\mathfrak{S}$ порождают ромашку. Как мы уже отмечали, любая ромашка F в двусвязном графе имеет пустой центр и одновершинные лепестки, представляя из себя "цикл", в котором любые две соседние вершины являются границей части F-разбиения графа, а две несоседние вершины порождают разделяющее множество, которое разбивает граф на две части так, как соответствующая им хорда разбивает цикл.

Структуру взаимного расположения ромашек-компонент зависимости набора $\mathfrak{S}$ показывает гипердерево компонент зависимости $\mathrm{Struct}\,(\mathfrak{S})$. С помощью гипердерева $\mathrm{Struct}\,(\mathfrak{S})$ и теоремы 5 мы получаем полное описание всех частей разбиения двусвязного графа G набором 2-разделяющих множеств $\mathfrak{S}$ – это либо части разбиения G одной из ромашек-компонент зависимости, не содержащие других компонент зависимости, либо пересечение частей разбиения графа ромашками-компонентами зависимости, порождающими какое-либо гиперребро гипердерева $\mathrm{Struct}\,(\mathfrak{S})$.

Литература

1. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
2. D. W. Matula, *k-Blocks and Ultrablocks in Graphs* — J. Combin. Theory, Ser. B **24** (1978), 1–13.
3. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press (1966).
4. W. T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
5. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.
6. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
7. О. Оре, *Теория графов.* Наука, Москва (1968).
8. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, Москва (1973).

Karpov D. V. Vertex cuts in a k-connected graph.

We study the structure of k-vertex cuts in a k-vertex-connected graph. A case of a biconnected graph is described in details as an illustration for our method.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

Поступило 12 декабря 2006 г.